MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XVII. Band.

Mit 3 Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1880.

Inhalt des siebzehnten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Berichtigung.

pag. 454, 2. Zeile von unten ist hinzuzufügen: wenn m ungerade ist.

Das Doppelverhältniss und die absolute Invariante binärer biquadratischer Formen.

Von

L. Wedekind in Karlsruhe.

In seiner Erlanger Programmschrift*) hat Herr Klein eine Reihe von Untersuchungen entwickelt, deren Endziel es ist, die mannigfachsten geometrischen Methoden unter wenige oberste Gesichtspuncte zusammenzufassen. Diese Untersuchungen begründen unter anderem den Satz, dass die in der complexen Ebene geometrisch interpretirte Theorie linearer Transformationen der Veränderliche $x + iy$ und die reelle projectivische Geometrie des quaternären Raumes unter Zugrundelegung einer festen, reellen Kugelfläche, oder mit anderen Worten, dass die Theorie der binären Formen complexer Variabelen und reelle räumlich-projectivische Maassgeometrie mit reeller Fundamentalkugel denselben gedanklichen Inhalt haben, insofern sie lediglich das nämliche Gebiet analytischer Operationen versinnlichen und das unterscheidende beider Methoden ausschliesslich in der Wahl der äusseren Hülfsmittel der Veranschaulichung besteht. Das Werkzeug, vermöge dessen die Identität jener auf den ersten Blick sehr verschiedenartigen Behandlungsweisen geometrischer Probleme nachgewiesen wird, ist, wie die gedachte Schrift näher ausführt, die stereographische Projection der Ebene auf die feste Kugel.

Bei einer späteren Veranlassung**) ist vom gleichen Verfasser darauf hingewiesen, dass die Fundamentalfläche verallgemeinert und an Stelle der reellen Kugel eine beliebige reelle, nicht geradlinige Fläche zweiter Ordnung gesetzt werden darf. Dieselbe ist alsdann

---

*) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.“ Erlangen 1872.

**) Gelegentlich einer „Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf Raumgeometrie.“ Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen; Sitzung vom 10. November 1873.

aus einem ihrer Kreispuncte auf eine Ebene abzubilden, welche der Berührungsebene des Projectionspunctes parallel verläuft.

Von jenen beiden Arten, den Gegenstand geometrisch zu erfassen, darf diejenige, welche mit Vorstellungen projectivischer Geometrie operirt, als die geläufigere bezeichnet werden (l. c. pag. 23); und im Lichte der genannten Betrachtungen erscheint es mithin angezeigt, der gewöhnlichen Repräsentation der complexen Veränderliche eine Darstellung derselben auf der Fläche zweiten Grades in der geschilderten Weise zu substituiren und ihr Verhalten auf einer solchen Fläche zu verfolgen. Dann aber wird sich insbesondere der Wunsch fühlbar machen, analytische Bildungen, die von complexen Argumenten abhängen, und die nach Zuordnung der hier in Frage kommenden Transformationsgruppen unveränderlichen Charakter zeigen, bei Anwendung der neuen Darstellung unmittelbar durch simultane Invarianten der Fläche und zugehöriger Punctsysteme auszudrücken, um so die Eigenschaften derartiger Bildungen durch die geometrische Interpretation selbst auf die Höhe anschauungsmässiger Evidenz zu erheben. Als eines der wichtigsten, weil elementarsten, Vorkommnisse in dieser Richtung dürfte das Doppelverhältniss der vier Verschwindungswerthe einer binären biquadratischen Grundform sowie weiterhin die durch dasselbe bedingte absolute Invariante der betreffenden Form zu nennen sein; ich habe früher gezeigt*), wie hinsichtlich des ersteren der gewollte Zweck durch geeignete Ueberlegungen sich erreichen lässt. Die gegenwärtige Notiz beabsichtigt, die Lösung des Problems nach seiner analytischen Seite zu ergänzen und in einzelnen Beziehungen zu vervollständigen. — Um einen lückenlosen Zusammenhang herzustellen, sind gelegentlich kürzere Bemerkungen wieder aufgenommen worden, die schon an anderen Orten ihren Platz gefunden hatten.

§ 1.

Die Fläche zweiter Ordnung von negativer Discriminante.

In symbolischer Form sei
$$a_x^2 = 0 = b_x^2 = c_x^2 = d_x^2$$
die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung und
$$\Delta' = \frac{1}{24}(abcd)^2$$
die Discriminante dieser Fläche. Eine lineare Transformation, deren Coëfficientendeterminante den Werth D hat, verwandle die Discrimi-

*) „Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen." Math. Annalen Bd. IX p. 209. — „Studien im binären Werthgebiet." Habilitationsschrift, Karlsruhe 1876; letztere im folgenden kurz als „Studien" citirt.

nante in eine Grösse Δ. Zwischen dieser und dem ursprünglichen Δ' besteht bekanntlich die Beziehung

$$\Delta = D^2 \cdot \Delta';$$

man entnimmt derselben, dass das Vorzeichen der numerisch ausgewertheten Discriminante einer Fläche zweiter Ordnung unzerstörbar ist, so lange man sich auf *reelle* Raumtransformationen beschränkt. Die vorliegende Untersuchung zieht aber, wie oben erwähnt wurde, nur solche Transformationen in Betracht; und da beispielsweise für die Kugel oder das Ellipsoid, wenn beide durch ihre Mittelpunctsgleichungen dargestellt sind, $\Delta' < 0$ ausfällt, so ist es für die hier anzustellenden Erwägungen überhaupt wesentlich, die Discriminante der Abbildungsfläche *negativ* vorauszusetzen.

Vermittelst einer Coordinatenverwandlung werde unsere Fläche auf ein ihr eingeschriebenes Fundamentaltetraëder bezogen, dessen Ecken im alten System die Coordinaten hatten

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4; \quad \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4; \quad \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4.$$

Die transformirte Gleichung erhält alsdann die Gestalt

$$0 = r y_1 y_2 + s y_1 y_3 + t y_1 y_4 + r' y_3 y_4 + s' y_4 y_2 + t' y_2 y_3,$$

und zwar haben, wie sich mühelos ergiebt, die Coëfficienten dabei folgende Bedeutung („Studien“ p. 5):

$$r = a_\xi a_\eta, \quad s = a_\xi a_\zeta, \quad t = a_\xi a_\vartheta, \quad r' = a_\zeta a_\vartheta, \quad s' = a_\vartheta a_\eta, \quad t' = a_\eta a_\zeta.$$

Die Discriminante der transformirten Fläche ist:

$$\Delta = \frac{1}{24} (\xi \eta \zeta \vartheta)^2 (abcd)^2$$
$$= r^2 r'^2 + s^2 s'^2 + t^2 t'^2 - 2ss'tt' - 2tt'rr' - 2rr'ss'.$$

Der Umstand, dass $\Delta < 0$ sein soll, bedingt, dass die Producte rr', ss', tt' (die reell sind wie ihre Factoren) gemeinschaftliches Vorzeichen besitzen. Und das gestattet, die Discriminante speciell in der Form

$$\Delta = \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau - 2\tau\varrho - 2\varrho\sigma$$

anzusetzen, in welcher mit ϱ, σ, τ die *absoluten* Werthe jener Producte bezeichnet sind, so dass also statthat

$$|rr'| = \varrho, \quad |ss'| = \sigma, \quad |tt'| = \tau.$$

Aber die Bedingung der Vorzeichengleichheit ist, wie man an einfachen Zahlenbeispielen nachweist, für den ausgesprochenen Zweck nicht genügend; vielmehr haben noch anderweitige Voraussetzungen einzutreten. Dieselben fliessen aus der Darstellung

$$\Delta = (-\sqrt{\varrho} - \sqrt{\sigma} - \sqrt{\tau})(-\sqrt{\varrho} + \sqrt{\sigma} + \sqrt{\tau})$$
$$\cdot (\sqrt{\varrho} - \sqrt{\sigma} + \sqrt{\tau})(\sqrt{\varrho} + \sqrt{\sigma} - \sqrt{\tau}),$$

durch welche die Discriminante in ein Product von wesentlich reellen Factoren auseinander gelegt wird. Ersichtlichermassen müssen von den Grössen

$$-\sqrt{\varrho}+\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau},\quad \sqrt{\varrho}-\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau},\quad \sqrt{\varrho}+\sqrt{\sigma}-\sqrt{\tau}$$

entweder alle drei oder dürfte nur eine positiv sein. Die letztere Annahme würde aber zu Widersprüchen führen, da, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, von den drei Bedingungen

$$-a+b+c<0,\quad a-b+c<0,\quad a+b-c<0$$

nicht zwei gleichzeitig erfüllt sein können. Es bleibt also nur eine Möglichkeit übrig; dieselbe ist charakterisirt durch die drei Ungleichungen:

$$\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau}>\sqrt{\varrho},\quad \sqrt{\tau}+\sqrt{\varrho}>\sqrt{\sigma},\quad \sqrt{\varrho}+\sqrt{\sigma}>\sqrt{\tau}.$$

Das heisst also überhaupt:

Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass die auf ein eingeschriebenes Coordinatentetraëder bezogene Fläche zweiter Ordnung

$$ry_1y_2+sy_1y_3+ty_1y_4+r'y_3y_4+s'y_4y_2+t'y_2y_3=0$$

eine negative Discriminante besitze, besteht darin, dass erstens die Producte rr', ss', tt' gleiche Vorzeichen haben; und zweitens, wie man sich ausdrücken kann, darin, dass sich aus Längen, die mit den Quadratwurzeln aus den absoluten Werthen dieser Producte proportional sind, ein reales Dreieck construiren lasse.

Die möglichen Zeichencombinationen, welche die Coëfficienten in der Flächengleichung aufweisen können, gelangen, wenn man von Multiplicationen der Gleichung mit -1 absieht und Verschiedenheiten, die sich aus Vertauschungen unter den y erklären, gleichfalls als unwesentlich unterdrückt, in folgendem Schema zum Ausdruck:

	y_1y_2	y_1y_3	y_1y_4	y_3y_4	y_4y_2	y_2y_3
1)	+	+	+	+	+	+
2)	+	+	−	+	+	−
3)	+	+	+	−	−	−

Ueberhaupt aber können, wenn die Quadrate der Veränderlichen in Wegfall gebracht werden sollen, reelle lineare Transformationen eine quaternäre quadratische Form von negativer Discriminante nur auf die eine oder andere von 16 im voraus bestimmten Vorzeichenverbindungen in den einzelnen Gliedern führen. In diesem Verhalten lässt sich für den in Rede stehenden Fall eine gewisse Verwandtschaft mit dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen erkennen.

§ 2.

Identitäten.

Behält man die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei und setzt zur Abkürzung

$$-\sqrt{\varrho}-\sqrt{\sigma}-\sqrt{\tau}=P,$$
$$-\sqrt{\varrho}+\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau}=R,$$
$$\sqrt{\varrho}-\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau}=S,$$
$$\sqrt{\varrho}+\sqrt{\sigma}-\sqrt{\tau}=T,$$

so ist

$$\Delta=PRST,$$

und es haben für unsere Untersuchung die Ausdrücke $-P, R, S, T$ wesentlich die Bedeutung von *positiven reellen* Grössen. Dieselben gehorchen einer namhaften Zahl einfacher Relationen, von denen einige, des folgenden halber, erwähnt sein mögen.

Man hat

$$-(P+R)=S+T=2\sqrt{\varrho}, \qquad -(P+S)=T+R=2\sqrt{\sigma},$$
$$-(P+T)=R+S=2\sqrt{\tau};$$

$$R-P=2(\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau}), \qquad S-P=2(\sqrt{\tau}+\sqrt{\varrho}),$$
$$T-P=2(\sqrt{\varrho}+\sqrt{\sigma}),$$

$$T-S=2(\sqrt{\sigma}-\sqrt{\tau}), \qquad R-T=2(\sqrt{\tau}-\sqrt{\varrho}),$$
$$S-R=2(\sqrt{\varrho}-\sqrt{\sigma});$$

$$P+R+S+T=0;$$

$$PR=\quad \varrho-\sigma-\tau-2\sqrt{\sigma\tau}, \qquad ST=\quad \varrho-\sigma-\tau+2\sqrt{\sigma\tau},$$
$$PS=-\varrho+\sigma-\tau-2\sqrt{\tau\varrho}, \qquad TR=-\varrho+\sigma-\tau+2\sqrt{\tau\varrho},$$
$$PT=-\varrho-\sigma+\tau-2\sqrt{\varrho\sigma}, \qquad RS=-\varrho-\sigma+\tau+2\sqrt{\varrho\sigma};$$

$$PR+PS+PT+ST+TR+RS=-2(\varrho+\sigma+\tau);$$

$$PRS+PRT+PST+RST=-8\sqrt{\varrho\sigma\tau}.$$

Endlich, wenn

$$\Delta=-\delta^2$$

gesetzt wird,

$$(\sqrt{PR}\pm\sqrt{ST})^2=2(\varrho-\sigma-\tau\pm\delta i),$$
$$(\sqrt{PS}\pm\sqrt{TR})^2=2(-\varrho+\sigma-\tau\pm\delta i),$$
$$(\sqrt{PT}\pm\sqrt{RS})^2=2(-\varrho-\sigma+\tau\pm\delta i).$$

Die vier Zahlen P, R, S, T mag man als die bekannten Wurzeln der Gleichung

$$z^4 - 2(\varrho + \sigma + \tau) z^2 + 8\sqrt{\varrho\sigma\tau}\, z + \Delta = 0$$

auffassen.

§ 3.

Das Doppelverhältniss.

Die sechs zusammengehörigen Zahlwerthe

$$\lambda,\quad 1-\lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad \frac{\lambda-1}{\lambda},\quad \frac{1}{1-\lambda},\quad \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

eines Doppelverhältnisses stehen — abgesehen von ihrer zufälligen Anordnung — in der gleichen Beziehung zu einander wie die sechs trigonometrischen Functionen

$$(\cos\omega)^2,\quad (\sin\omega)^2,\quad (\mathrm{cosec}\,\omega)^2,\quad (\sec\omega)^2,\quad -(\mathrm{cotg}\,\omega)^2,\quad -(\mathrm{tg}\,\omega)^2.$$

Für den Fall, dass es sich um reelle Zahlen, also beispielsweise um das Doppelverhältniss von vier reellen Puncten einer Gerade handelt, existiren auch reelle Winkel ω, welche die Gleichheit zwischen jenen beiden Systemen von Functionen herstellen. Sie werden auf Grund des folgenden Satzes gefunden:

Man projicire die Puncte a, b, c, d einer Gerade aus dem einen oder anderen der beiden reellen Puncte der Constructionsebene, von welchen aus jene vier Puncte zweimal paarweise in Abständen erscheinen, die unter rechten Winkeln gesehen werden. Die Projectionsstrahlen schliessen im Projectionscentrum Winkel ein, welche, sofern sie nicht Multipla von $\frac{\pi}{2}$ sind, sich unter der gemeinsamen Form

$$\omega = n\frac{\pi}{2} \pm \varphi$$

darstellen, vorausgesetzt, dass φ irgend einen dieser Winkel und n eine beliebige Ganzzahl bedeutet. Diese Winkel ω haben ausnahmslos — und die Gesammtheit derselben ausschliesslich — die Eigenschaft, dass ihre trigonometrischen Functionen

$$(\cos\omega)^2,\quad (\sin\omega)^2,\quad (\mathrm{cosec}\,\omega)^2,\quad (\sec\omega)^2,\quad -(\mathrm{cotg}\,\omega)^2,\quad -(\mathrm{tg}\,\omega)^2$$

die sechs Werthe des Doppelverhältnisses der Puncte a, b, c, d repräsentiren.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich in einfacher Weise erbringen. Zunächst sind, wenn es sich um reelle Vorkommnisse handelt, immer zwei zu Eins sich ergänzende Werthe des Doppelverhältnisses vorhanden, die wesentlich positiv und < 1 sind. Identificirt man diese mit λ und $1-\lambda$, so wird sowohl der Gleichung $(\cos\omega)^2 = \lambda$ als auch

der Gleichung $(\cos\omega)^2 = 1 - \lambda$ (und *nur* diesen im Gegensatz zu den Gleichungen $(\cos\omega)^2 = \frac{1}{\lambda}$ etc.) durch reelle Winkel ω genügt. Und die Gesammtheit dieser Winkel ist thatsächlich in der Form $n\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ enthalten, wenn φ irgend einer von ihnen ist. Ferner: die gegebenen Puncte mögen in der Reihenfolge $a\,b\,c\,d$ auf ihrem geradlinigen Träger vertheilt liegen. Das in unserem Satze erwähnte Projectionscentrum heisse p; es ist einer der Schnittpuncte der beiden Kreise, welche beziehlich die Strecken ac und bd zu Durchmessern haben. Projicirt man a, b, c, d von p aus auf eine zu pd parallele Gerade L in die Puncte a', b', c', ∞, so gehen die Doppelverhältnisse in einfache Verhältnisse über; und wenn man unter $(a\,b\,c\,d)$ speciell den Quotienten $\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db}$ versteht, so sind es im vorliegenden Falle die beiden Werthe

$$(bcad) = \frac{a'b'}{a'c'}, \qquad (bacd) = \frac{c'b'}{c'a'},$$

welche zwischen Null und Eins liegen. Für jeden der Winkel φ, die der Projectionsstrahl pa mit L bildet, besteht aber die leicht erweisliche Relation

$$(\cos\varphi)^2 = \frac{a'b'}{a'c'}$$

und für jeden der Winkel φ', welche von pc und L eingeschlossen werden, die Gleichung

$$(\cos\varphi')^2 = \frac{c'b'}{c'a'}.$$

Es sind also φ, φ' Winkel, welche das gestellte Problem lösen; und da dieselben in p unverändert wieder zum Vorschein kommen und weiterhin überhaupt dort die Winkel $n\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ begründen, so besteht das behauptete Theorem zu Recht.

Will man die Beschränkung auf das reelle fallen lassen, so kann man gleichzeitig zu projectivischer Allgemeinheit aufsteigen und die beiden imaginären Kreispuncte durch einen beliebigen Fundamentalkegelschnitt ersetzen. Der Ausspruch des soeben bewiesenen Satzes braucht alsdann formell kaum irgendwie abgeändert zu werden, und nur die Bedeutung der in ihm als Constructionsmittel auftretenden Kreise und Winkel ist in entsprechender Weise zu erweitern*).

Auch die Uebertragung der reellen Construction auf die Fläche zweiter Ordnung vollzieht sich bequem, sobald man sich von den

---

*) Vgl. F. Klein, „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie." Bd. IV der vorliegenden Annalen p. 573.

projectivischen Eigenschaften der stereographischen Abbildung leiten lässt. Die Fundamentalpuncte der Bildebene sind die beiden imaginären Kreispuncte, und desshalb ebene Schnitte der Fläche die Bilder von Kreisen der Ebene. Der projectivisch aufgefasste Winkel, den zwei von einem gemeinsamen Flächenpunct A ausgehende Fortschreitungsrichtungen α, α' der Fläche mit einander einschliessen, bildet sich ab in den metrisch definirten Winkel der entsprechenden Fortschreitungsrichtungen der Bildebene. Denn das Doppelverhältniss, welches α, α' mit den beiden sich in A begegnenden (imaginären) Erzeugenden e, ε der Fläche eingehen, kehrt unverändert in dem Doppelverhältniss der correspondirenden Fortschreitungsrichtungen der Ebene wieder; von diesen sind aber zwei die imaginären Geraden, welche den zu A gehörigen Bildpunct mit den beiden imaginären Kreispuncten verbinden. Liegen α, α' harmonisch gegen e, ε, so ist das Bild des von ihnen erzeugten Winkels ein rechter Winkel im gewöhnlichen Sinne des Worts. So beispielsweise, wenn die Schnittlinie zweier polar conjugirten Ebenen die Fläche in zwei reellen Puncten A, C trifft, nach seiner Projection der Winkel der beiden Richtungen, längs welcher die Ebenen die Fläche in dem einen oder anderen dieser Puncte durchsetzen. Die Bilder der Schnittcurven werden hier im allgemeinen zwei sich unter rechten Winkeln schneidende Kreise; geht die eine der conjugirten Ebenen durch das Projectionscentrum K, so projicirt sich die Schnittcurve der anderen in einen Kreis, der die Bildpuncte a, c von A, C zu Endpuncten eines Durchmessers hat. Endlich: eine Transformation durch reciproke Radien*) ändert das Doppelverhältniss von vier complexen Puncten der Ebene nicht. Liegen diese vier Puncte auf einem Kreise, so kann man auf demselben auch das Inversionscentrum der Transformation annehmen; die Peripherie wird dadurch in eine Gerade gestreckt, und das Doppelverhältniss der ursprünglichen vier Puncte kommt in dem Doppelverhältniss von vier Puncten dieser letzteren wieder zum Vorschein. Für den Raum bedeutet das, dass man vier Puncte eines beliebigen Kegelschnitts der Fläche auf unendlich viele Weisen in vier Puncte eines durch K gehenden ebenen Schnittes überführen kann, so dass das reelle Doppelverhältniss derselben erhalten bleibt. — Die Construction des Winkels ω auf der Fläche ist hiernach unschwer zu leisten:

Sind A', B', C', D' vier Puncte eines beliebigen ebenen Schnitts der Fläche, so verbinde man einen Kreispunct K dieser letzteren mit

---

*) Richtiger die Umformung

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy},$$

die zu jener Transformation noch eine Spiegelung an der Axe der reellen Zahlen hinzufügt.

irgend einem Punct L jenes Schnitts durch eine Raumgerade und projicire durch den Ebenenbüschel, der KL zur Axe hat, die gegebenen Puncte in die Puncte A, B, C, D eines durch K gehenden, übrigens beliebigen Kegelschnitts der Fläche. Die Gerade, welche sich von dem im Innern des Kegelschnitts liegenden Diagonalpunct des Vierseits ABCD nach dem Pol ziehen lässt, der der Ebene dieses Vierseits durch die Fläche zugeordnet ist, schneidet die Fläche in reellen Puncten P, P'. Projicirt man A, B, C, D durch Ebenen eines Büschels, dessen Axe einen dieser Puncte, etwa P, mit K verbindet, so schneiden sich diese Ebenen längs der Fläche in P nach projectivisch verallgemeinerten, in K nach metrischen Winkeln, die jenen gleich sind. Unter denselben treten rechte Winkel mit auf; nach Ausscheidung ihrer bleiben nur solche zurück, die hinsichtlich des Doppelverhältnisses der Puncte A', B', C', D' oder A, B, C, D an den Eigenschaften Theil haben, welche durch den letztbewiesenen Satz den Winkeln ω mit Bezug auf die Puncte a, b, c, d zugesprochen wurden.

Sind a, b, c, d *beliebige* Puncte der Fläche, und dienen sie in der erörterten Weise der Repräsentation von complexen Zahlwerthen, so besteht für ihr Doppelverhältniss (das nun nicht mehr reell ist), die Relation („Studien" p. 4)

$$(abcd) = \frac{\sin (AC)_d}{\sin (BC)_d}\, e^{-i(AB)_d},$$

in welcher A, B, C beziehlich die Ebenen vorstellen, die durch die Puncte b, c, d; c, d, a; d, a, b festgelegt werden, und in welcher unter $(AC)_d$, $(BC)_d$, $(AB)_d$ die projectivischen Winkel verstanden sind, unter denen sich die Ebenenpaare A, C; B, C; A, B auf der zu Grunde gelegten Fläche im Puncte d begegnen.

Vermöge der Gleichung

$$\cos\psi = \frac{(a'b'c'u)\,(a'b'c'v)}{\sqrt{(a'b'c'u)^2\,(d'e'f'v)^2}},$$

welche derartige Winkel definirt*), wenn die als Fundamentalfläche einer projectivischen Maassbestimmung gedachte darstellende Fläche die Gleichung

$$a_y'^2 = 0 = b_y'^2 = c_y'^2 = d_y'^2 = e_y'^2 = f_y'^2$$

hat, und wenn die schneidenden Ebenen durch ihre Coordinaten $u_1\,u_2\,u_3\,u_4$, $v_1\,v_2\,v_3\,v_4$ gegeben sind, lässt sich jener Ausdruck so umformen, dass seine Invarianz auch analytisch zu Tage tritt. Setzt

---

*) Cayley, „A sixth Memoir upon Quantics"; Philos. Transactions Vol. 149 p. 86. London 1859.

man wie vorher die Doppelverhältnisse $= \lambda,\ 1-\lambda, \cdots$, so findet man („Studien" p. 9, wo nur die Bezeichnung eine abweichende ist):

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{\varrho+\sigma-\tau+\delta i}{2\varrho}, \qquad \lambda_1' = 1-\lambda = \frac{\varrho-\sigma+\tau-\delta i}{2\varrho},$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{-\varrho+\sigma+\tau+\delta i}{2\sigma}, \qquad \lambda_2' = \frac{1}{\lambda} = \frac{\varrho+\sigma-\tau-\delta i}{2\sigma},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\varrho-\sigma+\tau+\delta i}{2\tau}, \qquad \lambda_3' = \frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{-\varrho+\sigma+\tau-\delta i}{2\tau}.$$

Auf Grund der Identitäten, die in § 2. aufgestellt wurden, lässt sich aber diesen Brüchen die Gestalt ertheilen:

$$\lambda_1 = \left(\frac{\sqrt{-PT}-i\sqrt{RS}}{P+R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{-PT}-i\sqrt{RS}}{T+S}\right)^2,$$

$$\lambda_1' = \left(\frac{\sqrt{-PS}+i\sqrt{RT}}{P+R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{-PS}+i\sqrt{RT}}{S+T}\right)^2,$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{\sqrt{-PR}-i\sqrt{ST}}{P+S}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{-PR}-i\sqrt{ST}}{R+T}\right)^2,$$

$$\lambda_2' = \left(\frac{\sqrt{-PT}+i\sqrt{SR}}{P+S}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{-PT}+i\sqrt{SR}}{T+R}\right)^2,$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{\sqrt{-PS}-i\sqrt{TR}}{P+T}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{-PS}-i\sqrt{TR}}{S+R}\right)^2,$$

$$\lambda_3' = \left(\frac{\sqrt{-PR}+i\sqrt{TS}}{P+T}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{-PR}+i\sqrt{TS}}{R+S}\right)^2.$$

Gestattet man daher dem Winkel ω der letzten Theoreme, auch complexe Zahlwerthe anzunehmen, so ist nunmehr ein Satz bewiesen, der folgendermaassen formulirt werden kann:

Auf einer reellen, nicht geradlinigen Fläche $a_x^2 = 0 = b_x^2 = \cdots$ *mögen vier Puncte* $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \vartheta$ *die Darstellung gegebener complexen Zahlen vermitteln. Man bilde die Ausdrücke*

$$r = a_\xi a_\eta,\quad r' = a_\zeta a_\vartheta,\quad s = a_\xi a_\zeta,\quad s' = a_\vartheta a_\eta,\quad t = a_\xi a_\vartheta,\quad t' = a_\eta a_\zeta$$

und mit Hülfe ihrer die biquadratische Gleichung

$$z^4 - 2(rr' + ss' + tt')\,z^2 + 8\sqrt{rr'ss'tt'}\,z + \Delta = 0,$$

in welcher Δ *die Discriminante der Fläche bedeutet. Unter Benutzung der von vorn herein bekannten Wurzeln* $P,\ R,\ S,\ T$ *dieser Gleichung bestimme man einen Winkel* ω *so, dass irgend eine der Functionen*

$$\cos\omega,\quad \sin\omega,\quad \operatorname{cosec}\omega,\quad \sec\omega,\quad i\operatorname{cotg}\omega,\quad i\operatorname{tg}\omega$$

irgend einem der Ausdrücke

$$\pm\frac{\sqrt{-PR}-i\sqrt{ST}}{R+T},\qquad \pm\frac{\sqrt{-PS}-i\sqrt{TR}}{S+R},\qquad \pm\frac{\sqrt{-PT}-i\sqrt{RS}}{T+S},$$

$$\pm\frac{\sqrt{-PR}+i\sqrt{ST}}{R+S},\qquad \pm\frac{\sqrt{-PS}+i\sqrt{TR}}{S+T},\qquad \pm\frac{\sqrt{-PT}+i\sqrt{RS}}{T+R}$$

gleich wird. Jeder so ermittelte Winkel hat die Eigenschaft, dass die Quadrate der soeben genannten sechs trigonometrischen Functionen desselben genau die sechs Doppelverhältnisswerthe liefern, zu denen die angenommenen vier Puncte Anlass geben.

Der Winkel ω, welcher die Gleichung befriedigt

$$\cos\omega = \alpha + \beta i,$$

lässt sich, wenn

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\beta^2 - \alpha^2) + 1 = w$$

gesetzt wird, auf die Form bringen:

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos(\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{w}) + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos(\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{w}),$$

in welcher der erste Winkel wesentlich reell, der zweite wesentlich imaginär ist. Jenen mag man auf den ersten Quadranten einschränken; dann ist, damit die gewollte Gleichung vorzeichenrichtig bestehe, dieser aus einer Gesammtheit von Winkeln $n\pi \pm \vartheta i$ so zu wählen, dass sein Cosinus das Vorzeichen von α, sein Sinus das entgegengesetzte Vorzeichen von β erhält.

Will man den imaginären Arcus cosinus in der üblichen Weise durch einen Logarithmus ersetzen, so mag man die Relation

$$\operatorname{arc} \cos \vartheta = 2i \log\left(\pm\sqrt{\frac{\vartheta+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\vartheta-1}{2}}\right)$$

zur Anwendung bringen, und mag man ferner die vorgeschriebene Gleichung in der Gestalt

$$\cos\omega = e\alpha + e'\beta i$$

behandeln, wo α, β absolute Zahlwerthe und e, e' unabhängig von einander $+1$ oder -1 bedeuten. Dieser Gleichung wird dann beispielsweise durch den Winkel

$$\omega = \operatorname{arc} \cos e \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1 - \sqrt{w}}{2}}$$

$$+ i \log\left\{\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1 + \sqrt{w}}{2}} - e' \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \sqrt{w}}{2}}\right\}$$

genügt, sobald nunmehr der einzige noch vorhandene Arcus cosinus in seiner Beweglichkeit auf den ersten und zweiten Winkelquadranten eingeschränkt wird.

Macht man von diesen Bemerkungen eine Anwendung, indem man etwa $(\cos\omega)^2$ der Reihe nach den sechs Doppelverhältnisswerthen, die eben in Frage stehen, gleich setzt, so findet man, mit der Maassgabe, dass $\varepsilon = \pm 1$, im einen Falle die sechs Werthe

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\arc\cos\varepsilon\frac{\sqrt{\sigma}-\sqrt{\tau}}{\sqrt{\varrho}} + \arc\cos\frac{\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau}}{\sqrt{\varrho}}\right\},$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\arc\cos\varepsilon\frac{\sqrt{\tau}-\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\sigma}} + \arc\cos\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\sigma}}\right\},$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\arc\cos\varepsilon\frac{\sqrt{\varrho}-\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\tau}} + \arc\cos\frac{\sqrt{\varrho}+\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\tau}}\right\};$$

im anderen auf bestimmtere Weise — so nämlich, dass das Vorzeichen ε unzweideutig an das Vorzeichen der Quadratwurzel aus dem jeweiligen Doppelverhältniss gebunden erscheint — die Formeln:

$$\omega_1 = \arc\cos\varepsilon\sqrt{\frac{S}{2\sqrt{\varrho}}} + i\log\left\{\sqrt{\frac{-P}{2\sqrt{\varrho}}} - \varepsilon\sqrt{\frac{R}{2\sqrt{\varrho}}}\right\},$$

$$\omega_2 = \arc\cos\varepsilon\sqrt{\frac{T}{2\sqrt{\varrho}}} + i\log\left\{\sqrt{\frac{-P}{2\sqrt{\varrho}}} + \varepsilon\sqrt{\frac{R}{2\sqrt{\varrho}}}\right\},$$

nebst denen, welche aus diesen durch ein gleichzeitiges cyklisches Vorrücken der R, S, T einerseits und der ϱ, σ, τ andererseits hervorgehen. Diese letzteren Winkel mögen ω_3 bis ω_6 heissen und zwar ω_1, ω_3, ω_5 und ebenso ω_2, ω_4, ω_6 je für sich einen Cykel bilden.

Statt die sechs Doppelverhältnisswerthe durch die sechs in dem letzten Satze näher bezeichneten trigonometrischen Functionen von einem dieser Argumente auszudrücken, kann man sie auch durch *eine* jener Functionen darstellen, wenn man diese nach einander von den soeben ermittelten sechs Winkeln abhängig macht.

Die Doppelverhältnisse und die zugehörigen Winkel ω fallen reell aus unter Voraussetzungen, die sämmtlich in der Forderung zusammentreffen, dass Δ verschwinden muss. Das aber wird dadurch bedingt, dass

$$(\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta) = 0$$

wird, dass also die vier Puncte ξ, η, ζ, ϑ in einer Ebene liegen. Dies Ergebniss liess sich vorhersagen, da, wie oben bemerkt wurde, ebene Schnitte der Fläche sich stereographisch in Kreise der Ebene abbilden, und vier Puncte eines Kreises thatsächlich reelles Doppelverhältniss besitzen.

§ 4.

Beispiele.

1. *Das Doppelverhältniss der Verschwindungswerthe einer auf der Kugel dargestellten binären biquadratischen Form.*

Legt man der Darstellung an Stelle der allgemeinen Fläche zweiter

Ordnung die Kugel zu Grunde, so können *) die vier Wurzelpuncte einer binären, biquadratischen Form durch vier Flächenpuncte zur Anschauung gebracht werden, deren Coordinaten ($\xi_1 = a$, $\xi_2 = b$ etc.) der Tabelle

	1	2	3	4
ξ	a	b	c	-1
η	a	$-b$	$-c$	-1
ζ	$-a$	b	$-c$	-1
ϑ	$-a$	$-b$	c	-1

zu entnehmen sind, wenn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ die Gleichung der Kugel in einem rechtwinkligen Coordinatensystem vorstellt. Giebt man dem Radius den Werth $\frac{1}{2}$, um den Einheitskreis der die Kugel tangirenden Bildebene in den Aequator der Fläche abzubilden, so wird, wegen $4(a^2+b^2+c^2) = 1$ („Studien" p. 8),

$$a_\xi a_\eta = -2^3(b^2+c^2) = a_\zeta a_\vartheta, \quad a_\xi a_\zeta = -2^3(c^2+a^2) = a_\vartheta a_\eta,$$
$$a_\xi a_\vartheta = -2^3(a^2+b^2) = a_\eta a_\zeta$$

und damit

$$(b^2+c^2)(y_1y_2+y_3y_4) + (c^2+a^2)(y_1y_3+y_4y_2) + (a^2+b^2)(y_1y_4+y_2y_3) = 0$$

die transformirte Gleichung der Kugel.

Die Werthe $\sqrt{\varrho}$, $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{\tau}$ der allgemeinen Untersuchung specialisiren sich zu

$$\sqrt{\varrho} = 2^3(b^2+c^2), \quad \sqrt{\sigma} = 2^3(c^2+a^2), \quad \sqrt{\tau} = 2^3(a^2+b^2),$$

und gleichzeitig wird

$$R = 2^4a^2, \quad S = 2^4b^2, \quad T = 2^4c^2, \quad P = -4.$$

Mit diesen Werthen gewinnen die das Doppelverhältniss beherrschenden Winkel die Gestalten

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\text{arc cos } \varepsilon\,\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} + \text{arc cos } \frac{1+4a^2}{1-4a^2}\right\},$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\text{arc cos } \varepsilon\,\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} + \text{arc cos } \frac{1+4b^2}{1-4b^2}\right\},$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\text{arc cos } \varepsilon\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \text{arc cos } \frac{1+4c^2}{1-4c^2}\right\},$$

oder auch die Formen

---

*) Klein, „Vergleichende Betrachtungen etc.", p. 48. Derselbe, „Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst", Math. Annalen Bd. IX, p. 183.

$$\omega_1 = \text{arc cos}\,\varepsilon\,\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{i}{2}\log\frac{1-2a\varepsilon}{1+2a\varepsilon},$$

$$\omega_2 = \text{arc cos}\,\varepsilon\,\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} - \frac{i}{2}\log\frac{1-2a\varepsilon}{1+2a\varepsilon},$$

mit entsprechenden Gleichungen für die Winkel ω_3 bis ω_6. Die sechs Werthe des Doppelverhältnisses unserer vier Puncte ergeben sich vermöge der trigonometrischen Functionen $(\cos\omega)^2$ zu

$$\left(\frac{b+2cai}{2(b^2+c^2)}\right)^2, \left(\frac{c-2abi}{2(b^2+c^2)}\right)^2, \left(\frac{c+2abi}{2(c^2+a^2)}\right)^2, \left(\frac{a-2bci}{2(c^2+a^2)}\right)^2, \left(\frac{a+2bci}{2(a^2+b^2)}\right)^2, \left(\frac{b-2cai}{2(a^2+b^2)}\right)^2,$$

wie denn schon früher (Math. Annalen Bd. IX, p. 216; „Studien“ p. 8) anderweitige Ableitungen zu dem gleichen Ergebniss führten.

2. *Der Modul des elliptischen Integrals.*

Der Modul k des elliptischen Integrals $\int\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ hat, wenn man ihn der Legendre'schen Normalform $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ dieses letzteren entnimmt, in Function des Doppelverhältnisses λ der vier Wurzeln der Gleichung $R(x)=0$ den leicht zu verificirenden Werth*):

$$k = \frac{1-\varepsilon\sqrt{\lambda}}{1+\varepsilon\sqrt{\lambda}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Für $\lambda = (\cos\omega)^2$, $= (\sin\omega)^2$, etc., und wenn unter ν eine beliebige Ganzzahl verstanden wird, resultiren hiernach die Darstellungen

$$\sqrt{k} = i^\nu\,\text{tg}\,\frac{\omega}{2},\ = i^\nu\,\text{cotg}\,\frac{\omega}{2},\ = i^\nu\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right),$$
$$= i^\nu\,\text{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right),\ = i^\nu e^{\pm\omega i}.$$

Auf Grund der Relationen $\cos\omega = \pm\frac{\sqrt{-PR}-i\sqrt{ST}}{R+T}$ etc. lassen sich dieselben des weiteren umsetzen in:

$$\sqrt{k} = i^\nu\,\frac{\sqrt{S}-\varepsilon i\sqrt{T}}{\sqrt{-P}+\varepsilon\sqrt{R}},\ = i^\nu\,\frac{\sqrt{T}-\varepsilon i\sqrt{R}}{\sqrt{-P}+\varepsilon\sqrt{S}},\ = i^\nu\,\frac{\sqrt{R}-\varepsilon i\sqrt{S}}{\sqrt{-P}+\varepsilon\sqrt{T}}.$$

Auf der Kugel specialisirt sich dies Werthsystem (wenn übrigens

*) Man vergleiche über den Gegenstand und ihm verwandte Fragen ausser dem einschlägigen Citat der zweitfolgenden Anmerkung etwa:

Schellbach, „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen“; Abschn. XIII. — Durège, „Theorie der elliptischen Functionen“; Abschn. III. — Clebsch, „Theorie der binären algebraischen Formen“, p. 170, p. 228 f. — Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie“, Bd. I p. 603. — Cayley, „On the reduction of $\frac{du}{\sqrt{U}}$, when U is a function of the fourth order“; Cambridge and Dublin mathematical journal, Vol. I pag. 70 (wo zuerst auf die analytische Form des Zusammenhanges zwischen Modul und absoluter Invariante hingewiesen wird). — F. Müller, „Beziehungen zwischen dem Modul der elliptischen Functionen und den Invarianten der biquadratischen binären Form“; Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XVIII p. 280.

die Voraussetzungen des vorhergehenden Beispiels beibehalten werden) zu

$$\sqrt{k} = i^\nu \frac{2(b-\varepsilon ci)}{1+2\varepsilon a}, \quad = i^\nu \frac{2(c-\varepsilon ai)}{1+2\varepsilon b}, \quad = i^\nu \frac{2(a-\varepsilon bi)}{1+2\varepsilon c}.$$

Vermöge der stereographischen Projection findet aber beispielsweise die Zahl $\frac{2(a+bi)}{1-2c}$ auf der Kugel ihre Repräsentation gerade in dem Puncte, welcher a, b, c zu rechtwinkligen Coordinaten hat; und es lässt sich leicht verfolgen, dass die übrigen Zahlwerthe sich auf die Puncte vertheilen, die aus diesem durch die 24 linearen Transformationen hervorgehen, welche die Covariante sechsten Grades T von $R(x)$ in sich überführen*), d. h. durch die 24 Drehungen um den Kugelmittelpunct, welche das System der drei rechtwinkligen Coordinatenaxen mit sich zur Deckung bringen. Durch eben jene 24 Kugelpuncte wird also die Gesammtheit der Werthe von $\sqrt{k}$ vorgestellt**).

3. *Die Jacobi'sche Construction des Additionstheorems der elliptischen Functionen.*

Sind die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ reell, und liegen sie etwa auf einer Gerade gezeichnet vor, so lässt sich infolge der Relation $k = \left(\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right)^2$ eine dem Modul k entsprechende Länge planimetrisch construiren. Man lege zu dem Ende um den Punct p, welcher

---

*) Erörterungen, die sich mit den Einzelnheiten dieser Transformationen befassen, finden sich bei Puchta, „Das Oktaëder und die Gleichung vierten Grades"; Denkschriften d. math.-naturw. Cl. d. kaiserl. Akad. d. Wiss., Bd. 41. Wien 1879.

**) Die Formeln für die Interpretation von $\sqrt{k}$ auf der Kugel, die oben durch Specialisirung der Fläche zweiter Ordnung gewonnen wurden, sowie die auf ihnen beruhende Schlussnahme folgen auf anderem Wege gleich unmittelbar aus allgemeinen Sätzen, die von Herrn Klein bewiesen worden sind.

Ich hatte die geometrische Bedeutung der Zahlen $i^\nu \frac{2(b-\varepsilon ci)}{1+2\varepsilon a}$ etc. ausser Augen gelassen. Der genannte Autor, der die Güte hatte, mich an dieselbe zu erinnern, argumentirte zugleich, Zwecks einer Verification der angegebenen Werthe, vom Standpunct seiner eigenen Untersuchungen aus folgendermaassen:

Die Gleichung, welche $\sqrt{k}$ mit der absoluten Invariante verbindet, ist die Oktaëdergleichung (Math. Ann. Bd. XIV, p. 155). Jeder der 24 Wurzelpuncte, welche den sechs biquadratischen Grundformen zukommen, die — bei vorgeschriebenen quadratischen Covarianten — dieselbe absolute Invariante besitzen (Math. Ann. Bd. IX, p. 193), repräsentirt einen der 24 Werthe von $\sqrt{k}$. Deshalb muss thatsächlich, wie die stereographische Projection lehrt, die analytische Gestaltung der Quadratwurzel so erfolgen, wie sie sich in den Ausdrücken $\frac{2(b+ci)}{1-2a}$ u. s. f. ergiebt.

Umgekehrt könnte natürlich auch die Herleitung des Textes benutzt werden, um den geometrischen Charakter der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen Modul und absoluter Invariante von neuem zu erschliessen.

von den Winkeln ω in der oben (§ 3.) erörterten Weise umlagert wird, mit der beliebig gewählten Längeneinheit als Radius einen Kreis. Schneidet derselbe die Projectionsstrahlen pa, pb, pd in Punctepaaren a', a''; b', b''; d', d'', und liegen a', b', d' auf dem der Gerade $abcd$ zugewendeten Halbkreis, so lässt sich beispielsweise $a''pd'$ als Winkel ω in Anspruch nehmen. Man hat dann nur nöthig, $a''d''$ mit $b'b''$ zum Schnitt zu bringen und in dem Schnittpunct f eine Normale auf $a''d''$ zu errichten; trifft diese den Strahl $d'd''$ im Puncte g, so misst die Länge pg den Zahlwerth des Moduls k. Denn vermöge der geschilderten Construction ist $pg = \left(\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right)^2$.

Die von Jacobi *) gegebene Methode, nach welcher Addition und Multiplication der elliptischen Functionen mit Hülfe elementargeometrischer Constructionen ausgeführt werden, benutzt einen festen Kreis (vom Radius 1) und eine Schaar von inneren Kreisen, die mit diesem einen gemeinsamen Ort gleicher Tangenten besitzen. Die Lage dieser letzteren oder auch des der Schaar angehörigen Grenzpunctes hängt allein von dem Modul der betrachteten Function ab. Die Berechnung eines Hülfswinkels ϑ vermittelst der Substitution

$$k = \sin \vartheta$$

und eine geeignete Anlegung dieses Winkels an die gemeinsame Centrale jener Kreise ermöglicht es (Durège, l. c.), den Grenzpunct auf geometrischem Wege zu finden.

Die soeben angestellte Betrachtung setzt uns, da k constructionsmässig bekannt ist, in den Stand, auch ϑ geometrisch zu ermitteln; und die Jacobi'sche Construction kann also unter Vermeidung jedweder Rechnung vollzogen werden.

§ 5.

Die absolute Invariante.

Die Abhängigkeit der absoluten Invariante $\frac{i^3}{j^2}$ einer binären, biquadratischen Form von dem Doppelverhältniss λ ihrer Verschwindungswerthe ist gegeben**) durch die Gleichung:

$$\frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{(1+\lambda)^2(2-\lambda)^2(1-2\lambda)^2}.$$

*) „Ueber die Anwendung der elliptischen Transscendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie: Die Relation zwischen der Distanz der Mittelpuncte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmässigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist." Crelles Journal Bd. III, p. 376. — Dasselbe in Durège, „Theorie der elliptischen Functionen", Abschnitt XI; und in Cayley, „An elementary treatise on elliptic functions" p. 28.

**) Clebsch, „Binäre Formen" p. 170. — Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie", Bd. I p. 239.

Dieser Ausdruck lässt sich durch identische Umformungen auf eine Reihe verschiedener Gestalten bringen.

Unter Beibehaltung der in § 3. für die sechs Doppelverhältnisswerthe gebrauchten Bezeichnungen hat man

$$\frac{i^3}{j^2} = 24 \prod_{m=1,2,3} \frac{1-\lambda_m+\lambda_m^2}{(1+\lambda_m)^2} = 24 \prod_{m=1,2,3} \frac{1-\lambda_m+\lambda_m^2}{(2-\lambda_m)^2}$$
$$= 24 \prod_{m=1,2,3} \frac{1-\lambda_m+\lambda_m^2}{(1-2\lambda_m)^2},$$
$$= 24 \prod_{m=1,2,3} \frac{1-\lambda_m'+\lambda_m'^2}{(1+\lambda_m')^2} = 24 \prod_{m=1,2,3} \frac{1-\lambda_m'+\lambda_m'^2}{(2-\lambda_m')^2}$$
$$= 24 \prod_{m=1,2,3} \frac{1-\lambda_m'+\lambda_m'^2}{(1-2\lambda_m')^2}.$$

Setzt man statt dessen

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \lambda_3 = \mu_3,\ \lambda_1' = \mu_4,\ \lambda_2' = \mu_5,\ \lambda_3' = \mu_6,$$

so lassen sich folgende Darstellungen geben, in denen die Quadratwurzeln als absolute Zahlen gedacht sind:

$$\frac{i^3}{j^2} = -24 \prod_{n=1,..6} \frac{\sqrt{1-\mu_n+\mu_n^2}}{1+\mu_n} = -24 \prod_{n=1,..6} \frac{\sqrt{1-\mu_n+\mu_n^2}}{2-\mu_n}$$
$$= -24 \prod_{n=1,..6} \frac{\sqrt{1-\mu_n+\mu_n^2}}{1-2\mu_n}.$$

Diese Formeln bieten vor jenen den Vortheil, dass sie die absolute Invariante als eine symmetrische Function der zusammengehörigen sechs Doppelverhältnisswerthe erweisen und damit ihre Unabhängigkeit gegenüber Vertauschungen unter diesen letzteren augenfällig machen. Die Irrationalität der mitgetheilten Ausdrücke ist nur eine scheinbare, da die sechs Functionen $1 - \mu_n + \mu_n^2$ dreimal paarweise einander gleich sind.

Führt man einen der Winkel ω ein, für welche

$$(\cos\omega)^2 = \lambda,$$

so resultirt

$$\frac{i^3}{j^2} = 6\,\frac{(7+\cos 4\omega)^3}{(17-\cos 4\omega)^2\,(1+\cos 4\omega)},$$

oder, wenn man die Winkel ω_1 bis ω_6 benutzt, welche in § 3. aufgestellt wurden:

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{3}{8}\,\frac{(7+\cos 4\omega_1)(7+\cos 4\omega_3)(7+\cos 4\omega_5)}{(1+\cos 4\omega_1)(1+\cos 4\omega_3)(1+\cos 4\omega_5)}$$

und

$$= \frac{3}{8}\,\frac{(7+\cos 4\omega_2)(7+\cos 4\omega_4)(7+\cos 4\omega_6)}{(1+\cos 4\omega_2)(1+\cos 4\omega_4)(1+\cos 4\omega_6)}.$$

Aus der ersten dieser drei trigonometrischen Formeln erfährt man, dass

$$\omega = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \omega = i \log\left(\sqrt{2} \pm 1\right)$$

die Winkel sind, für welche sich die Wurzelpuncte der betrachteten Grundform in harmonischer Lage befinden; und dass die äquianharmonische Lage den Winkeln

$$\omega = \frac{\pi}{4} + i \log\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

entspricht*).

Man kann endlich noch $\frac{i^3}{j^2}$ in seiner Abhängigkeit von den räumlichen Invarianten Δ, ϱ, σ, τ darstellen.

Es ist beispielsweise

$$\frac{1-\lambda_1+\lambda_1^2}{(1-2\lambda_1)^2} = \frac{\Delta+\varrho(\varrho+\sigma+\tau)+(\sigma-\tau)\sqrt{\Delta}}{2(\sigma-\tau+\sqrt{\Delta})^2},$$

$$\frac{1-\lambda_2+\lambda_2^2}{(1-2\lambda_2)^2} = \frac{\Delta+\sigma(\varrho+\sigma+\tau)+(\tau-\varrho)\sqrt{\Delta}}{2(\tau-\varrho+\sqrt{\Delta})^2},$$

$$\frac{1-\lambda_3+\lambda_3^2}{(1-2\lambda_3)^2} = \frac{\Delta+\tau(\varrho+\sigma+\tau)+(\varrho-\sigma)\sqrt{\Delta}}{2(\varrho-\sigma+\sqrt{\Delta})^2}.$$

Unsere absolute Invariante, als das Product dieser drei Grössen, drückt sich deshalb symmetrisch durch ϱ, σ, τ aus, nur dass die übrigbleibende Irrationalität $\sqrt{\Delta}$ in Zähler und Nenner alternirende Functionen zu Coëfficienten bekommt.

Bezeichnet also

$$w^3 - lw^2 + mw - n = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln ϱ, σ, τ sind (es scheint bequem, diese Gleichung in *nicht* homogener Form anzusetzen, wie das auch oben schon mit der Gleichung vierten Grades in z geschah), so wird es möglich sein, $\frac{i^3}{j^2}$ grossentheils rational durch die invarianten Coëfficienten l, m, n zu berechnen.

Man findet:

$$\frac{i^3}{j^2} = 6\,\frac{27n^2+(m\sqrt{\Delta}-\sqrt{\nabla})^2}{(m\sqrt{\Delta}-\sqrt{\nabla})^2};$$

dabei ist unter ∇ die Discriminante der soeben aufgestellten cubischen Gleichung verstanden; oder ist genauer, um über den Zahlencoëfficienten keine Zweifel bestehen zu lassen,

$$\nabla = (\sigma-\tau)^2\,(\tau-\varrho)^2\,(\varrho-\sigma)^2$$

*) Die harmonische Lage ist überhaupt durch die Bedingung $j = 0$, die äquianharmonische durch $i = 0$ gekennzeichnet. Clebsch, „Binäre Formen“ p. 171.

gesetzt. Das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta}$ oder vielleicht besser von $i\sqrt{-\Delta}$ ist absolut zu nehmen, das Vorzeichen von $\sqrt{\nabla}$ mit dem des Zahlwerths $(\sigma-\tau)(\tau-\varrho)(\varrho-\sigma)$ in Einklang zu bringen*).

In der Gestalt einer complexen Zahl im gewöhnlichen Sinne hat man:

$$\frac{i^3}{j^2}=6\left\{1+27\,n^2\,\frac{\nabla+m^2\Delta+2mi\sqrt{-\Delta\nabla}}{(\nabla-m^2\Delta)^2}\right\}.$$

Zum Schluss mögen an der hiernach gewonnenen Form wiederum die Bedingungen harmonischer und äquianharmonischer Lage auf die Einkleidung geprüft werden, die ihnen gegenwärtig zukommt.

a) Harmonische Lage.

Der Nenner $m\sqrt{\Delta}-\sqrt{\nabla}$ der absoluten Invariante hat zu verschwinden; und da ∇ von $m^2\Delta$ und m von Null verschieden ist, so zerfällt diese Forderung in die beiden Gleichungen

$$\Delta=0,\quad \nabla=0.$$

D. h. *Die Bedingung dafür, dass die durch vier Puncte* $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ *auf der Fläche zweiter Ordnung* $a_x{}^2=0=b_x{}^2$ *zur Anschauung gebrachten Wurzelwerthe einer binären biquadratischen Form harmonisch conjugirt seien, findet ihren adäquaten Ausdruck in dem gleichzeitigen Verschwinden der beiden Invarianten* Δ *und* ∇, *von denen die erstere die Discriminante der Fläche, die letztere die Discriminante der binären cubischen Gleichung bedeutet, welche die Invarianten*

$$a_\xi a_\eta\cdot b_\zeta b_\vartheta,\quad a_\xi a_\zeta\cdot b_\vartheta b_\eta,\quad a_\xi a_\vartheta\cdot b_\eta b_\zeta$$

zu Wurzeln hat.

Die geometrische Bedeutung dieser Forderungen ist die bekannte, dass z. B. die Verbindungslinie der Puncte c, d gleichzeitig die Gerade ab und deren conjugirte Polare mit Bezug auf die Fundamentalfläche zu schneiden hat, wenn c, d mit Bezug auf a, b harmonisch zugeordnet sein sollen. Denn die Gleichung $\Delta=0$ schreibt den Puncten a, b, c, d (oder $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ der analytischen Darstellung) vor, in einer Ebene zu liegen; und die Bedingung $\nabla=0$ hat den Inhalt, dass die eine oder die andere der Gleichungen

$$\sigma-\tau=0,\quad \tau-\varrho=0,\quad \varrho-\sigma=0$$

---

*) In der Form

$$J-1=\frac{27\,g_3{}^2}{g_2{}^3-27\,g_3{}^2},$$

welche an anderen Orten benutzt wird (Math. Ann. Bd. XIV, p. 112), gestaltet sich die absolute Invariante noch übersichtlicher. Sie erhält auf Grund der Zusammenhänge

$$g_2=\frac{i}{2},\quad g_3=\frac{j}{6}$$

den Werth

$$J-1=\frac{1}{3}\left(\frac{m\sqrt{\Delta}-\sqrt{\nabla}}{3n}\right)^2.$$

befriedigt sein muss, und eben die erste von diesen Relationen, die vollständig lautet

$$a_\xi a_\zeta \cdot b_\vartheta b_\eta - a_\xi a_\vartheta \cdot b_\eta b_\zeta = 0\,,$$

zwingt, wie man leicht sieht, die Gerade, welche die Puncte ζ, ϑ verbindet, die conjugirte Polare der Verbindungslinie der Puncte ξ, η zu schneiden.

b) Aequianharmonische Lage.

Da gegenwärtig der Zähler zu Null werden muss, so ergiebt sich, wenn man auf diejenige Darstellung von $\frac{i^3}{j^2}$ zurückgeht, aus der die letztentwickelte Form entstand — und nach Beseitigung von Ausartungsfällen — dass die gewollte Lage durch das eine oder andere der drei Gleichungspaare

$$\begin{aligned} \Delta + \varrho(\varrho+\sigma+\tau) &= 0\,, \quad \sigma - \tau = 0\,;\\ \Delta + \sigma(\varrho+\sigma+\tau) &= 0\,, \quad \tau - \varrho = 0\,;\\ \Delta + \tau(\varrho+\sigma+\tau) &= 0\,, \quad \varrho - \sigma = 0 \end{aligned}$$

charakterisirt wird. Diese drei Paare fliessen aber, wenn man wieder uneigentliche Lösungen ausschliesst, in das Gleichungssystem zusammen

$$\varrho = \sigma = \tau\,.$$

Die Gleichung $w^3 - lw^2 + mw - n = 0$ muss also drei gleiche Wurzeln aufweisen; und da das Kriterium für dies Verhalten bekannt ist*), so ergiebt sich:

Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass die vier Puncte $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ *der Fläche* $a_x{}^2 = 0 = b_x{}^2$ *äquianharmonisch liegen, besteht darin, dass die quadratische Covariante der binären cubischen Form, deren Verschwindungswerthe durch die Invarianten* $a_\xi a_\eta \cdot b_\zeta b_\vartheta$, $a_\xi a_\zeta \cdot b_\vartheta b_\eta$, $a_\xi a_\vartheta \cdot b_\eta b_\zeta$ *gegeben sind, identisch gleich Null sei.*

Geometrisch heisst das auf Grund der vorhin erwähnten Bedeutung der Gleichungen $\sigma - \tau = 0$, $\tau - \varrho = 0$, $\varrho - \sigma = 0$:

Die vier Puncte $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ *liegen stets dann und nur dann äquianharmonisch, wenn die Verbindungslinie von je zweien jedesmal die conjugirte Polare der Verbindungslinie der beiden anderen schneidet.*

Auch dies Resultat war vorauszusehen. In dem Falle nämlich, dass die Fundamentalfläche eine Kugel, und dass (Math. Annalen Bd. IX p. 211—212) drei der Puncte ξ, η, ζ, ϑ äquidistante Puncte eines Breitenkreises sind, der vierte dagegen in einem geographischen Pol dieses Kreises liegt, springt die Richtigkeit des Satzes in die Augen. Und er behält seine Gültigkeit, wenn man die Kugel collinear verwandelt.

Karlsruhe, den 7. März 1880.

---

*) Clebsch, „Binäre Formen" p. 130—131.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

Von

J. Rosanes in Breslau.

Sind f, φ, ψ drei in einer Ebene gelegene Kegelschnitte, so lassen sich dieselben, wie zuerst Hermite entdeckt hat, immer als conische Polaren einer gewissen Curve dritter Ordnung Θ ansehen. (Auszunehmen ist der Fall, wo in dem Büschel (f, φ) eine Curve vorhanden ist, welche mit dem Kegelschnitt ψ einen doppelten Contact hat.) Die sogenannte Grundcurve Θ ist ebenso, wie die resp. Pole ξ, η, ζ der Kegelschnitte f, φ, ψ eindeutig bestimmt*). Bezeichnet man durch φ_ξ die Polare des Punktes ξ in Bezug auf den Kegelschnitt φ, so stellt sich die Beziehung zwischen den Polen ξ, η, ζ und den Kegelschnitten f, φ, ψ bekanntlich in der Weise dar, dass die Polare des Punktes ξ in Bezug auf φ zusammenfällt mit der des Punktes η in Bezug auf f u. s. f., was wir durch

(a) $$\varphi_\xi \backsimeq f_\eta, \quad \psi_\eta \backsimeq \varphi_\zeta, \quad f_\zeta \backsimeq \psi_\xi$$

darstellen wollen, indem das Zeichen $\backsimeq$ das geometrische Zusammenfallen der der rechten und linken Seite entsprechenden Gebilde, d. h. die Proportionalität der zugehörigen algebraischen Ausdrücke andeuten soll. Die Relationen (a) repräsentiren im Ganzen sechs Gleichungen, was mit der Zahl der Daten übereinstimmt, welche zur Bestimmung von drei Punkten (ξ, η, ζ) erforderlich ist. Der Zweck dieser Note ist darauf hinzuweisen, dass es neben den Punkten $\xi\,\eta\,\zeta$ noch zwei andere Systeme von je drei Punkten giebt, welche ebenfalls den Relationen (a) genügen. Diese dreimal drei Punkte sind, abgesehen von ihren Beziehungen zu den drei Kegelschnitten f, φ, ψ, in ihrer gegenseitigen Lage drei Bedingungen unterworfen, derart dass

*) Journ. f. d. r. u. ang. Mathem. Bd. 57. Der Nachweis der Existenz und die Darstellung der Pole ist seit der ersten Arbeit Hermite's wiederholt, sowohl durch mehr geometrische als auch durch rein algebraische Methoden, geliefert worden. Vgl. Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, übersetzt von M. Curtze, p. 274.

sieben jener neun Punkte willkürlich gewählt werden dürfen, während der achte und neunte alsdann projectivisch zugeordnete Punkte zweier Geraden bilden. Bestehen umgekehrt zwischen neun Punkten diese drei Lagenbeziehungen, so lassen sich drei Kegelschnitte (auf eine Weise) f, φ, ψ derart finden, dass sich jene in drei Gruppen von je drei Punkten zerlegen lassen, deren jede die Bedingungen (a) erfüllt.

I.

Es sei die Gleichung einer ebenen Curve 3^{ter} Ordnung

$$\Theta(x, x, x) = \sum_{i,k,l} \Theta_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0, \qquad (i, k, l = 1, 2, 3)$$
$$\Theta_{ikl} = \Theta_{ilk} = \cdots$$

und es werde die übliche Bezeichnung festgehalten

$$\Theta_i(x, x) = \sum_{k,l} \Theta_{ikl}\, x_k x_l, \quad \Theta_{ik}(x) = \sum_l \Theta_{ikl}\, x_l,$$
$$\Theta(x, y, z) = \sum_{ikl} \Theta_{ikl}\, x_i y_k z_l = \sum_i x_i \Theta_i(y, z) = \cdots$$

Gemäss einer in einer früheren Arbeit eingeführten Ausdrucksweise*) soll auch hier eine Curve 3^{ter} Classe

$$\vartheta(x, x, x) = \sum_{ikl} \vartheta_{ikl}\, x_i x_k x_l = 0$$

zu Θ *„conjugirt"* heissen, sobald deren Coefficienten die Gleichung erfüllen

$$\sum_{ikl} \Theta_{ikl}\, \vartheta_{ikl} = 0.$$

Von den a. a. O. gezogenen Folgerungen sei nur die evidente Bemerkung erwähnt, dass die Gesammtheit aller Curven ϑ, welche einer gegebenen Curve Θ conjugirt sind, eine neungliedrige Gruppe bildet, d. h. aus neun linear independenten auf linearem Wege zusammengesetzt werden kann. Ebenso steht einer p-gliedrigen Gruppe von Curven 3^{ter} Ordnung eine conjugirte $(10 - p)$-gliedrige Gruppe von Curven 3^{ter} Classe gegenüber. Ist die aus den drei Punkten x, y, z gebildete Curve 3^{ter} Classe zu Θ conjugirt, d. h. besteht die Gleichung

$$\Theta(x, y, z) = 0,$$

so bilden $x\,y\,z$ ein *„conjugirtes Dreieck"* der Curve Θ. Fällt z mit y zusammen, d. h. ist

$$\Theta(x, y, y) = 0,$$

so liegt y auf den conischen Polaren des Punktes x in Bezug auf Θ,

---

*) Vgl. hierüber „Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen" Borch. Journ. Bd. 76, pag. 320.

und umgekehrt. Ein Punkt x und irgend ein doppelt gezählter Punkt seiner ersten Polaren bilden somit ein besonderes conjugirtes Dreieck von Θ. Bildet umgehehrt x mit fünf (doppelt gezählten) Punkten eines Kegelschnitts K je ein conjugirtes Dreieck einer Curve 3ter O., so ist K die conische Polare von x in Bezug auf dieselbe. Sind daher zwei Punkte ξ, η und zwei Kegelschnitte $f(xx) = 0$, $\varphi(xx) = 0$ gegeben, so ist die Frage leicht zu beantworten, wann es eine Curve 3ter Ordnung Θ giebt, derart, dass in Bezug auf dieselbe f, φ resp. die ersten Polaren der Punkte ξ, η sind. Denn bezeichnet man irgend fünf Punkte von f durch $\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^5$, von Φ durch $\beta^1, \cdots, \beta^5$, so müsste Θ so bestimmt werden können, dass sie den zehn Dreiecken $\xi\alpha'\alpha', \cdots, \xi\alpha^5\alpha^5$; $\eta\beta'\beta', \cdots, \eta\beta^5\beta^5$ einzeln conjugirt ist. Nun ist offenbar, dass die dreifach gezählte Gerade (ξ, η), deren Gleichung $(x\xi\eta)^3 = 0$, unter allen Umständen diese Eigenschaft besitzt. Giebt es daher noch eine eigentliche Curve Θ, die der Forderung genügt, so kann dies nur dadurch eintreten, dass die genannten zehn Dreiecke eine achtgliedrige Gruppe bilden. Da ihnen aber alsdann die zweigliedrige Gruppe $(\Theta, (x\xi\eta)^3)$ als conjugirte gegenübersteht, so hat man den

Satz: *„Giebt es eine eigentliche Gruppe 3ter Ordnung $\Theta(xxx) = 0$, in Bezug auf welche f, φ resp. die ersten Polaren von ξ, η sind, so existirt eine einfache Mannigfaltigkeit von Curven, die dieselbe Eigenschaft haben. Dieselben haben unter einander einen dreipunktigen Contact in drei Punkten der Geraden (ξ, η); ihre allgemeine Gleichung ist sonach $\Theta(xxx) + \sigma(x\xi\eta)^3 = 0$.“*

Da leicht einzusehen ist, dass jene zehn Dreiecke nicht nothwendigerweise eine achtgliedrige Gruppe bilden, so müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, damit $\Theta(xxx)$ existire. Aus der Theorie der Curven 3ter Ordnung ist bekannt, dass die gerade Polare $f(x, \eta) = 0$ identisch sein muss mit $\varphi(x, \xi) = 0$. Dass dies auch ausreichend ist, kann man dadurch nachweisen, dass man die Reduction der zu erfüllenden zwölf Gleichungen

$$\Theta_{ik}(\xi) = f_{ik}, \quad \Theta_{ik}(\eta) = \varphi_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

auf neun derselben vornimmt*). Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Gesammtheit aller Curven in der Gleichung

$$\Theta(xxx) + \sigma(x\xi\eta)^3 = 0$$

enthalten.

*) Man hat nur zu zeigen, dass die zwölf Gleichungen

$$(i, k = 1, 2, 3), \quad f_{ik} - \Theta_{ik}(\xi) = 0, \quad \varphi_{ik} - \Theta_{ik}(\eta) = 0$$

sich auf höchstens neun reduciren. Dass auch wirklich nur zwei independente Lösungen existiren, geht daraus hervor, dass die neun Gleichungen

$$f_{ik} - \Theta_{ik}(\xi) = 0, \quad \varphi_{11} - \Theta_{11}(\eta) = 0, \quad \varphi_{12} - \Theta_{12}(\eta) = 0, \quad \varphi_{22} - \Theta_{22}(\eta) = 0$$

II.

Es seien nun

$$f(x, x) = 0, \quad \varphi(x, x) = 0, \quad \psi(x, x) = 0$$

die Gleichungen dreier Kegelschnitte, welche nicht demselben Büschel angehören sollen. Setzt man überdies voraus, dass unter den Kegelschnitten $\varrho f(x, x) + \sigma\varphi(x, x) + \tau\psi(x, x) = 0$ keine Doppelgerade vorkommt, so existirt bekanntlich *eine* Grundcurve dritter Ordnung, deren Polarennetz die Curven f, φ, ψ angehören. Die denselben zugehörigen Pole ξ, η, ζ sind eindeutig bestimmt und genügen den oben angeführten Relationen

$$(1) \qquad \varphi_\xi \cong f_\eta, \quad \psi_\eta \cong \varphi_\zeta, \quad f_\zeta \cong \psi_\xi.$$

Die hierdurch dargestellten sechs Bedingungen werden jedoch nicht durch jene Pole allein erfüllt. Denn, nennen wir jedes System von drei Punkten $\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$ *„ein Hauptdreieck* von f, φ, ψ", sobald deren Coordinaten an Stelle von ξ, η, ζ gesetzt, die Relationen (1) befriedigen, so führt die Aufsuchung derselben auf die folgenden neun Gleichungen:

$$\varphi_i(\Xi) = \varrho f_i(\mathrm{H}), \quad \psi_i(\mathrm{H}) = \sigma\varphi_i(\mathrm{Z}), \quad f_i(\mathrm{Z}) = \tau\psi_i(\Xi), \quad (i = 1, 2, 3),$$

welche, indem die Factoren ϱ, $\varrho\sigma$ resp. auf die Coordinaten H, Z geworfen werden und $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau$ durch λ ersetzt wird, in die folgenden übergehen:

$$(2) \qquad \varphi_i(\Xi) = f_i(\mathrm{H}), \quad \psi_i(\mathrm{H}) = \varphi_i(\mathrm{Z}), \quad f_i(\mathrm{Z}) = \lambda\psi_i(\Xi).$$

Die Elimination der Grössen $\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$ führt aber auf eine reciproke Gleichung in λ vom dritten Grade. Die eine ihrer Wurzeln $\lambda = 1$ führt allein auf das Poldreieck ξ, η, ζ; die beiden anderen Wurzeln λ', λ'', welche durch die Beziehung $\lambda' \cdot \lambda'' = 1$ verknüpft sind, ergeben neben $\xi\eta\zeta$ noch zwei weitere Hauptdreiecke $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi''\eta''\zeta''$.

Multiplicirt man die erste Gleichung in (2) mit Z_i, die zweite mit Ξ_i und summirt jedesmal nach dem Index i, so erhält man

$$\varphi(\Xi, \mathrm{Z}) = f(\mathrm{H}, \mathrm{Z}), \quad \psi(\Xi, \mathrm{H}) = \varphi(\mathrm{Z}, \Xi),$$

---

unter einander unabhängig sind. Denn bestände zwischen ihnen eine lineare Beziehung, etwa

$$0 = \sum \sigma_{ik}\left\{\Theta_{ik}(\xi) - f_{ik}\right\} + \tau_{11}\left\{\Theta_{11}(\eta) - \varphi_{11}\right\} + \tau_{12}\left\{\Theta_{12}(\eta) - \varphi_{12}\right\}$$
$$+ \tau_{22}\left\{\Theta_{22}(\eta) - \varphi_{22}\right\},$$

so müsste, da Θ_{333} nur in $\Theta_{33}(\xi)$ auftritt, $\sigma_{33} = 0$ sein. Alsdann enthält aber $\Theta_{23}(\xi)$ allein die Grösse Θ_{233}, folglich muss auch $\sigma_{23} = 0$ sein, ebenso $\sigma_{13} = 0$. Die noch übrig bleibenden sechs Terme liefern durch Nullsetzung der einzelnen Coefficienten:

$$\sigma_{11}\xi_1 + \tau_{11}\eta_1 = 0, \quad \sigma_{22}\xi_2 + \tau_{22}\eta_2 = 0,$$
$$\sigma_{11}\xi_3 + \tau_{11}\eta_3 = 0, \quad \sigma_{22}\xi_3 + \tau_{22}\eta_3 = 0,$$

woraus das Verschwinden der anderen σ_{ik}, τ_{ik} gefolgert wird.

folglich auch

$$f(\mathsf{H}, \mathsf{Z}) = \psi(\Xi, \mathsf{H}).$$

Vermittelst des analogen Processes liefert aber die dritte Gleichung in (2)

$$f(\mathsf{H}, \mathsf{Z}) = \lambda\psi(\Xi, \mathsf{H}),$$

folglich ergiebt sich

$$(\lambda - 1)\cdot\psi(\Xi, \mathsf{H}) = 0.$$

Da nun den beiden Lösungen $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi''\eta''\zeta''$ die von Eins verschiedenen Werthe λ', λ'' entsprechen, so gelangt man zu der Gleichung

$$\begin{array}{llll} (3) & \left\{ \begin{array}{l} \psi(\xi', \eta') = 0 \\ \psi(\xi'', \eta'') = 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{und ebenso} \quad \varphi(\zeta', \xi') = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \varphi(\zeta'', \xi'') = 0, \end{array} & \begin{array}{l} f(\eta', \zeta') = 0; \\ f(\eta'', \zeta'') = 0; \end{array} \\ (4) & & & \end{array}$$

„d. h. *die Ecken eines Hauptdreiecks* (welches aber nicht Poldreieck sein darf), *sind paarweise je einem der drei Kegelschnitte* f, φ, ψ *conjugirt.*“ *)

III.

Die dreimal neun Gleichungen, welche die Ecken der drei Hauptdreiecke definiren

$$(5) \qquad \varphi_i(\xi) = f_i(\eta), \qquad \psi_i(\eta) = \varphi_i(\zeta), \qquad f_i(\zeta) = \psi_i(\xi),$$

$$(6) \qquad \varphi_i(\xi') = f_i(\eta'), \qquad \psi_i(\eta') = \varphi_i(\zeta'), \qquad f_i(\zeta') = \lambda'\psi_i(\xi'),$$

$$(7) \qquad \varphi_i(\xi'') = f_i(\eta''), \qquad \psi_i(\eta'') = \varphi_i(\zeta''), \qquad f_i(\zeta'') = \lambda''\psi_i(\xi''),$$

---

*) Man wird auch auf andere Weise auf die Nothwendigkeit des Bestehens dieser Beziehungen geführt. Es sei nämlich $\Theta(xxx) = 0$ eine Curve 3ter O., in Bezug auf welche f, φ resp. die conischen Polaren der Punkte ξ', η' sind; dann hat jede Curve $D(xxx) = \varrho\,\Theta(xxx) + \sigma(x\xi'\eta')^3 = 0$ die gleiche Eigenschaft. Bezeichnet man daher mit $D_{\xi'}$, $D_{\xi'\eta'}$ die conische Polare von ξ' resp. die gemischte Polare des Punktepaares (ζ', η'), so hat man

$$f(xx) \cong D_{\xi'}, \qquad \varphi(xx) \cong D_{\eta'},$$

folglich

$$\psi_{\xi'} \cong D_{\xi'\zeta'}, \qquad \psi_{\eta'} \cong D_{\eta'\zeta'},$$

oder auch

$$\psi_{\xi'} \cong (D_{\zeta'})_{\xi'}, \qquad \psi_{\eta'} \cong (D_{\zeta'})_{\eta'},$$

d. h. in Bezug auf den Kegelschnitt $D_{\zeta'}$ haben ξ', η' die gleichen Polaren, wie in Bezug auf ψ. Daraus folgt, dass $\psi_{\xi'}$ durch η' gehen, d. h $\psi(\xi'\eta') = 0$ sein muss. Denn sonst müsste $D_{\zeta'}$ von der Gestalt $\mu\psi(xx) + \nu(x\xi'\eta')^2$ sein, und man könnte ϱ, σ derart bestimmen, dass $\nu = 0$ würde, d. h. $D_{\zeta'} \cong \psi(xx)$. Dadurch wäre aber eine Curve D erlangt, welche den Relationen

$$D_{\xi'} \cong f(xx), \quad D_{\eta'} \cong \varphi(xx), \quad D_{\zeta'} \cong \psi(xx),$$

entspräche, was gegen den Satz von Hermite, wonach nur ein Poldreieck (ξ, η, ζ) existirt, verstossen würde.

gestatten es, dieselben zu anderen Gebilden in nahe Beziehung zu bringen. Fasst man nämlich die Kegelschnitte f, φ, ψ als Liniengebilde auf und nennt $F(u, u) = 0$, $\Phi(u, u) = 0$, $\Psi(u, u)$ deren Gleichungen (unter $u_1 u_2 u_3$ sind Liniencoordinaten zu verstehen), so wird eine der obigen analoge algebraische Behandlung auf *drei Hauptdreiseite* führen, deren eines die Polgeraden der Kegelschnitte F, Φ, Ψ in Bezug auf eine gewisse Curve 3ter Classe repräsentiren wird. Die Gleichungen zwischen den Coordinaten dieser dreimal drei Geraden unterscheiden sich von den Gleichungen (2) allein dadurch, dass an Stelle der Formen f, φ, ψ deren adjungirte Formen treten, während Ξ, H, Z durch Coordinaten der Seiten eines „*Hauptdreiseits*" zu ersetzen sind. Gleichungen dieser Form lassen sich aber direct sehr einfach aus den Systemen (5), (6), (7) herstellen. Bildet man nämlich aus den linken und rechten Seiten der ersten Gleichungen in (6) und (7) die beiden Matrices

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\xi'), & \varphi_2(\xi'), & \varphi_3(\xi') \\ \varphi_1(\xi''), & \varphi_2(\xi''), & \varphi_3(\xi'') \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} f_1(\eta'), & f_2(\eta'), & f_3(\eta') \\ f_1(\eta''), & f_2(\eta''), & f_3(\eta'') \end{vmatrix},$$

so ergiebt die Gleichsetzung der entsprechenden Determinanten drei Gleichungen. Da nun vermöge der bekannten Eigenschaften der quadratischen Form, z. B.

$$\begin{vmatrix} \varphi_2(\xi'), & \varphi_3(\xi') \\ \varphi_2(\xi''), & \varphi_3(\xi'') \end{vmatrix} = \Phi_1((\xi'\xi''))$$

ist, wenn wir mit $(\xi'\xi'')_i$ die Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' \end{vmatrix}$$

bezeichnen, so erhält man, wenn man immer die übereinanderstehenden Gleichungen in (5), (6), (7) combinirt, drei neue Systeme von je neun Gleichungen, welche folgendermassen lauten:

$$(5^a) \qquad \Phi_i(a) = F_i(b), \qquad \Psi_i(b) = \Phi_i(c), \qquad F_i(c) = \Psi_i(a),$$

$$(6^a) \qquad \Phi_i(a') = F_i(b'), \qquad \Psi_i(b') = \Phi_i(c'), \qquad F_i(c') = \lambda'\Psi_i(a'),$$

$$(7^a) \qquad \Phi_i(a'') = F_i(b''), \qquad \Psi_i(b'') = \Phi_i(c''), \qquad F_i(c'') = \lambda''\Psi_i(a''),$$

wenn zur Abkürzung

$$(\xi'\xi'')_i = a_i, \qquad (\eta'\eta'')_i = b_i, \qquad (\zeta'\zeta'')_i = c_i,$$

$$(\xi\xi')_i = a_i', \qquad (\eta\eta')_i = b_i', \qquad (\zeta\zeta')_i = c_i',$$

$$(\xi\xi'')_i = a_i'', \qquad (\eta\eta'')_i = b_i'', \qquad (\zeta\zeta'')_i = c_i''$$

gesetzt wird. Als Consequenz dieser Beziehungen ergiebt sich weiter, ebenso wie die Gleichungen (3), (4) aus (2) gefolgert wurden,

$$(3^a)\qquad F(b', c') = 0, \quad \Phi(c', a') = 0, \quad \Psi(a', b') = 0,$$

$$(4^a)\qquad F(b'', c'') = 0, \quad \Phi(c'', a'') = 0, \quad \Psi(a'', b'') = 0.$$

Die Vergleichung der Systeme (5), (6), (7) mit den unter (5^a), (6^a), (7^a) verzeichneten zeigt aber, dass die Geraden abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ Gleichungen genügen, wie sie zur Bestimmung der Hauptdreiseite auftreten müssen. Da die Zahl der Geraden genau dieselbe ist, so ergiebt sich der

Satz: „*Die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken zweier Hauptdreiecke bilden ein Hauptdreiseit. — Die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten zweier Hauptdreiseite bilden ein Hauptdreieck.*"

Eine weitere Beziehung zwischen den Hauptdreiecken und den Hauptdreiseiten erhält man durch folgende Bemerkung. Bezeichnet man nämlich die Determinanten der Formen $F(u, u)$, $\Phi(u, u)$, $\Psi(u, u)$ durch die Buchstaben F, Φ, Ψ, so werden die Gleichungen (5^a) identisch erfüllt, wenn man in ihnen

$$(8)\qquad \begin{cases} a_k = F\cdot\varphi_k(\zeta) = F\cdot\psi_k(\eta), \quad b_k = \Phi\cdot\psi_k(\xi) = \Phi\cdot f_k(\zeta), \\ \qquad\qquad c_k = \Psi\cdot f_k(\eta) = \Psi\cdot\varphi_k(\xi) \end{cases}$$

setzt. Ebenso gehen aus den Systemen (6a), (7a) resp. identische Gleichungen durch die Substitutionen

$$(9)\qquad \begin{cases} a'_k = F\cdot\varphi_k(\zeta') = F\cdot\psi_k(\eta'), \quad b'_k = \Phi\cdot\psi_k(\xi') = \lambda'\Phi\cdot f_k(\zeta'), \\ \qquad\qquad c'_k = \lambda'\Psi\cdot f_k(\eta') = \lambda'\Psi\cdot\varphi_k(\xi'). \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} a''_k = F\cdot\varphi_k(\zeta'') = F\cdot\psi_k(\eta''), \quad b''_k = \Phi\cdot\psi_k(\xi'') = \lambda''\Phi\cdot f_k(\zeta''), \\ \qquad\qquad c''_k = \lambda''\Psi\cdot f_k(\eta'') = \lambda''\Psi\cdot\varphi_k(\xi'') \end{cases}$$

hervor. Ist daher Ξ, H, Z irgend ein Hauptdreieck, und nennen wir dasjenige Dreiseit demselben „*correspondirend*", dessen Seiten die drei Polaren

$$\psi_H(\cong\varphi_Z), \quad f_Z(\cong\psi_\Xi), \quad \varphi_\Xi(\cong f_H)$$

sind, so verificiren die Systeme (8), (9), (10), dass die Hauptdreiseite abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ resp. mit den den Hauptdreiecken „*correspondirenden*" Dreiseiten identisch sind. Sonach bestehen zwischen den neun Ecken der Hauptdreiecke noch folgende Beziehungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} f(\eta, \zeta'') = 0, \; f(\eta'', \zeta) = 0, \; f(\eta, \zeta') = 0, \; f(\eta', \zeta) = 0, \\ \varphi(\zeta, \xi'') = 0, \; \varphi(\zeta'', \xi) = 0, \; \varphi(\zeta, \xi') = 0, \; \varphi(\zeta', \xi) = 0, \\ \psi(\xi, \eta'') = 0, \; \psi(\xi'', \eta) = 0, \; \psi(\xi, \eta') = 0, \; \psi(\xi', \eta) = 0. \end{cases}$$

IV.

Die bis jetzt aufgestellten Gleichungen weisen darauf hin, dass die Construction der Hauptdreiecke aus den Punkten $\xi\ \eta\ \zeta$ allein mit einer andern einfachen Aufgabe zusammenhängt, deren Lösung auf eine Gleichung zweiten Grades führt.

Sind nämlich p, q, r irgend drei gerade Linien, so kann man die Auffindung dreier Punkte y, z, t fordern, derart dass y auf der Geraden p, z auf q, t auf r gelegen ist und dass ferner

z, t ein conjugirtes Punktepaar in Bezug auf den Kegelschnitt f
t, y „ „ „ „ „ „ „ „ φ
y, z „ „ „ „ „ „ „ „ ψ

bilden. Es ist unschwer zu erkennen, dass die Auflösung von den Schnittpunkten einer der Geraden p, q, r mit einem Kegelschnitt abhängt. Die auf diese Weise entstehenden beiden Systeme von drei Punkten y, z, t treten in einfache Beziehung zu dem hier behandelten Gegenstande, sobald die Geraden p, q, r resp. mit den drei Polgeraden a, b, c von F, Φ, Ψ identisch sind. Denn bedeutet alsdann y, z, t eine der beiden Lösungen obiger Aufgabe, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{array}{llll} & p(y)=0, & q(z)=0, & r(t)=0, \\ (12) & f(z,t)=0, & \varphi(t,y)=0, & \psi(y,z)=0, \end{array}$$

zu denen aber unter der neu gemachten Voraussetzung noch die weiteren Beziehungen hinzutreten

$$p(x) \cong \varphi_\zeta \cong \psi_\eta, \quad q(x) \cong \psi_\xi \cong f_\zeta, \quad r(x) \cong f_\eta \cong \varphi_\xi.$$

Aus beiden vereint folgt aber:

$$(13) \quad \begin{cases} f(\zeta, z)=0, \quad f(\eta, t)=0, \quad \varphi(\zeta, y)=0, \quad \varphi(\xi, t)=0, \\ \qquad \psi(\xi, z)=0, \quad \psi(\eta, y)=0, \end{cases}$$

d. h. es ergiebt sich in Rücksicht auf (12):

$$(14) \quad \begin{cases} f_z \cong (\zeta, t), & \varphi_y \cong (\zeta, t), & \psi_y \cong (\eta, z), \\ f_t \cong (\eta, z), & \varphi_t \cong (\xi, y), & \psi_z \cong (\xi, y), \end{cases}$$

wenn wir z. B. unter (ζ, t) die gerade Verbindungslinie (ζ, t) verstehen.*) Hieraus geht aber durch Vergleichung der rechten Seiten hervor, dass

$$\varphi_y \cong f_z, \quad \psi_y \cong f_t, \quad \psi_z \cong \varphi_t,$$

*) ζ und t können nicht zusammenfallen, da der Pol ζ nicht auf der ihm correspondirenden Geraden gelegen ist.

d. h. y, z, t bilden ein Hauptdreieck. Da auf dem Dreiseit abc zwei derartige Dreiecke y, z, t sich ergeben haben, so sind damit noch einmal die beiden anderen Hauptdreiecke ($\xi'\eta'\zeta'$, $\xi''\eta''\zeta''$) construirt:

„*Man bestimme auf dem dem Poldreiecke* $\xi\eta\zeta$ *correspondirenden Dreiseit* p, q, r *drei Punkte* y, z, t *je auf* p, q, r *gelegen, derart, dass* $f(z, t) = 0$, $\varphi(t, y) = 0$, $\psi(y, z) = 0$ *ist. Die beiden Lösungen bilden die beiden Hauptdreiecke* $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi''\eta''\zeta''$".*)

V.

Die Anzahl der Relationen, welche vermöge der Gleichungen (5), (6), (7) zwischen den Coordinaten der neun Punkte $\xi\eta\zeta$, $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi''\eta''\zeta''$ bestehen, lässt es erwarten, dass zwischen den Ecken der drei Hauptdreiecke allein Beziehungen stattfinden, welche sie als solche (ohne Zuhilfenahme der Kegelschnitte) qualificiren. Ein genaueres Zusammenhalten der gefundenen Relationen zeigt in der That, dass z. B. die Dreiecke $\xi\xi'\xi''$, $\eta\eta''\eta'$ einander conjugirt sind in Bezug auf den Kegelschnitt ψ u. s. f. Bezeichnet man daher die perspectivische Lage zweier Dreiecke kurz durch das Zeichen $\bar{\wedge}$, so ergeben sich die drei Beziehungen:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi\xi'\xi'' \;\bar{\wedge}\; \eta\eta''\eta' \\ \eta\eta'\eta'' \;\bar{\wedge}\; \zeta\zeta''\zeta' \\ \zeta\zeta'\zeta'' \;\bar{\wedge}\; \xi\xi''\xi' \end{array} \right\}.$$

Aber dieselben sind zugleich genügend, d. h.

„*Liegen neun Punkte* $\xi\eta\zeta$, $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi''\eta''\zeta''$ *so, dass die drei in* (15) *aufgestellten Lagenbeziehungen statthaben, so kann man (auf eine Weise) drei Kegelschnitte* f, φ, ψ *derart bestimmen, dass jene neun Punkte die Ecken der drei Hauptdreiecke dieser bilden.*"

Man hat nämlich nur den Kegelschnitt f derart zu bestimmen, dass in Bezug auf ihn die beiden Dreiecke $\eta\eta'\eta''$, $\zeta\zeta''\zeta'$ einander conjugirt sind und ebenso φ, ψ vermittelst der beiden Paare von Dreiecken $\zeta\zeta'\zeta''$, $\xi\xi''\xi'$; $\xi\xi'\xi''$, $\eta\eta''\eta'$ herzustellen.

Die Richtigkeit der Behauptung ist ohne Weiteres einzusehen; denn da z. B. vermöge der Construction des Kegelschnittes f aus den beiden Dreiecken $\eta\eta'\eta''$, $\zeta\zeta''\zeta'$ die Gerade ($\zeta'\zeta''$) mit der Polaren f_η

---

*) Es sei noch bemerkt, dass in dem Falle, wo die Geraden p, q, r mit den Seiten $a'b'c'$ (oder $a''b''c''$) zusammenfallen, die oben angewandte Schlussweise illusorisch wird. Auch bilden alsdann z. B. die beiden Punkte $\xi'\eta'$ mit einem beliebigen Punkte t der Geraden r eine Lösung der obigen Aufgabe.

identisch ist, gleichzeitig aber, wie aus der Definition von φ folgt, dieselbe Gerade mit φ_ξ zusammenfällt, so ergiebt sich

$$f_\eta \cong \varphi_\xi, \text{ u. s. f.}$$

Die Relationen (15) lassen erkennen, dass die beiden Dreiecke $\xi\,\eta\,\zeta$, $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ ganz willkürlich gewählt werden dürfen, von dem dritten Hauptdreieck ist aber dann nur noch eine Ecke, etwa ξ'' beliebig zu bestimmen. Bezeichnet man die beiden Punkte $(\xi\eta, \xi''\eta')$, $(\xi\zeta, \xi''\zeta')$ resp. durch γ, β, so beschreiben die beiden noch fehlenden Punkte η'', ζ'' resp. auf den Geraden (ξ', γ), (ξ', β) projectivische Punktreihen.

Breslau, Januar 1880.

Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung.

Von

von Gall in Darmstadt.

Einleitung.

Nach Herrn Prof. Gordan erhält man das vollständige Formensystem einer binären Form 8^{ter} Ordnung durch Verbindung des Systems:

$$f = a_x^8;\quad H_x^{12} = (ff)_2;\quad T_x^{18} = (Hf)_1;\quad i_x^8 = (ff)_4;\quad \Theta_x^{14} = (fi)_1;$$
$$S_x^{18} = (Hi)_1;\quad p_x^{12} = (fi)_2;\quad A = (ff)^8;\quad B = (fi)^8$$

mit dem vollständigen System der biquadratischen Form

$$k_x^4 = (ff)^6;\quad \Delta_x^4 = (kk)_2;\quad \mathsf{T}_x^6 = (k\Delta)_1;\quad C = (kk)_4;\quad D = (k\Delta)_4.$$

Mit Hilfe der von Herrn Prof. Gordan gegebenen, die symbolische Rechnung wesentlich vereinfachenden Polarenbildungen I_a, I_b, I_c und der Identität III seines Werkes über das Formensystem binärer Formen*) hält es nicht schwer das vollständige Formensystem endgültig aufzustellen. Zu dem Ende verbinden wir zuerst jede einzelne Form des Systems $f, H, T\cdots$ mit dem vollen System der Form k, zeigen dann, dass die Ueberschiebungen von T und S über Formen k alle und diejenigen von Θ bis auf eine auf Ueberschiebungen anderer Formen des Systems $f, H, T, \cdots$, mit dem System k zurückzuführen sind und dass ein Gleiches von den meisten der aus H und p entstehenden Formen nachgewiesen werden kann. Nach diesem wird sich ergeben, dass die Ueberschiebungen aller Producte $f^{\alpha_1} H^{\alpha_2} T^{\alpha_3}\ldots$ mit Producten $k^{\beta_1}\Delta^{\beta_2}\mathsf{T}^{\beta_3}$ durch zerfallende Theile ersetzt werden können, mithin auszulassen sind. Den Schluss bildet die Aufstellung des vollen Systems. Wir verstehen in Nachfolgendem unter $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ oder φ_k; $\varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi''''$ oder φ_Δ; $\varphi_{kk}, \varphi_{k\Delta}, \varphi_{\Delta^2}$ u. s. w. die Ueberschiebungen $[\varphi,k]_1$, $[\varphi,k]_2$, $[\varphi,k]_3$, $[\varphi,k]_4$, $[\varphi,\Delta]_1$, $[\varphi,\Delta]_2$, $[\varphi,\Delta]_3$, $[\varphi,\Delta]_4$, $[\varphi,k^2]_8$, $[\varphi,k\Delta]^8$, $[\varphi,\Delta^2]^8$ u. s. w. Es ist ohne Weiteres klar, dass wir unter $\begin{pmatrix}\varphi & \psi & \chi\\ m & n & p\end{pmatrix}$ die Specialisirung der Gordan'schen Identität III für den

*) Leipzig, Teubner 1875.

Fall $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$, $\alpha_3 = p$ verstehen. Im § 1. schicken wir das Nothwendigste über die Formen dritten Grades in den Coefficienten von f_x^8 voraus, im § 2. entwickeln wir einige allgemeine Sätze über Ueberschiebungen einer biquadratischen Form mit einer beliebigen Form φ_x^m. In den folgenden Paragraphen werden die Formen untersucht, die resp. ausser einem Symbol H, Θ, T, S und p nur Symbole k, Δ, T enthalten, und wir verstehen hierbei unter J, P und F Ueberschiebungen von der Form:

$$[i, k^{\alpha_1} \Delta^{\alpha_2} \mathrm{T}^{\alpha_3}], \quad [p, k^{\alpha_1} \Delta^{\alpha_2} \mathrm{T}^{\alpha_3}], \quad [f, k^{\alpha_1} \Delta^{\alpha_2} \mathrm{T}^{\alpha_3}].$$

Im letzten Paragraphen findet sich das volle System, so weit es mir gelungen ist, dasselbe zu reduciren.

§ 1.

Formen dritten Grades.

Man erhält der Reihe nach für:

$$(1) \quad \underset{0\,3\,4}{f\,f\,f}; \quad \frac{\sum \binom{4}{i}\binom{3}{i}}{\sum \binom{9-i}{i}} [(ff)^{4+i} f]^{3-i}] = \frac{\sum \binom{5}{i}\binom{4}{i}}{\sum \binom{11-i}{i}} [(ff)^{3+i} f]^{4-i}$$

und

$$(fi)_3 = \frac{1}{7} (fk)_1;$$

$$(2) \quad \underset{0\,3\,5}{f\,f\,f}; \quad \frac{\sum \binom{3}{i}\binom{3}{i}}{\sum \binom{7-i}{i}} [(ff)^{5+i} f]^{3-i} = \sum \frac{\binom{5}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}} [(ff)^{3+i} f]^{5-i}$$

und

$$(fi)_4 = -\frac{4}{35} (fk)_2 + \frac{1}{30} A \cdot f;$$

$$(3) \quad \underset{1\,4\,4}{f\,f\,f}; \quad \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(ff)^{4+i} f]^{5-i} = -\sum \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(ff)^{4+i} f]^{5-i} = 0$$

und

$$(fi)_5 = -\frac{6}{7} (fk)_3;$$

$$(4) \quad \underset{2\,5\,3}{f\,f\,f}; \quad \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}} [(ff)^{3+i} f]^{7-i} = \sum \frac{\binom{1}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}} [(ff)^{5+i} f]^{5-i}$$

und

$$(fi)_6 = \frac{3}{14} (fk)_4;$$

$$(5)\ \begin{matrix} f & f & f \\ 3 & 4 & 4 \end{matrix};\ \sum \frac{\binom{1}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(ff)^{4+i}f]^{7-i} = -\sum \frac{\binom{1}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(ff)^{4+i}f]^{7-i} = 0$$

und

$$(fi)_7 = 0.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Relationen:

(1) $$(Hf)_2 = \frac{5}{22}\, i \cdot f,$$

(2) $$(Hf)_3 = -\frac{2}{11}\, \Theta,$$

(3) $$(Hf)_4 = -\frac{7}{11}\, p + \frac{1}{6}\, k \cdot f,$$

(4) $$(Hf)_5 = -\frac{1}{66}\, f_1.$$

§ 2.

Ueberschiebungen einer biquadratischen Form k mit φ_x^m.

Der Theorie der biquadratischen Formen entlehnen wir die Relationen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&(k\Delta)_1 = \mathsf{T}, \qquad (\Delta\Delta)_2 = -\frac{C}{6}\,\Delta + \frac{D}{3}\,k,\\
&(k\Delta)_2 = \frac{C}{6}\,k,\\
&(k\Delta)_3 = 0,\\
&(k\Delta)_4 = D,\\
&(k\mathsf{T})_1 = -\frac{\Delta^2}{2} + \frac{C}{12}\,k^2,\\
&(k\mathsf{T})_2 = 0,\\
&(k\mathsf{T})_3 = \frac{1}{4}\,D\Delta + \frac{C^2}{24}\,k,\\
&(k\mathsf{T})_4 = 0,\\
&\mathsf{T}^2 = -\frac{1}{2}\,\Delta^3 + \frac{C}{4}\,\Delta k^2 - \frac{D}{6}\,k^3.
\end{aligned}\right.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} k & \varphi & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} k & \varphi & k \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} k & k & \varphi \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} k & k & \varphi \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man weiter:

$$(2)\quad \begin{cases} (\Delta\varphi)_1 = [\varphi_2 k]_1 - \frac{m-2}{m}\,\varphi_3 \cdot k, \\ (\Delta\varphi)_2 = -\frac{2}{3}\,[\varphi_3 k]_1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{m-3}{m-2}\,\varphi_4\cdot k - \frac{1}{6}\,C\cdot\varphi, \\ (\Delta\varphi)_3 = [\varphi_3 k]_2 - \frac{m-4}{m-2}\,(\varphi_4 k)_1, \\ (\Delta\varphi)_4 = -\,2\,[\varphi_3 k]_3 + 2\cdot\frac{m-5}{m-2}\,[\varphi_4 k]_2. \end{cases}$$

Analog findet man aus

$$\begin{pmatrix} k & \varphi & \Delta \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & \varphi & \Delta \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & \Delta & \varphi \\ (\varrho-3) & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\varrho \overline{\overline{>}} 3],$$

$$(3)\quad \begin{cases} (\mathsf{T}\varphi)_2 = [\varphi_2\Delta]_1 - \frac{m-2}{m}\,\varphi_3\cdot\Delta + \frac{C}{6}\cdot\varphi_1, \\ (\mathsf{T}\varphi)_3 = -\,[\varphi_3\Delta]_1 + \frac{m-3}{m-2}\,\varphi_4\cdot\Delta - \frac{1}{4}\,C\cdot\varphi_2 - \frac{1}{4}\,D\cdot\varphi, \\ [\mathsf{T}\varphi]_\varrho + \frac{1}{12}\,C\,\frac{6-\varrho}{1}\,[k\varphi]^{\varrho-1} + \frac{\binom{6-\varrho}{3}}{\binom{4}{3}}\,[D\varphi]^{\varrho-3} \\ \qquad = (-1)^{\varrho-3}\sum \frac{\binom{m-\varrho}{i}\binom{1}{i}}{\binom{m-1-i}{i}}\,[(k\varphi)^{3+i}, \Delta]^{\varrho-2-i}. \end{cases}$$

Aus den Polarenbildungen:

$$k_x^2\,k_y^2\,\Delta_y^4 \quad \text{und} \quad \Delta_x^2\,\Delta_y^2\,k_y^4$$

erhält man:

$$(4)\qquad (\varphi_\Delta k)_2 - (\varphi_k\Delta)_2 = 2\,[\varphi\,\mathsf{T}]^5$$

und aus:

$$k_x\,k_y^3\,\Delta_y^4 \quad \text{und} \quad \Delta_x\,\Delta_y^3\,k_y^4,$$

$$(5)\qquad (\varphi_\Delta k)_3 - (\varphi_k\Delta)_3 = (\varphi\,\mathsf{T})^6.$$

§ 3.

Ueberschiebungen von H.

1. $\{Hk\}^4$.

Gehen wir aus von:

$$\begin{pmatrix} f & f & k \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \sum \frac{\binom{6}{i}\binom{4}{i}}{\binom{13-i}{i}}\,[(ff)^{2+i}k]^{4-i} = \sum \frac{\binom{0}{i}\binom{2}{i}}{\binom{5-i}{i}}\,[(fk)^{4+i}f]^{2-i},$$

oder:

(1) $$H_4 + \frac{18}{11} i_2 + \frac{5}{42} k^2 = (f_4 f)_2$$

und bilden:

$$\begin{pmatrix} f\,f\,i \\ 0\,3\,5 \end{pmatrix}; \quad \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}} [(ff)^{5+i} i]^{3-i} = \sum \frac{\binom{5}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}} [(fi)^{3+i} f]^{5-i},$$

oder

(2) $$\frac{3}{2} i_2 + \frac{1}{4} Ai = ((fi)^3 f)^5 + \frac{5}{2} ((fi)^4 f)^4 + \frac{25}{9} ((fi)^5 f)^3 + \frac{25}{14} ((fi)^6 f)^2 + \frac{1}{6} B \cdot f$$

und

$$\begin{pmatrix} i\,f\,f \\ 0\,3\,5 \end{pmatrix}; \quad \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}} (if)^{5+i} f]^{3-i} = \sum \frac{\binom{5}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}} [(if)^{3+i} f]^{5-i},$$

oder

(3) $$((fi)^3 f)^5 = \frac{5}{2} ((fi)^4 f)^4 - \frac{16}{9} ((fi)^5 f)^3 + \frac{2}{7} ((fi)^6 f)^2 - \frac{1}{12} B \cdot f.$$

Führen wir den Werth von $((fi)^3 f)^5$ in (2) ein und ersetzen wir die Formen dritten Grades $(fi)^k$ durch die Form $(fk)^l$, so geht die Identität (2) über in:

(4) $$\frac{3}{2} i_2 + \frac{1}{12} Ai = -\frac{4}{7} (f_2 f)_4 - \frac{6}{7} (f_3 f)_3 + \frac{87}{14 \cdot 14} (f_4 f)_2 + \frac{1}{12} B \cdot f.$$

Nun erhält man aus

$$\begin{pmatrix} f\,k\,f \\ 0\,4\,2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} f\,k\,f \\ 0\,3\,3 \end{pmatrix}$$

die weiteren Identitäten:

$$\sum \frac{\binom{2}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(fk)^{2+i} f]^{4-i} = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{2}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(ff)^{4+i} k]^{2-i},$$

$$\sum \frac{\binom{1}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}} [(fk)^{3+i} f]^{3-i} = \sum \frac{\binom{5}{i}\binom{3}{i}}{\binom{11-i}{i}} [(ff)^{3+i} k]^{3-i},$$

oder

(5) $$(f_2 f)_4 + (f_3 f)_3 + \frac{2}{7} (f_4 f)_2 = i_2 + \frac{2}{7} k^2$$

und

(6) $$(f_3 f)_3 + \frac{1}{2} (f_4 f)_2 = \frac{3}{2} i_2 + \frac{5}{28} k^2.$$

Eliminiren wir nun successive $(f_2 f)_4$, $(f_3 f)_3$ und $(f_4 f)_2$, so ergiebt sich zunächst aus (4) und (5):

$$\frac{29}{14}\,i_2 + \frac{8}{49}\,k^2 + \frac{1}{12}\,Ai - \frac{1}{12}\,Bf = -\frac{2}{7}\,(f_3 f)_3 + \frac{17}{28}\,(f_4 f)_2$$

und aus dieser und (6)

$$\frac{5}{2}\,i_2 + \frac{3}{14}\,k^2 + \frac{1}{12}\,Ai - \frac{1}{12}\,Bf = \frac{3}{4}\,(f_4 f)_2$$

und endlich mit Hilfe von (1):

(7) $$\frac{3}{4}\,H_4 = \frac{14}{11}\,i_2 + \frac{1}{8}\,k^2 + \frac{1}{12}\,Ai - \frac{1}{12}\,Bf.$$

2. $(Hk)_2$ und $(Hk)_3$.

Aus

$$\begin{pmatrix} f\ k\ f \\ 0\ 1\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f\ k\ f \\ 0\ 1\ 4 \end{pmatrix}$$

erhält man die Identitäten:

$$\sum \frac{\binom{1}{i}\binom{1}{i}}{\binom{7-i}{i}}\,[(fk)^{3+i} f)^{1-i} = \sum \frac{\binom{7}{i}\binom{3}{i}}{\binom{15-i}{i}}\,[(ff)^{1+i} k]^{3-i},$$

$$(f_4 f)_1 = \sum \frac{\binom{7}{i}\binom{4}{i}}{\binom{15-i}{i}}\,[(ff)^{1+i} k]^{4-i},$$

oder

(1) $$H_2 = \frac{2}{3}\,(f_3 f)_1 + \frac{1}{9}\,f_4 \cdot f - \frac{7}{66}\,i \cdot k$$

und

(2) $$H_3 = \frac{1}{2}\,(f_4 f)_1 - \frac{7}{22}\,(ik)_1.$$

3. *Formen* $[H, k^\alpha \cdot \Delta^\beta \cdot \mathrm{T}^\gamma]^\varrho$, *die auszulassen sind.*

Da H_2 und H_3 Functionaldeterminanten sind, so folgt sofort, dass H' und H'' in Folge von Formel (2) § 2. auszulassen sind. Ebenso ergiebt sich aus der Form von $(Hk)^4$, dass, von Gliedern K, J und F abgesehen, jedes Glied und jede Ueberschiebung mit dem symbolischen Factor $(Hk)^4$ fortzulassen ist.

Nun erhält man analog H_k:

$$H_\Delta + \frac{18}{11}\,i'' + \frac{5}{42}\,k\Delta = (f_\Delta f)_2.$$

Es ist mithin von Formen J, K abgesehen $(H_\Delta k)_2$ ersetzbar durch

$$[(f_\Delta f)_2 k]_2.$$

Man erhält nun der Reihe nach für

$$\begin{pmatrix} f_\Delta\, f\, k \\ 0\; 2\; 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_\Delta\, f\, k \\ 0\; 1\; 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_\Delta\, f\, k \\ 0\; 0\; 4 \end{pmatrix}$$

die Identitäten:

$$((f_\Delta f)^2 k)_2 + \frac{3}{2}((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{5}{7}(f_\Delta f)^4 \cdot k = ((f_\Delta k)_2 f)_2 + ((f_\Delta k)_3 f)_1 + \frac{1}{3} f_{\Delta k} \cdot f,$$

$$((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{5}{6}(f_\Delta f)^4 \cdot k = ((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{3}{2}((f_\Delta k)^2 f)^2 + \frac{9}{10}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{4} f_{\Delta k} \cdot f,$$

$$(f_\Delta f)^4 \cdot k = (f_\Delta \cdot k, f)^4 + 2((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{12}{7}((f_\Delta k)^2 f)^2 + \frac{4}{5}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{5} f_{\Delta k} \cdot f.$$

Analog der letzteren erhält man aus $\begin{pmatrix} k\, f\, f_\Delta \\ 0\; 0\; 4 \end{pmatrix}$

$$f_k \cdot f_\Delta = (k \cdot f_\Delta, f)^4 - 2((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{12}{7}((f_\Delta k)^2 f)^2 - \frac{4}{5}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{5} f_{k\Delta} \cdot f.$$

Aus diesen erhält man successive:

$$(f_\Delta f)^4 \cdot k - f_k \cdot f_\Delta = 4((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{8}{5}((f_\Delta k)^3 f)^1,$$

$$((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{7}{12}(f_\Delta f)^4 \cdot k + \frac{1}{4} f_k \cdot f_\Delta = \frac{3}{2}((f_\Delta k)^2 f)^2 + \frac{1}{2}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{4} f_{\Delta k} \cdot f,$$

$$((f_\Delta f)^2 k)_2 + \frac{5}{6}((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{41}{126}(f_\Delta f)^4 \cdot k - \frac{1}{6} f_k \cdot f_\Delta = \frac{2}{3}((f_\Delta k)^3 f)_1 + \frac{1}{6} f_{k\Delta} \cdot f.$$

Es ist mithin $(H_\Delta k)_2$, von zerfallenden Formen und Formen J, K und F abgesehen, durch Functionaldeterminanten ersetzbar, daher ist $(H_\Delta \Delta)_1$ und $(H_\Delta \mathsf{T})_2$ wegen Formel (3), § 2. auszulassen.

Um $(H_\Delta \Delta)_2$ zu bilden, überlegen wir, dass, wegen der obigen Gleichung für H_Δ, $(H_\Delta k)_3$ ersetzbar ist durch $[(f_\Delta f)_2 k]_3$ und Formen J und K. Bilden wir uns nach:

$$\begin{pmatrix} f\, f_\Delta\, k \\ 0\; 3\; 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f\, f_\Delta\, k \\ 0\; 2\; 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f\, f_\Delta\, k \\ 0\; 1\; 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f\, f_\Delta\, k \\ 1\; 1\; 3 \end{pmatrix}$$

die Identitäten:

$$((ff_\Delta)^2 k)^3 + \frac{3}{4}((ff_\Delta)^3 k)^2 + \frac{1}{7}((ff_\Delta)^4 k)_1 = (f_3 f_\Delta)^2 + \frac{1}{3}(f_4 f_\Delta)_1,$$

$$((ff_\varDelta)^3k)^2+\frac{1}{3}((ff_\varDelta)^4k)^1=(f_2f_\varDelta)^3+\frac{3}{4}(f_3f_\varDelta)^2+\frac{1}{7}(f_4f_\varDelta)_1,$$

$$((ff_\varDelta)^4k)^1=(f_1f_\varDelta)^4+\frac{6}{5}(f_2f_\varDelta)^3+\frac{1}{2}(f_3f_\varDelta)^2+\frac{1}{14}(f_4f_\varDelta)_1,$$

$$((ff_\varDelta)^3k)^2=-(f_1f_\varDelta)^4-\frac{3}{5}(f_2f_\varDelta)^3-\frac{1}{12}(f_3f_\varDelta)^2;$$

aus denen wir durch successive Elimination der Ueberschiebungen auf der rechten Seite erhalten:

$$((ff_\varDelta)^4k)^1+((ff_\varDelta)^3k)_2=\frac{3}{5}(f_2f_\varDelta)^3+\frac{5}{12}(f_3f_\varDelta)^2+\frac{1}{14}(f_4f_\varDelta)_1,$$

$$24((ff_\varDelta)^4k)^1+12((ff_\varDelta)^3k)^2=-(f_3f_\varDelta)^2-\frac{3}{7}(f_4f_\varDelta)_1,$$

$$\frac{169}{7}((ff_\varDelta)^4k)_1+\frac{51}{4}((ff_\varDelta)^3k)_2+((ff_\varDelta)^2k)_3=-\frac{2}{21}(f_4f_\varDelta)_1.$$

Da aber, wie man sofort sieht, $((ff_\varDelta)^3k)_2$ aus Formen J, K und solchen, die zerfallen, besteht, so ist $[(ff_\varDelta)^2k]_3$, von eben solchen Formen abgesehen, ein Aggregat von Functionaldeterminanten und mithin wegen Formel (2) und (3) § 2. $(H_\varDelta\Delta)_2$ und $(H_\varDelta\mathsf{T})_3$ auszulassen. Da ferner die durch Faltung aus H und Δ^3 entstehenden Formen einerseits nur i, k, A, andererseits nur Formen K ergeben, so ist $(H\Delta)^4(H\Delta')^4(Hk)^2H_x^2k_x^2$, von den auszulassenden Formen J, K, A abgesehen, ersetzbar durch das Glied:

$$(ab)^2(a\Delta)^4(b\Delta')^4(ak)^2k_x^2b_x^2,$$

das seinerseits durch die Formen $[(f_\varDelta k)^2f_\varDelta]^2$, $[(f_\varDelta k)^3f_\varDelta]^1$ und $(f_\varDelta k)^4f_\varDelta$ ersetzbar ist. Nach $\begin{pmatrix} f_\varDelta & k & f_\varDelta \\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f_\varDelta & k & f_\varDelta \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ erhält man nun:

$$((f_\varDelta k)^2f_\varDelta)^2+((f_\varDelta k)^3f_\varDelta)^1+\frac{1}{3}(f_\varDelta k)^4\cdot f_\varDelta=((f_\varDelta f_\varDelta)^2k)^2+\frac{1}{3}(f_\varDelta f_\varDelta)^4\cdot k,$$

$$\frac{2}{3}((f_\varDelta k)^3f_\varDelta)^1+\frac{1}{3}(f_\varDelta k)^4\cdot f_\varDelta=((f_\varDelta f_\varDelta)^2k)_2+\frac{1}{6}(f_\varDelta f_\varDelta)^4\cdot k,$$

woraus sich sofort ergiebt:

$$((f_\varDelta k)^2f_\varDelta)^2+\frac{1}{3}((f_\varDelta k)^3f_\varDelta)^1=\frac{1}{6}(f_\varDelta f_\varDelta)^4\cdot k,$$

und die Ausscheidbarkeit von $(H\Delta)^4(H\Delta')^4(H\Delta'')^1H_x^3\Delta_x''^3$ und $(H_{\varDelta\varDelta}\mathsf{T})_2$. Es bleiben also von H stammend die Formen:

(1) H_1, H_2, H_3.

(2) H''', $H_\varDelta$, $H_\varDelta'''$, $H_{\varDelta\varDelta}$, $H_{\varDelta\varDelta}''$, $H_{\varDelta\varDelta}'''$, $H_{\varDelta\varDelta\varDelta}$,

(3) $(H\mathsf{T})_4$ $(H\mathsf{T})_5$ $(H\mathsf{T})_6$, $(H_\varDelta\mathsf{T})_4$ $(H_\varDelta\mathsf{T})_5$ $(H_\varDelta\mathsf{T})_6$, $(H_{\varDelta\varDelta}\mathsf{T})_3$ $(H_{\varDelta\varDelta}\mathsf{T})_4$.

§ 4.

Ueberschiebungen von $T = (Hf)^1$.

Selbstredend sind $(Tk)_1$ und $(T\Delta)_1$ auszulassen, $(Tk)_2$ ist aber ersetzbar durch Glieder von der Form:

$$(Hf)(Hk)^2 H_x^9 f_x^7 k_x^2, \quad ((Hf)_2 k)_1 \quad (Hf)_3 \cdot k,$$

oder durch:

$$(H_2 f)_1, \quad H_3 \cdot f, \quad (i \cdot f, k)_1, \quad \Theta \cdot k,$$

wenn man die über die Formen 3. Grades gebrachten Relationen berücksichtigt. Da aber auch H_2 durch zerfallende Formen und Functionaldeterminanten ersetzt werden darf, so besteht T_2 aus einem Aggregat zerfallender Formen und ist demnach auszulassen. Ein Gleiches gilt mithin auch für $(T\mathrm{T})_2$. Betrachten wir nunmehr auch eine jede Ueberschiebung von T als überflüssig, die auf Formen Θ, P, F, K zurückführbar ist, so kann man zeigen, dass alle Ueberschiebungen von T auszulassen sind. T_3 ist ersetzbar durch Glieder:

$$(Hf)(Hk)^3 H_x^8 f_x^7 k_x, \quad ((Hf)_2 k)_2, \quad ((Hf)_3 k)_1, \quad (Hf)_4 \cdot k,$$

oder durch:

$$(H_3 f)_1, \quad (f \cdot i, k)_2, \quad (\Theta k)_1, \quad p \cdot k, \quad f \cdot k^2.$$

Da auch H_3 als ein Aggregat von Functionaldeterminanten dargestellt ist, so besteht auch T_3 aus lauter zerfallenden Gliedern und es ist T_3 mit $(T\Delta)_2$ und $(T\mathrm{T})_3$ auszulassen. T_k ist ersetzbar durch die Glieder

$$(Hf)(Hk)^4 H_x^7 f_x^7, \quad ((Hf)_2 k)_3, \quad ((Hf)_3 k)_2, \quad ((Hf)_4 k)_1, \quad (Hf)_5 \cdot k,$$

oder durch:

$$(H_4 f)_1, \quad (f \cdot i, k)_3, \quad (\Theta k)_2, \quad (pk)_1, \quad (f \cdot k, k)_1, \quad f_1 \cdot k.$$

Berücksichtigen wir den gefundenen Werth von H_4, so gehen diese über in:

(1) $$i_3 \cdot f, \quad (\Theta k)_2, \quad (pk)_1, \quad f_1 \cdot k.$$

Analog nehmen die zu T_3 gehörigen Formen die Gestalt an:

(2) $$H_4 \cdot f, \quad H \cdot f_4, \quad f \cdot i_2, \quad fk^2, \quad \Theta_1, \quad p \cdot k.$$

Hieraus folgt zunächst der Wegfall von T_4 und aller Formen mit dem symbolischen Factor $(Tk)^4$.

Nach Formel (2) § 2. ist aber $(T\Delta)_3$ ersetzbar durch $(T_3 k)_2$ und $(T_4 k)_1$. Das letzte Glied enthält den Factor $(Tk)^4$, ist also nicht zu berücksichtigen. Das erste liefert nach vorstehender Formel (2) Glieder von der Form

$$H_4 \cdot f_2, \quad [(H_4 f)^1 k]_1, \quad (H_4 f)_2 \cdot k,$$
$$H_2 \cdot f_4, \quad [(H f_4)^1 k]_1, \quad (H f_4)_2 \cdot k$$

und Formen

$$f_2 \cdot i_2, \quad \Theta, \quad P, \quad F,$$

ist also auszulassen mit $(T\Delta)^3$. Nach Formel (2) § 2. ist

$$(T\Delta)_4 = -2(T_3 k)_3 + \frac{7}{5}(T_4 k)_2.$$

Das letzte Glied ist wegzulassen, das erste ist äquivalent mit Gliedern von der Form:

$$[(H_4 f)^{1+i}, k]^{2-i},\quad [(H, f_4)^{1+i}, k]^{2-i},\quad H_{k,3}\cdot f,\quad H\cdot f_{k,3},\quad f_3\cdot i_2$$

und Formen

$$\Theta,\ P \text{ und } F.$$

Die beiden ersten Klammergrössen

$$(Hf_4)^{1+i} \text{ und } (H_4 f)^{1+i}$$

geben:

(1) $$(Hf)(fk)^4 \text{ und } (Hf)(Hk)^4,$$

d. i.

$$(Tk)^4,\ (i\cdot f, k)^3,\ (\Theta k)^2,\ (pk)_1 \text{ und } F,$$

(2) $$(Hf)^2(fk)^4 \text{ und } (Hf)^2(Hk)^4$$

d. i.

$$(i\cdot f, k)_4,\ (\Theta k)_3,\ P \text{ und } F,$$

(3) $$(Hf)^3(fk)^4 \text{ und } (Hf)^3(Hk)^4,$$

d. i.

$$(\Theta k)_4,\ P \text{ und } F.$$

Mithin ist $(T\Delta)_4$ äquivalent mit einem Aggregat von Formen $(Tk)^4\cdot Q$, Formen Θ, P, K, F, $(f_m\cdot i_{5-m})$, $(H_{k,3}\cdot f)$, $(H\cdot f_{k,3})$.

Berücksichtigen wir die für H_k gewonnene Form, so liefert $(H_{k,3}\cdot f)$ wieder zerfallende Formen und schon vorhandene Θ, P u. s. w. $((T\Delta)^4\Delta)^i$ giebt deshalb nur durch $[H\cdot f_{k,3}, \Delta]^i$ etwas wesentlich Neues. Diese Ueberschiebung liefert $(H\Delta)^i\cdot f_{k,3}$ und das Glied

$$[(Hf)\, H_x^{11}(fk)^3(fk')^4 k_x, \Delta]^{i-1}.$$

Nun ist aber einmal $(Hf)(fk^2)^7 = (Tk^2)^7 + q((Hf)_2 k^2)^6 + \cdots$ und ferner $(Hf)(fk^2)^7 = (fk)^4(fk')^3(Hf) + (fk)^4(fk')^4\cdot H$. Mithin ist auch das zu untersuchende Glied von der alten Form. Es ist also auch jedes Glied mit dem symbolischen Factor $(T\Delta)_4$ auszulassen. In Folge der sich aus (3) § 3. ergebenden Relationen:

$$(\mathsf{T}T)^4 + \frac{1}{6}C(kT)_3 = -[(kT)_3\Delta]^2 - \frac{7}{8}[(kT)^4\Delta]_1,$$

$$(\mathsf{T}T)^5 + \frac{1}{12}C(kT)_4 = [(kT)_3\Delta]^3 + \frac{13}{16}[(kT)^4\Delta]_2,$$

$$(\mathsf{T}T)^6 = -[(kT)_3\Delta]_4 - \frac{3}{4}[(kT)_4\Delta]_3$$

ergiebt sich, dass $(T\mathsf{T})_4$ und $(T\mathsf{T})^5$ aus denselben Gründen wie $(T\Delta)_3$ und $(T\Delta)_4$ wegzulassen sind. $(T\mathsf{T})_6$ liefert ausser wegzulassenden

Gliedern $[(H, f_k)^{1+i}, \Delta]^{3-i}$ und $H \cdot f_{k\Delta}$. Man folgert daher wie oben bei $(T\Delta)_4$, dass $(T\mathrm{T})_6$ aus einem Aggregat von Formen

$$\Theta, P, K, F, (f_m \cdot i_n)$$

und

$$(H\Delta)^i \cdot f_{k\Delta}$$

besteht und daher auch jedes Glied mit dem symbolischen Factor $(T\mathrm{T})^6$ auszulassen ist.

Diese Untersuchungen wiederholen sich für alle Ueberschiebungen von $S = (Hi)_1$.

§ 5.

Ueberschiebungen von Θ.

Aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Relationen:

$$(1) \quad \Theta_2 + p_1 + \tfrac{1}{26} f_1 \cdot k = (f_2 i) + \tfrac{1}{4} f_3 \cdot i$$

$$(2) \quad p_1 + \tfrac{1}{14} f_1 \cdot k = (f_1 i) + \tfrac{3}{5} (f_2 i)_1 + \tfrac{1}{12} f_3 \cdot i$$

$$(3) \quad \tfrac{1}{7} f_1 \cdot k = (f \cdot k, i)_3 + (f_1 i)_2 + \tfrac{18}{55} (f_2 i)_1 + \tfrac{1}{30} f_3 \cdot i.$$

Aus der Polarenbildung

$$a_x^8 \, k_y^3 \, k_x = \sum \frac{\binom{8}{i}\binom{3}{i}}{\binom{13-i}{i}} (ak)^i_{y^{3-i}} (xy)^i$$

ergiebt sich ferner

$$(4) \quad - f \cdot i_3 = (f \cdot k, i)_3 - 2(f_1, i_2) + \tfrac{84}{55} (f_2 i)_1 - \tfrac{7}{15} f_3 \cdot i.$$

Hieraus erhält man successive:

$$\tfrac{1}{7} f_1 \cdot k + f \cdot i_3 = 3(f_1 i)_2 - \tfrac{6}{5} (f_2 i)_1 + \tfrac{1}{2} f_3 \cdot i,$$

$$\text{I.} \quad 3p_1 + \tfrac{1}{14} f_1 \cdot k - f \cdot i_3 = 3(f_2 i)_1 - \tfrac{1}{4} f_3 \cdot i,$$

$$\text{II.} \quad 3\Theta_2 + \tfrac{4}{91} f_1 \cdot k + f \cdot i_3 = f_3 \cdot i.$$

Mithin ist Θ_2 *wegzulassen und* $(\Theta\mathrm{T})_2$.

Aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, sowie der Polarenentwickelung $a_x^8 \cdot k_y^4$ ergeben sich die Relationen:

$$
\begin{aligned}
\Theta_3 + \tfrac{3}{2}p_2 + \tfrac{21}{26}[(fi)^3k]_1 + \tfrac{7}{44}(fi)_4\cdot k &= (f_3 i)_1 + \tfrac{1}{6}f_4\cdot i,\\
p_2 + [(fi)^3k]_1 + \tfrac{3}{11}(fi)_4\cdot k &= (f_2 i)_2 + \tfrac{1}{2}(f_3 i)_1 + \tfrac{1}{21}f_4\cdot i,\\
[(fi)^3k]_1 + \tfrac{1}{2}(fi)_4\cdot k &= (f_1 i)_3 + \tfrac{9}{10}(f_2 i)_2 + \tfrac{1}{4}(f_3 i)_1 + \tfrac{1}{56}f_4\cdot i,\\
(fi)_4\cdot k &= (f\cdot k, i)_4 + \tfrac{4}{3}(f_1 i)_3 + \tfrac{36}{55}(f_2 i)_2 + \tfrac{2}{15}(f_3 i)_1 + \tfrac{1}{126}f_4\cdot i,\\
f\cdot i_4 &= (f\cdot k, i)_4 - \tfrac{8}{3}(f_1 i)_3 + \tfrac{168}{55}(f_2 i)_2 - \tfrac{28}{15}(f_3 i)_1 + \tfrac{5}{9}f_4\cdot i.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhält man successive:

$$
\begin{aligned}
(fi)_4\cdot k - f\cdot i_4 &= 4(f_1 i)_3 - \tfrac{12}{5}(f_2 i)_2 + 2(f_3 i)_1 - \tfrac{23}{42}f_4\cdot i.\\
4[(fi)_3 k]_1 + (fi)_4\cdot k + f\cdot i_4 &= 6(f_2 i)_2 - 1(f_3 i)_1 + \tfrac{23}{21}f_4\cdot i,\\
6p_2 + 2[(fi)_3 k]_1 + \tfrac{7}{11}(fi)_4\cdot k - f\cdot i_4 &= 4(f_3 i)_1 - \tfrac{1}{3}f_4\cdot i,\\
4\Theta_3 \quad + \tfrac{16}{13}[(fi)_3 k]_1 \qquad + f\cdot i_4 &= f_4\cdot i;
\end{aligned}
$$

oder durch Einsetzung von $(fi)_3 = \frac{1}{7}f_1$ und Entwickelung von $(f_1 k)_1$:

$$\text{III.} \qquad 4\Theta_3 = f_4\cdot i - f\cdot i_4 - \frac{16}{97}\left(\frac{7}{10}f_2\cdot k - \frac{1}{2}f\Delta\right).$$

Es ist mithin Θ_3, $(\Theta\Delta)_2$ $(\Theta\mathrm{T})_3$ und $(p\Delta)_1$ $(p\mathrm{T})_2$ auszulassen.

Man kann aber $(\Theta\Delta)_2$ d. i. Θ'' und Θ''' wie p'' analog entwickeln, und mithin sind auch Θ'', Θ''' fortfallend.

Zur Bildung von $(\Theta k)_4$ haben wir aus:

$$\begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

und der Polarentwickelung

$$f_x^7\, f_y\, k_y^4$$

$$
\begin{aligned}
&\Theta_4 + 2p_3 + \tfrac{21}{13}[(fi)^3k]_2 + \tfrac{7}{11}[(fi)^4k]_1 + \tfrac{7}{66}(fi)^5\cdot k = (f_4 i),\\
&p_3 + \tfrac{3}{2}[(fi)^3k]_2 + \tfrac{9}{11}[(fi)^4k]_1 + \tfrac{1}{6}(fi)^5\cdot k = (f_3 i)_2 + \tfrac{1}{3}(f_4 i)_1,\\
&[(fi)^3k]_2 + [(fi)^4k]_1 + \tfrac{5}{18}(fi)^5\cdot k = (f_2 i)_3 + \tfrac{3}{4}(f_3 i)_2 + \tfrac{1}{7}(f_4 i)_1,\\
&[(fi)^4k]_1 + \tfrac{1}{2}(fi)^5\cdot k = (f_1 i)_4 + \tfrac{6}{5}(f_2 i)_3 + \tfrac{1}{2}(f_3 i)_2 + \tfrac{1}{14}(f_4 i)_1,\\
&(fi)^5\cdot k = (f\cdot k, i)_5 + \tfrac{5}{3}(f_1 i)_4 + \tfrac{12}{11}(f_2 i)_3 + \tfrac{1}{3}(f_3 i)_2 + \tfrac{5}{126}(f_4 i)_1,\\
&-(i_4 f)_1 = (f\cdot k, i)_5 - \tfrac{7}{3}(f_1 i)_4 + \tfrac{7\cdot 18}{11\cdot 5}(f_2 i)_3 - \tfrac{7}{6}(f_3 i)_3 + \tfrac{5}{18}(f_4 i)_1.
\end{aligned}
$$

Aus diesen erhält man successive:

$$
\begin{aligned}
&(fi)_5 \cdot k + (i_4 f)_1 = 4(f_1 i)_4 - \tfrac{6}{5}(f_2 i)_3 + \tfrac{3}{2}(f_3 i)_2 - \tfrac{5}{21}(f_4 i)_1, \\
&4[(fi)^4 k]_1 + (fi)_5 \cdot k - (i_4 f)_1 = 6(f_2 i)_3 + \tfrac{1}{2}(f_3 i)_2 + \tfrac{11}{21}(f_4 i)_1, \\
&6[(fi)^3 k]_2 + 2[(fi)^4 k]_1 + \tfrac{2}{3}(fi)^5 \cdot k + (i_4 f)_1 = 4(f_3 i)_2 + \tfrac{1}{3}(f_4 i)_1, \\
&4p_3 + \tfrac{14}{11}[(fi)^4 k]_1 - (i_4 f)_1 \qquad\qquad\qquad = (f_4 i)_1, \\
&2\Theta_4 + \tfrac{42}{13}[(fi)^3 k]_2 + \tfrac{7}{33}(fi)_5 \cdot k + (i_4 f)_1 = (f_4 i)_1 .
\end{aligned}
$$

Ersetzt man $(fi)^3$ und $(fi)^5$ resp. durch $\frac{1}{7} f_1$ und $-\frac{6}{7} f_3$ und berücksichtigt die aus $\begin{pmatrix} f & k & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ folgende Relation:

$$(f_1 k)_2 = \frac{2}{5}(f_2 k)_1 + \frac{1}{6} f_3 \cdot k,$$

so geht die Gleichung für Θ_4 über in:

$$2\Theta_4 + \frac{12}{65}(f_2 k)_1 - \frac{15}{143} f_3 \cdot k + (i_4 f)_1 - (f_4 i)_1 = 0.$$

Es ist daher nicht nur Θ_4 sondern auch p_3 Functionaldeterminante, wonach also $(\Theta_4 k)_1$ $(\Theta_4 \Delta)_1$ $(p\Delta)_2$ und $(p\mathsf{T})_3$ auszulassen sind. Wir können endlich auch sagen, Θ_4 ist bis auf p_3 und Formen F durch $(f_4 i)_1$ oder $(i_4 f)_1$ darstellbar. Ebenso ist p_4, was aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ oder

$$\sum \frac{\binom{6}{i}\binom{4}{i}}{\binom{13-i}{i}} [(fi)^{2+i} k]^{4-i} = (f_4 i)_2$$

sofort folgt, durch Formen F ausdrückbar und $(f_4 i)_2$ oder $(i_4 f)^2$. Aus

$$\begin{pmatrix} f_4 & i & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_4 & i & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_4 & i & k \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & i & f_4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

folgt aber ($f_4 = \varphi$ gesetzt):

$$
\begin{aligned}
&[(f_4 i)^1 k]^2 + \tfrac{7}{5}[(f_4 i)^2 k]_1 + \tfrac{7}{12}(f_4 i)_3 \cdot k = (\varphi_2 i)_1 + \tfrac{1}{2}\varphi_3 \cdot i, \\
&[(f_4 i)^2 k]_1 + \tfrac{3}{4}(f_4 i)^3 \cdot k = (\varphi_1 i)_2 + (\varphi_2 i)_1 + \tfrac{3}{10}\varphi_3 \cdot i, \\
&(f_4 i)^3 \cdot k = (\varphi \cdot k, i)_3 + \tfrac{3}{2}(\varphi_1 i)_2 + \tfrac{6}{7}(\varphi_2 i)_1 + \tfrac{1}{5}\varphi_3 \cdot i, \\
&-\varphi \cdot i_3 = (k \cdot \varphi, i)_3 - \tfrac{3}{2}(\varphi_1 i)_2 + \tfrac{6}{7}(\varphi_2 i)_1 - \tfrac{1}{5}\varphi_3 \cdot i.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich der Reihe nach die Gleichungen:

$$(\varphi i)_3 \cdot k + \varphi \cdot i_3 = 3(\varphi_1 i)_2 + \frac{2}{5}\varphi_3 \cdot i,$$

$$3((\varphi i)^2 k)_1 + \frac{5}{4}(\varphi i)^3 \cdot k - \varphi \cdot i_3 = 3(\varphi_2 i)_1 + \frac{1}{2}\varphi_3 \cdot i,$$

$$3[(\varphi i)^1 k]_2 + \frac{6}{5}[(\varphi i)^2 k]_1 + \frac{1}{2}(\varphi i)^3 \cdot k + \varphi \cdot i_3 = \varphi_3 \cdot i.$$

Es ist daher $(\Theta_4 k)_2$ durch Formen P, F und zerfallendende Glieder ausdrückbar, mithin wegzulassen. Dieselbe Entwickelung ist für $(\Theta_\Delta k)_2$ und $(\Theta_k \Delta)_2$ möglich.

Endlich findet man aus

$$\begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k & i & \varphi\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}:$$

$$((\varphi i)^1 k)_3 + \frac{21}{10}((\varphi i)^2 k)_2 + \frac{7}{4}((\varphi i)^2 k)_1 + \frac{5}{8}(\varphi i)_4 \cdot k = (\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{2}\varphi_4 \cdot i,$$

$$((\varphi i)^2 k)_2 + \frac{3}{2}((\varphi i)^3 k)_1 + \frac{5}{7}(\varphi i)^4 \cdot k = (\varphi_2 i)_2 + (\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{3}\varphi_4 \cdot i,$$

$$((\varphi i)^3 k)_1 + \frac{5}{6}(\varphi i)^4 \cdot k = (\varphi_1 i)_3 + \frac{3}{2}(\varphi_2 i)_2 + \frac{9}{10}(\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{4}\varphi_4 \cdot i,$$

$$(\varphi i)^4 \cdot k = (\varphi \cdot k, i)_4 + 2(\varphi_1 i)_3 + \frac{12}{7}(\varphi_2 i)_2 + \frac{4}{5}(\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{5}\varphi_4 \cdot i,$$

$$i_4 \cdot \varphi = (\varphi \cdot k, i)_4 - 2(\varphi_1 i)_3 + \frac{12}{7}(\varphi_2 i)_2 - \frac{4}{5}(\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{5}\varphi_4 \cdot i.$$

Hieraus ergiebt sich successive:

$$(\varphi i)_4 \cdot k - i_4 \cdot \varphi = 4(\varphi_1 i)_3 + \frac{8}{5}(\varphi_3 i),$$

$$\frac{7}{3}(\varphi i)_4 \cdot k + 4((\varphi i)^3 k)_1 + i_4 \cdot \varphi = 6(\varphi_2 i)_2 + 2(\varphi_3 i)_1 + \varphi_4 \cdot i,$$

$$\frac{41}{21}(\varphi i)_4 \cdot k + 5((\varphi i)^3 k)_1 + 6((\varphi i)^2 k)_2 - i_4 \cdot \varphi = 4(\varphi_3 i)_1 + \varphi_4 \cdot i,$$

$$\frac{23}{42}(\varphi i)_4 \cdot k + 2((\varphi i)^3 k)_1 + \frac{12}{5}((\varphi i)^2 k)_2 + 4((\varphi i)^1 k)_3 + i_4 \cdot \varphi = \varphi_4 \cdot i.$$

Wegen $(\varphi i)_3 = (ak)^4 (ai)^3 a_x i_x^5$ und $(fi)_3 = \frac{1}{7} f_1$ u. s. w. ist mithin $(\Theta_4 k)_3$ durch Formen F, P und zerfallende Formen darstellbar. Dieselbe Entwickelung ist für $(\Theta_\Delta k)_3$, $(\Theta_k \Delta)_3$ $(\Theta_\Delta \Delta)_3$ möglich. Zugleich folgt hieraus, dass von Formen F und zerfallenden Formen abgesehen $(p_4 k)_2$ durch Functionaldeterminanten ersetzbar ist. Es ist also auch $(p_4 \Delta)_1$ $(p_4 \mathrm{T})_2$ und ebenso $(p_\Delta \Delta)_1$ und $(p_\Delta \mathrm{T})_2$ überflüssig.

Die 4. Relation (2) § 2. bedingt nunmehr auch das Fortfallen von $(\Theta \Delta)_4$; denn das letzte Glied liefert nach Obigem nur wegzulassende Formen. $(\Theta_3 k)_3$ ergiebt aber ausser Formen $F: (f_4 \cdot i, k)_3$ und $(f \cdot i_4, k)_3$. Entwickeln wir aber $f_{4x}^4\, i_y^3\, i_x^5$ oder $i_{4x}^4\, f_y^3\, f_x^5$ und ersetzen in dem Resultat die y durch k, so erhalten wir:

$$f_4 \cdot i_3 = [(f_4 i)^0 k]_3$$

und Glieder

$$[(f_4 i)^1 k]_2,\ [(f_4 i)^2 k]_1,\ (f_4 i)^3 \cdot k,$$

d. h. es ist

$$(f_4\, i, k)_3 = f_4 \cdot i_3 + (\Theta_4 k)_2 + (p_4 k)_1 + P + F.$$

Dasselbe ergiebt sich für $(i_4 \cdot f, k)_3$ aus der zweiten Darstellung von Θ_4, woraus die Ueberflüssigkeit *von* (Θ_Δ) *ohne* Weiteres folgt. Ebenso liefert: $(\Theta\mathsf{T})_4$, $(\Theta\mathsf{T})_5$, $(\Theta\mathsf{T})_6$ ausser zerfallenden Formen resp.: $(\Theta_3\Delta)_2$ und $(\Theta_4\Delta)_1$, $(\Theta_3\Delta)_3$ und $(\Theta_4\Delta)_2$, $(\Theta_3\Delta)_4$ und $(\Theta_4\Delta)_3$ oder mit Hinzuziehung des Ausdruckes für Θ_3 und Hinweglassung von Formen P und F nur die schon untersuchten:

$$(\Theta_4\Delta)_1\ (\Theta_4\Delta)_2\ (\Theta_4\Delta)_3.$$

Mithin sind auch *alle Formen* $(\Theta\mathsf{T})^\varrho$ auszulassen.

Nach Analogie der Entwickelung von $(H_\Delta k)_3$ erhält man aus:

$$\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die Gleichung:

$$\frac{169}{7}((if_k)^4 k)_1 + \frac{51}{4}((if_k)^3 k)_2 + ((if_k)^2 k)_3 = -\frac{2}{21}(i_4 f_k)_1.$$

Es ist also $(p_4 k)_3$ bis auf Formen F Functionaldeterminante und mithin $(p_4\Delta)_2$ und $(p_4\mathsf{T})_3$ auszulassen und mit diesen $(p_\Delta\Delta)_2$, $[p_\Delta\mathsf{T}]_3$. Verbindet man hiemit noch die aus $\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ resultirende Gleichung:

$$((if_k)^1 k)_4 + \frac{6}{5}((if_k)^2 k)_3 + \frac{1}{2}((if_k)^3 k)_2 + \frac{1}{14}((if)^4 k)_1 = (i_4 f_4)_1,$$

so ergiebt sich, dass auch $(\Theta_4 k)_4$ auf Formen P und F zurückzuführen und mithin auszulassen ist. Dieselbe Entwickelung ist auch *für* $(\Theta_4\Delta)_4$ *möglich*, und da auch schon $(\Theta\mathsf{T})_6$ als hinwegfallend erkannt ist und alle höheren Ueberschiebungen von Θ sich aus $(\Theta_4 k)_4$, $(\Theta_4\Delta)_4$ und Θ_Δ resultiren, so folgt sofort die Ueberflüssigkeit aller weiteren Formen Θ.

Hieran schliesst sich noch die Betrachtung der restirenden Formen P. Da p_4 durch $(f_4 i)^2$ und Formen F ersetzbar ist, so wird p_8 gleich einem Aggregat von Formen:

$$[(f_4 i)^2 (ik)^4 f_{4x}^2 i_x{}^2],\ [(f_4 i)^3, k]^3,\ [(f_4 i)^4, k]_2;$$

da aber die beiden letzten die symbolischen Factoren $(ai)^3$ und $(ai)^4$ besitzen, so ist p_8 durch $(f_4 i_4)^2$ ersetzbar.

Aus $\begin{pmatrix} f_4 & i_4 & k \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f_4 & i_4 & k \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f_4 & i_4 & k \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} k & i_4 & f_4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$(f_4 = \varphi,\ i_4 = \psi),$$

$$[(f_4 i_4)^2 k]_2 + [(f_4 i_4)^3 k]_1 + \frac{1}{3}(f_4 i_4)^4 k = (\varphi_2 \psi)_2 + (\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{3}\varphi_4 \cdot \psi,$$

$$[(f_4 i_4)^3 k]_1 + \frac{1}{2}[f_4 i_4]^4 \cdot k = (\varphi_1 \psi)_3 + \frac{3}{2}(\varphi_2 \psi)_2 + \frac{9}{10}(\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{4}\varphi_4 \cdot \psi,$$

$$[f_4 i_4]^4 \cdot k = [\varphi \cdot k, \psi]_4 + 2(\varphi_1 \psi)_3 + \frac{12}{7}(\varphi_2 \psi)_3 + \frac{4}{5}(\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{5}\varphi_4 \cdot \psi,$$

$$\psi_4 \cdot \varphi = [\varphi \cdot k, \psi]_4 - (\varphi_1 \psi)_3 + \frac{12}{7}(\varphi_2 \psi)_3 - \frac{4}{5}(\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{5}\varphi_4 \cdot \psi,$$

und hieraus sofort durch Elimination der Glieder auf der rechten Seite

$$6[(f_4 i_4)^2 k]_2 + 2[(f_4 i_4)^3 k]_1 + (f_4 i_4)^4 \cdot k - \psi_4 \cdot f_4 = 4(\varphi_3 \psi)_1 + \varphi_4 \cdot \psi.$$

Es ist mithin $(p_8 k)_2$ bis auf auszulassende und zerfallende Formen Functionaldeterminante. Es fällt daher

$$(p_8 \Delta)_1 \ (p_8 \mathrm{T})_2 \text{ und } (p_{\Delta\Delta} \Delta)_1 \ (p_{\Delta\Delta} \mathrm{T})_2$$

aus demselben Grunde aus.

§ 6.

Entwickelung von p_4.

Aus $\begin{pmatrix} f & i & f \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ erhält man mit Benützung der Relationen zwischen den Formen 3. Gerades:

$$-(f_3 f)_5 + \frac{1}{8}(f_4 f)_4 = \frac{7}{4}(ii)_6 + \frac{5}{24} i_4$$

und

$$(f_3 f)_5 + \frac{5}{6}(f_4 f)_4 = \frac{3}{2}\Delta + \frac{1}{4} Ak$$

oder

$$\frac{23}{24}(f_4 f)_4 = \frac{3}{2}\Delta + \frac{7}{4}(ii)_6 + \frac{5}{24} i_4 + \frac{1}{4} Ak$$

oder

$$(f_4 f)_4 = \frac{36}{23}\Delta + \frac{42}{23}(ii)_6 + \frac{5}{23} i_4 + \frac{6}{23} Ak.$$

Aus $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ erhält man aber auch:

$$(f_4 f)_4 = i_4 + \frac{12}{7}\Delta + \frac{1}{5} Ak$$

und endlich:

$$(ii)_6 = \frac{3}{7} i_4 + \frac{4}{49}\Delta - \frac{1}{30} Ak.$$

Ebenso ist

$$(ii)_8 = (ab)^4 (ai)^4 (bi)^4 = [(fi)^4 f]_8 = -\frac{4}{35}(f_2 f)_8 + \frac{1}{30} A^2$$

$$= -\frac{4}{35}(ak)^2 (ab)^6 (kb)^2 + \frac{1}{30} A^2 = -\frac{4}{35} C + \frac{1}{30} A^2,$$

also

$$(ii)_8 = -\frac{4}{35}C + \frac{1}{30}A^2.$$

Nun folgt aus $\begin{pmatrix} i & i & f \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$:

$$\frac{3}{2}[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{4}(ii)_8 \cdot f = -[(fi)_3 i]_5 + \frac{5}{2}[(fi)_4 i]_4 - \frac{25}{9}[(fi)^5 i]_3$$
$$\frac{25}{14}[(fi)^6 i]_2 + \frac{1}{6}B \cdot i.$$

Da aber aus $\begin{pmatrix} f & i & i \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ die Relation sich ergiebt:

$$[(fi)^3 i]_5 = -\frac{5}{2}[(fi)^4 i]_4 - \frac{16}{9}[(fi)^5 i]_3 - \frac{2}{7}[(fi)^6 i]_2 + \frac{1}{12}Bi,$$

so geht die vorhergehende über in:

$$\frac{3}{2}[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{4}(ii)_8 f = 5[(fi)^4 i]_4 - [(fi)^5 i]_3 + \frac{29}{4}[(fi)^6 i]_2 + \frac{1}{12}Bi.$$

Ersetzen wir hierin die $(fi)^k$ durch f_ϱ auf bekannte Weise, so wird sie zu:

$$\frac{3}{2}[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{4}(ii)_8 f = -\frac{4}{7}(f_2 i)_4 + \frac{1}{6}A(fi)_4 + \frac{6}{7}(f_3 i)_3$$
$$+ \frac{87}{14^2}(f_4 i)_2 + \frac{1}{12}Bi.$$

Berücksichtigen wir aber die beiden aus $\begin{pmatrix} f & k & i \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f & k & i \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ folgenden Relationen:

$$(f_2 i)_4 + (f_3 i)_3 + \frac{2}{7}(f_4 i)_2 = [(fi)^4 k]_2 + [(fi)^5 k]_1 + \frac{2}{7}(fi)^6 k,$$
$$(f_3 i)_3 + \frac{1}{2}(f_4 i)_2 = [(fi)^3 k]_3 + \frac{3}{2}[(fi)^4 k]_2 + \frac{5}{6}[(fi)^5 k]_1 + \frac{5}{28}(fi)^6 k,$$

so geht sie über in die Form:

$$[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{6}(ii)_8 f - \frac{1}{9}A(fi)_4 - \frac{1}{18}Bi - \frac{20}{21}[(fi)_3 k]_3$$
$$-\frac{22}{21}[(fi)^4 k]_2 - \frac{26}{63}[(fi)^5 k]_1 - \frac{3}{49}(fi)^6 \cdot k = -\frac{1}{14}(f_4 i)_2.$$

Setzen wir hierin die oben gefundenen Werthe für $(ii)_6$ und $(ii)_8$, so erhalten wir eine Relation zwischen

$$(f_4 i)_2 \quad \text{und} \quad (i_4 f)_2$$

$$3[i_4 f]_2 + \frac{4}{7}(f\Delta)_2 - \frac{2}{15}Cf - \frac{7}{18}Bi - \frac{20}{3}[(fi)^3 k]_3 - \frac{22}{3}[(fi)^4 k]_2$$
$$-\frac{26}{9}[(fi)^5 k]_1 - \frac{3}{7}(fi)^6 k - \frac{13}{90}Af_2 + \frac{7}{540}A^2 f = -\frac{1}{2}(f_4 i)_2.$$

Combiniren wir aber die beiden aus $\binom{i\;k\;f}{0\;2\;4}$ und $\binom{f\;i\;k}{0\;4\;2}$ resultirenden Formeln:

$$p_4 - 2[(fi)^3k]_3 + \frac{18}{11}[(fi)^4k]_2 - \frac{2}{3}[(fi)^5k]_1 + \frac{5}{42}(fi)^6 \cdot k = (i_4f)_2$$

und

$$p_4 + 2[(fi)^3k]_3 + \frac{18}{11}[(fi)^4k]_2 + \frac{2}{3}[(fi)^5k]_1 + \frac{5}{42}(fi)^6k = (f_4i)_2,$$

so erhalten wir eine zweite Relation zwischen $(i_4f)_2$ und $(f_4i)_2$

$$(f_4i)_2 = (i_4f)_2 + 4[(fi)^3k]_3 + \frac{4}{3}[(fi)^5k]_1.$$

Berechnen wir hieraus $(i_4f)_2$ und setzen diesen Werth in die erste der vorstehenden Darstellungen von p_4 ein, so wird endlich:

$$p_4 = -\frac{8}{49}(f\Delta)_2 + \frac{4}{105}Cf + \frac{1}{9}Bi + \frac{13}{315}Af_2 - \frac{1}{270}A^2f$$
$$+ \frac{10}{3}[(fi)^3k]_3 + \frac{106}{231}[(fi)^4k]_2 + \frac{82}{63}[(fi)^5k]_1 + \frac{1}{294}(fi)^6k.$$

Es ist hiermit der Nachweis geliefert, dass p_4 *als ein Aggregat von zerfallenden Formen und Formen* F dargestellt werden kann.

Bei einer schliesslichen Darstellung von p_4 durch andere Formen des vollständigen Systems wäre $[(fi)^3k]_3$, $[(fi)^4k]_2$, $[(fi)^5k]_1$, $(fi)^6$ resp. durch:

$$\frac{1}{7}(f_1k)_3, \quad -\frac{4}{35}(f_2k)_2 + \frac{1}{30}Af_2, \quad -\frac{6}{7}(f_3k)_1, \quad \frac{3}{14}f_4$$

zu ersetzen. Die hier auftretenden Ausdrücke $(f_1k)_3$, $(f_2k)_2$, $(f_3k)_1$ ergeben sich leicht aus $\binom{k\;f\;k}{0\;1\;3}$ $\binom{k\;f\;k}{0\;2\;2}$ $\binom{k\;f\;k}{0\;3\;1}$ in der Form

$$\begin{cases} (f_1k)_3 = \frac{7}{24}f_4k - \frac{3}{20}Cf, \\ (f_2k)_2 = \frac{15}{28}f_4k - \frac{1}{24}Cf - \frac{5}{4}(f\Delta)_2, \\ (f_3k)_1 = \frac{5}{6}f_4k - \frac{1}{4}Cf - \frac{3}{2}(f\Delta)_2, \end{cases}$$

so dass endlich p_4 als Aggregat der Formen

$$f'', \; f_4 \cdot k, \; Cf, \; Bi, \; Af_2, \; A^2f$$

erscheint.

Es sind also auch alle Formen mit dem symbolischen Factor $(pk)^4$ auszulassen. Es bleiben mithin von Unterschiebungen mit p:

$$p$$
$$p_1,\; p_2,\; p_3,\; p''',\; p_\Delta,\; p'''_\Delta,\; p_{\Delta\Delta},\; p''_{\Delta\Delta},\; p'''_{\Delta\Delta},\; p_{\Delta\Delta\Delta},$$
$$(p\mathsf{T})_4\; (p\mathsf{T})_5\; (p\mathsf{T})_6,\; (p_\Delta\mathsf{T})_4\; (p_\Delta\mathsf{T})_5\; (p_\Delta\mathsf{T})_6,\; (p_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_3\; (p_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_4.$$

§ 7.

Ueberschiebungen von Producten $P_f = f^{\alpha_1} \cdot H^{\alpha_2} \cdot T^{\alpha_3} \cdot i^{\alpha_4} \cdot \Theta^{\alpha_5} \cdot S^{\alpha_6} \cdot p^{\alpha_7}$ über Producte $P_k = k^{\beta_1} \cdot \Delta^{\beta_2} \cdot \mathsf{T}^{\beta_3}$.

Jede Ueberschiebung von der Form:

$$[P_f,\ k\mathsf{T}]^\varrho \quad \text{und} \quad [P_f,\ \Delta\mathsf{T}]^\varrho$$

ist auszulassen, da sie ein zerfallendes Glied von der Form $f_4 \cdot (H\mathsf{T})^6 \cdot P_f$ enthält. Es ist ferner jede Ueberschiebung

$$[P_f,\ k^2 \cdot P_k]^\varrho;\ [P_f,\ k\Delta \cdot P_k]^\varrho;\ [P_f,\ \Delta^2 P_k]^\varrho$$

überflüssig, sobald P_f den wirklichen Factor f oder i enthält, da ein Theil der Ueberschiebung eine Invariante von der Form f_{kk}, $i_{k\Delta}$ u. s. w. zum Factor hat. Die Ueberschiebungen:

$$[P_f,\ k^2\mathsf{T}]^\varrho,\quad [P_f,\ k\Delta\mathsf{T}]^\varrho,\quad [P_f,\ \Delta^2\mathsf{T}]^\varrho$$

fallen aus: weil man T und den anderen Factor von P_k auf zwei verschiedene Factoren von P_f vertheilen kann und man hierdurch einen zerfallenden Theil erhält. Alle Ueberschiebungen:

$$[P_f,\ k^3 P_k]^\varrho;\ [P_f,\ k^2 \Delta P_k]^\varrho \text{ u. s. w.}$$

fallen aus, sobald P_f H oder p zum Factor hat. Es bleiben daher nur Ueberschiebungen von der Form:

$$[\Theta^{\alpha_1} \cdot T^{\alpha_2} \cdot S^{\alpha_3},\ T_k]^\varrho$$

zu untersuchen. Wegen der Ordnung der Covarianten Θ_x^{14}, T_x^{18}, S_x^{18} und der Zahlengleichengleichungen $14 = 2 \cdot 4 + 6$ und $18 = 3 \cdot 4 + 6$ enthalten diese aber stets ein zerfallendes Glied, sobald P_k den Factor $\mathsf{T}_x{}^6$ enthält. Es bleiben daher nur Ueberschiebungen von der Form

$$[\Theta^{\alpha_1} \cdot T^{\alpha_2} \cdot S^{\alpha_3},\ k^{\beta_1}\,\Delta^{\beta_2}]^\varrho$$

übrig, oder wegen der Zahlengleichungen $2 \cdot 14 = 7 \cdot 4$, $2 \cdot 18 = 4 \cdot 9$ und $14 + 18 = 4 \cdot 8$ nur die Ueberschiebungen:

$$[\Theta^2,\ P_k]^\varrho,\ [\Theta T,\ P_k]^\varrho,\ [T^2,\ P_k]^\varrho \text{ u. s. w.}$$

Nun ist aber nach Clebsch's „Binären Formen" pag. 119

$$\Theta^2 = -\frac{1}{2}\,[H \cdot i^2 - 2p \cdot f \cdot i + (ii)^2 \cdot f^2].$$

Es führt also $[\Theta^2,\ P_k]^\varrho$ von schon untersuchten Ueberschiebungen abgesehen auf: $[(ii)_2 \cdot f^2,\ P_k]^\varrho$. Eine Abzählung ergiebt aber, dass $(ii)_2$ durch die Formen: H_2, $f \cdot f_4$, $A \cdot H$, ki linear dargestellt werden kann,

also $[(ii)_2 f^2, P_k]^\varrho$ durch $[H_2, P_k]^\varrho$, $[f\cdot f_4, P_k]^\varrho$, $[AH, P_k]^\varrho$ und $[k\cdot i, P_k]^\varrho$ ausdrückbar ist. Wir können nun nicht direct sagen, dass auch diese durch Theile ersetzt werden dürfen, da sie nicht in dem Schema $[P_f, P_k]^\varrho$ enthalten sind. Die dritte ist allerdings in diesem Schema enthalten; die anderen können aber durch Ueberschiebungen von der Form

$$[H, P_k]^{\varrho_1}\,[f^2, P_k]^{\varrho_2}\,[i, P_k]^{\varrho_3}$$

ersetzt werden und sind mit diesen auszulassen. (Vergleiche Clebsch pag. 276.]

Es ist ferner

$$T^2 = -\frac{1}{2}\,[(HH)_2\cdot f^2 - 2(Hf)^2\cdot H\cdot f + H^3],$$

und da

$$(HH)_2 = m_1 pf + m_2\cdot Hi + m_3 f^2 k, \quad (Hf)_2 = \frac{5}{22}\,if$$

ist, so führt $[T^2, P_k)^\varrho$ auf frühere Productenüberschiebungen und $[f^2{\cdot}k, P_k)^\varrho$ zurück; aber auch das letztere ist durch Formen $[f^2, P_k]^{\varrho_1}$ darstellbar.

Ebenso ist

$$S^2 = -\frac{1}{2}\,[(HH)_2\, i^2 - 2(Hi)^2\, Hi + (ii)^2\, H^2]$$

auszulassen, da

$$(Hi)^2 = m_1 f\cdot f_2 + m_2 i^2 + m_3\, Hk + m_4\, Af^2$$

ist.

Analog erhält man:

$$\Theta\cdot T = -\frac{1}{2}\,[(Hf)^2\, if - H^2 i - (Hi)^2\cdot f^2 + pfH],$$

$$\Theta\cdot S = -\frac{1}{2}\,[(Hf)^2\cdot i^2 - piH - (Hi)^2\cdot fi + (ii)_2 f\cdot H],$$

$$S\cdot T = -\frac{1}{2}\,[(HH)_2\cdot fi - (Hi)_2 fH - (Hf)_2\, Hi + pH^2];$$

und beweist dann analog dem Obigen auch die Auslassbarkeit der Ueberschiebungen dieser Producte über P_k.

§ 8.

Aufstellung des vollen Systems.

Wir können nunmehr zur Aufstellung des vollen Systems schreiten, womit natürlich nicht gesagt ist, dass auch unter den restirenden Formen eine oder die andere auszulassen ist.

1. *Formen* *1. Grades:* f.
2. *Formen* *2. Grades:* H, i, k, A.
3. *Formen* *3. Grades:* Θ, p, T, B, f_1, f_2, f_3, f_4.
4. *Formen* *4. Grades:* S, Δ, H_1, H_2, H_3, i_1, i_2, i_3, i_4, C.
5. *Formen* *5. Grades:* Θ_4, p_1, p_2, p_3, $f_{k,1}$, $f_{k,2}$, $f_{k,3}$, $f_{k,k}$, f', f'', f''', f_Δ.
6. *Formen* *6. Grades:* T, D, $i_{k,1}$, $i_{k,2}$, $i_{k,3}$, $i_{k,k}$, H''', H_Δ, i', i'', i''', i_Δ.
7. *Formen* *7. Grades:* p''', p_Δ, f_k', f_k'', f_k''', $f_{k\Delta}$, $(f\mathsf{T})^{2+i}$, ($i=0$ bis $i=4$).
8. *Formen* *8. Grades:* i_k', i_k'', i_k''', $i_{k\Delta}$, $(H\mathsf{T})^{4+i}$, $(i\mathsf{T})^{2+i}$.
9. *Formen* *9. Grades:* $(p\mathsf{T})^{4+i}$, $(f_k\mathsf{T})^{3+i}$, f_Δ', f_Δ'', f_Δ''', $f_{\Delta\Delta}$.
10. *Formen* *10. Grades:* $(i_k\mathsf{T})^{3+i}_{i=0,\, i=1}$, H_Δ''', $H_{\Delta\Delta}$, i_Δ', i_Δ'', i_Δ''', $i_{\Delta\Delta}$.
11. *Formen* *11. Grades:* p_Δ''', $p_{\Delta\Delta}$, $(f_\Delta\mathsf{T})^3$, $(f_\Delta\mathsf{T})^4$.
12. *Formen* *12. Grades:* $(H_\Delta\mathsf{T})^{4+i}$, $(i_\Delta\mathsf{T})^3$, $(i_\Delta\mathsf{T})^4$.
13. *Formen* *13. Grades:* $(p_\Delta\mathsf{T})^{4+i}$.
14. *Formen* *14. Grades:* $H_{\Delta\Delta}''$, $H_{\Delta\Delta}'''$, $H_{\Delta\Delta\Delta}$.
15. *Formen* *15. Grades:* $p_{\Delta\Delta}''$, $p_{\Delta\Delta}'''$, $p_{\Delta\Delta}$.
16. *Formen* *16. Grades:* $(H_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_3$, $(H_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_4$.
17. *Formen* *17. Grades:* $(p_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_3$, $(p_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_4$.*)

Darmstadt, Februar 1880.

---

*) Anm. der Red. Dem Herrn Verf. sind die neueren Untersuchungen Sylvester's über vollständige Formensysteme unzugänglich gewesen. In einer auf p. 223 des zweiten Bandes des American Journal of Mathematics abgedruckten Tabelle giebt Sylvester die Zahl der Grundformen des zur binären Form 8. Ordnung gehörigen Systems auf 70, ausserdem Grad und Ordnung der Grundformen an. Es wird eine wichtige und dankenswerthe Aufgabe sein, die von Herrn v. Gall entwickelten Ueberlegungen so weit auszubilden, dass sie mit diesen Angaben übereinstimmen. [Juni 1880.]

Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden erster Stufe.

Von

Felix Klein in München.

In der nachstehenden Notiz komme ich auf einen Gegenstand zurück, den ich vor mehreren Jahren gelegentlich meiner Untersuchungen über *Nicht-Euklidische* Geometrie in Discussion gezogen hatte; ich meine v. Staudt's Definition der Projectivität auf Grundgebilden erster Stufe.*) Ich hatte damals auf eine Lücke in v. Staudt's Darstellung aufmerksam gemacht, die in der That vorhanden ist, hatte aber, um sie zu beseitigen, zu einer überflüssigen Ergänzung der Definition meine Zuflucht genommen. Eine Correspondenz mit den Herren Lüroth und Zeuthen belehrte mich in der That bald, dass eine Beschränkung meiner Zusätze möglich war. Indem ich meine neue hierauf gegründete Anschauung in einer ausführlicheren Publication**) darlegte, glaubte ich inzwischen doch noch immer in einem Punkte an einer Vervollständigung der v. Staudt'schen Definition festhalten zu sollen. Erst neuerdings bin ich durch Herrn Darboux***) darauf aufmerksam gemacht worden, dass auch noch diese Ergänzung überflüssig ist. Ich bin Herrn Darboux hierfür um so mehr verpflichtet, als meine bez. Darstellung in einige neuere geometrische Publicationen ungeändert übergegangen ist und also allgemein verbreitet zu werden droht.

Die Frage, um welche es sich handelt, kann folgendermassen

---

*) Vergl. diese Annalen VI, p. 132, Note.

**) Annalen VII, p. 531—537.

***) Herr Darboux hatte inzwischen die Güte, mir eine ausführlichere Darlegung seiner Auffassung dieser Theorie zur Verfügung zu stellen, die ich hier nachfolgend (p. 55—61) zum Abdruck bringe. Die doppelte Besprechung desselben Gegenstandes wird durch seine Wichtigkeit gerechtfertigt erscheinen. [F. Klein. Ende Mai 1880.]

bezeichnet werden. Bekanntlich definirt v. Staudt zwei Grundgebilde erster Stufe als projectivisch, wenn sie derart aufeinander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische Elemente des anderen entsprechen. (Hiermit ist eo ipso ausgesprochen, wie ich schon hier ausdrücklich bemerken will, da später gerade auf diesen Umstand Gewicht zu legen ist: dass *jedem* Elemente des einen Gebildes ein Element des zweiten entspricht.) Es handelt sich nun um den Nachweis, dass die so erklärte Zuordnung völlig definirt ist, wenn man drei Paare zugeordneter Elemente kennt. Zu dem Zwecke beweise man zunächst nach Lüroth und Zeuthen (im Anschlusse an v. Staudt's ursprünglichen Gedankengang), dass man, von drei Elementen ausgehend, durch immer wiederholte Construction eines vierten harmonischen Elementes das ganze Gebilde in der Weise mit Elementen überdecken kann, dass in jedem noch so kleinen vorgegebenen Segmente mindestens ein construirtes Element liegt. Ich will die Gesammtheit der so construirbaren Elemente die *rationalen* nennen. Dann ist es an sich deutlich, dass den rationalen Elementen des einen Gebildes die rationalen Elemente des anderen unzweideutig entsprechen müssen (sofern man, wie vorausgesetzt wird, bei der beiderseitigen Construction von drei zugeordneten Elementen ausging). Aber es fragt sich, ob durch das Entsprechen der rationalen Elemente das Entsprechen der *irrationalen* Elemente mit gesetzt ist. Das irrationale Element kann definirt werden durch eine unendliche (gesetzmässige) Aufeinanderfolge rationaler Elemente, deren *Gränze* es ist. Und nun war mein Zusatz zu v. Staudt's Definition, an welchem ich auch in meiner zweiten Darstellung festhielt, der, dass man aus dem Entsprechen der unendlich vielen Elemente zweier derartiger Reihen rationaler Elemente auf das Entsprechen der beiderseitigen Gränzelemente solle schliessen dürfen. Ich hatte dem auch die andere Formulirung ertheilt: dass vier Elementen des einen Gebildes, welche eine „Folge“ bilden, auch wenn irrationale Elemente in Betracht kommen, allemal solche vier Elemente des anderen Gebildes entsprechen sollen, welche wieder eine Folge bilden. — An dieser Stelle greift jetzt Herrn Darboux's Bemerkung ein. Was ich ausdrücklich verlangte ist bereits eine nothwendige Folge der v. Staudt'schen Definition. Denn nehmen wir an, dass vier Elementen des ersten Gebildes, welche eine Folge bilden, auf dem anderen Gebilde solche vier Elemente entsprächen, die es nicht thun. Dann könnte man die ersten vier so in zwei Paare theilen, dass die beiden Paare ein gemeinsames harmonisches Paar besitzen, während die entsprechenden zwei Paare von Elementen des anderen Gebildes *kein* gemeinsames harmonisches Paar haben. Den beiden Elementen des „harmonischen“ Paares auf dem ersten Gebilde

könnten also überhaupt keine Elemente auf dem zweiten Gebilde entsprechen. Und das widerstreitet v. Staudt's ursprünglicher Definition, die, wie ich schon oben hervorhob, ausdrücklich voraussetzt, dass jedem Elemente des einen ein Element des anderen Gebildes entsprechen solle. Unsere Voraussetzung war also unzulässig: was zu beweisen war.

Man sieht zugleich den Punkt, in welchem ich irrte. Einseitig mit v. Staudt's *Erzeugung* der projectivischen Beziehung beschäftigt verlor ich den Wortlaut der *Definition* aus den Augen. Ich suchte das Element zu *construiren*, welches, auf dem zweiten Gebilde, einem irrationalen Elemente des ersten Gebildes entspricht, und ich vergass, dass es sich zunächst nur um die eindeutige Bestimmtheit dieses Elementes handelt und dass es also genügt, *indirecte* Beweisgründe heranzuziehen.

München, im April 1880.

Sur le théorème fondamental de la géométrie projective.

par

M. G. Darboux à Paris.

(Extrait d'une lettre à M. Klein).

Dans deux Mémoires insérés aux tomes VI et VII des *Mathematische Annalen* vous vous êtes occupé incidemment de la démonstration que v. Staudt a donnée du théorème fondamental de sa géométrie de position. Cet éminent géomètre prend pour base une définition particulière de la projectivité et il dit que deux séries linéaires d'éléments sont en relation projective lorsque, à quatre éléments de l'une des séries en relation harmonique, correspondent toujours quatre éléments de l'autre série formant aussi, et dans le même ordre, une suite harmonique. Lorsqu'on adopte cette définition, il y a à établir le théorème suivant:

Si deux séries de points pris sur une même droite sont en relation projective, il ne peut pas y avoir plus de deux points de l'une des séries qui coïncident avec leurs homologues, ou, en d'autres termes: *si trois éléments de l'une des séries coïncident avec leurs homologues, il en sera de même de tout autre élément.*

C'est de ce théorème que v. Staudt donne, dans sa *Geometrie der Lage*, une démonstration que tout le monde avec vous s'accorde à regarder comme incomplète. Mais il me semble que si la démonstration laisse à désirer, le théorème lui-même est parfaitement exact et qu'il peut être établi sans le secours d'aucune hypothése complémentaire de la nature de celle que vous avez énoncée au tome VII p. 536 des *Mathematische Annalen.*

Je supposerai d'abord que, laissant de côté la géométrie de v. Staudt et employant les notions métriques, on accepte immédiatement la représentation des points par des abscisses évaluées numériquement. On peut alors établir en toute rigueur le théorème suivant:

Si deux séries d'éléments se correspondent de telle manière qu'à quatre éléments quelconques de l'une des séries, formant une proportion harmonique, correspondent quatre éléments également en rapport harmonique, la correspondance est définie par cette unique propriété; et elle coïncide avec la transformation homographique.

Il suffira évidemment de considérer le cas où les deux séries sont composées de points sur une même droite, et où trois éléments de l'une des séries coïncident avec leurs homologues; car on peut toujours réaliser cette dernière condition en soumettant l'une des séries à une transformation homographique; on peut même supposer que les points qui coïncident avec leurs homologues sont définis par les abscisses 0, 1, ∞. Il résulte immédiatement de la définition de la correspondance considérée qu'à un point de l'une des séries correspond un seul point de l'autre. Soit x l'abscisse d'un point quelconque de la première série, x' l'abscisse du point homologue. On aura $x' = \varphi(x)$ et la fonction φ devra déjà satisfaire aux trois conditions:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1, \quad \varphi(\infty) = \infty. \tag{1}$$

Cela posé, considérons trois points, d'abscisses x_1, x_2, x_3, formant avec le point ∞ une proportion harmonique; on aura

$$x_1 + x_3 = 2x_2.$$

Comme les points homologues doivent aussi former une proportion harmonique, on devra avoir en même temps

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_3) = 2\varphi(x_2),$$

ce qui donne une première équation fonctionnelle

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_3) = 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) \tag{2}$$

à laquelle devra satisfaire la fonction φ. Si je fais $x_3 = 0$ j'ai

$$\varphi(x_1) = 2\varphi\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

et par conséquent l'équation (2) peut s'écrire

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_3) = \varphi(x_1 + x_3). \tag{3}$$

On ne sait pas résoudre d'une manière générale cette équation fonctionelle, *tant qu'on ne suppose rien sur la fonction* φ.*) Mais il est

---

*) L'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$$

se rencontre dans un grand nombre de recherches de mécanique et de physique. Cauchy l'a résolue, avec plusieurs autres équations analogues, dans son *analyse Algébrique*, *mais en supposant la fonction* φ *continue*. Dans un article sur la composition des forces en statique (*Bulletin des Sciences Mathématiques* t. IX. p 281) j'ai fait la remarque, à peu près évidente, que la méthode de Cauchy s'applique encore et conduit au même résultat si l'on suppose seulement que la fonction conserve son signe ou soit croissante dans un intervalle quelconque. Mais on peut aller plus loin et montrer que l'on aura $\varphi(x) = \mathrm{A}x$, A étant une constante, toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ sera assujettie à l'unique condition de prendre dans un intervalle quelconque des valeurs positives et négatives qui, les unes ou les autres, soient inférieures en grandeur absolue à une limite fixe. Ainsi il suffira,

clair que nous n'avons fait usage que d'une partie de la définition générale et nous allons en effet obtenir des propriétés nouvelles de la fonction φ.

Considérons les quatre points en proportion harmonique, ayant pour abscisses x_1, x_2, x_3, $-x_3$. On aura

(4) $$x_1 x_2 = x_3^2.$$

Les abscisses des points correspondants seront $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\varphi(x_3)$, $\varphi(-x_3)$ ou, en vertu de l'équation (3)

$$\varphi(x_1), \quad \varphi(x_2), \quad \varphi(x_3), \quad -\varphi(x_3)$$

et l'on devra avoir

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = [\varphi(x_3)]^2$$

ou

---

par exemple, qu' il y ait un seul intervalle dans lequel les valeurs positives de la fonction demeurent inférieures à un nombre fixe, pour que l'on ait $\varphi(x) = \mathrm{A}x$.

En effet, de l'équation

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$$

on déduit aisément que la fonction

$$\psi(x) = \varphi(x) - x\varphi(1)$$

1° s'annule pour toutes les valeurs commensurables de x, 2° satisfait aussi à l'équation

$$\psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y)$$

et par conséquent *reprend la même valeur pour deux valeurs de x qui diffèrent d'une quantité commensurable quelconque.* Elle prend donc dans un intervalle déterminé toutes les valeurs qu'elle peut acquérir dans les autres intervalles. Par suite si elle n'est pas constamment nulle, si l'on a, par exemple,

$$\psi(x_0) \gtrless 0$$

on en déduira

$$\psi(mx_0) = m\psi(x_0) \gtrless 0,$$

m étant un nombre commensurable, aussi grand qu'on le veut, positif ou négatif. Ainsi la fonction prendra des valeurs positives ou négatives aussi grandes qu'on le voudra, et il y aura dans tout intervalle une infinité de valeurs de x qui feront acquérir ces valeurs à la fonction.

Par suite si les valeurs positives ou négatives de la fonction dans un intervalle quelconque doivent demeurer finies, il faudra nécessairement que l'on ait

$$\psi(x) = 0$$

ou

$$\varphi(x) = x\varphi(1)$$

pour toute valeur de x.

Au point de vue de la question qui nous occupe, la remarque précédente aurait pour conséquence le théorème suivant:

Si la correspondance est définie par la condition qu'à trois points quelconques M, M', M'' formant avec le point déterminé A une proportion harmonique, correspondent trois points N, N', N'' formant avec le point déterminé B une proportion harmonique, cette correspondance est la transformation homographique, pourvu qu'il existe au moins un intervalle, ne comprenant pas de point de la première série dont l'homologue soit aussi rapproché de B qu'on le voudra.

(5) $$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = [\varphi\,(\sqrt{x_1 x_2})]^2.$$

Remarquons qu'en vertu de la relation (4), x_1 et x_2 sont de même signe. Si donc l'on fait $x_2 = 1$, on supposera simplicitement x_1 positive et l'on aura

(6) $$\varphi(x_1) = [\varphi\,(\sqrt{x_1})]^2.$$

Cette équation nous montre que $\varphi(x)$ sera positive toutes les fois que x le sera.

On peut considérer maintenant la recherche comme achevée, car l'égalité

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi(h)$$

nous montre que la fonction sera croissante; et comme pour toutes les valeurs commensurables de x on a

$$\varphi(x) = x\varphi(1) = x$$

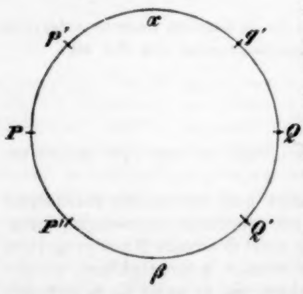
on peut conclure que la même expression a lieu pour les valeurs incommensurables de x.

Voilà donc la proposition entièrement démontrée; il est vrai que nous avons employé la géométrie métrique; mais vous n'aurez aucune peine à admettre à priori que les raisonnements qui précèdent peuvent en quelque sorte être traduits dans la géométrie de position. C'est ce que je vais faire voir en peu de mots.

Je commencerai par établir un lemme préliminaire. Considérons deux segments PQ, $P'Q'$ divisant harmoniquement un autre segment AB. On sait que ces deux segments PQ, $P'Q'$ sont compris l'un dans l'autre ou n'ont aucune partie commune. Donc *si deux segments empiètent l'un sur l'autre, il n'existe pas de segment les divisant tous les deux harmoniquement.*

Je vais démontrer au contraire que *si deux segments PQ, $P'Q'$ n'empiètent pas l'un sur l'autre, il existe toujours au moins un segment les divisant harmoniquement.*

Supposons, pour éviter toute difficulté relative à l'infini, que les deux segments aient été rapportés sur une conique ou, si l'on veut, considérons la droite comme une courbe fermée et soient p', q' les conjugués harmoniques de P', Q' par rapport au segment PQ; p', q' seront dans l'arc $P\alpha Q$ qui ne contient pas le segment $P'Q'$. Supposons qu'un point M se meuve de P' en Q'; son conjugué harmonique μ par rapport au segment PQ parcourra l'arc $p'\alpha q'$, tandis que le conjugué harmonique



μ' du même point par rapport au segment $P'Q'$ parcourra l'arc

$P'P\alpha QQ'$. Il y aura donc au moins une position de M pour laquelle μ et μ' coïncideront.

Nous admettons, on le voit, que si deux mobiles se meuvent sur une droite d'une manière continue, c'est-à-dire de manière à occuper toutes les positions, et que l'un, après être demeuré en arrière, finisse par dépasser l'autre, il y aura au moins une position dans laquelle ils coïncideront. Mais vous verrez facilement qu'il n'y a pas là de désavantage pour la démonstration nouvelle. La proposition précédente ou des propositions auxquelles il est aisé de la ramener doivent être admises quand on a à représenter par un nombre une grandeur incommensurable et en particulier à définir la racine carrée, qui est employée dans l'équation (6) de la première démonstration.

Il résulte de ce qui précède un moyen précis de reconnaitre si deux segments empiètent ou n'empiètent pas l'un sur l'autre; il suffira de chercher s'il y a un troisième segment qui les divise harmoniquement.

Cela posé, considérons sur une même droite deux séries projectives de points et supposons que les trois points A, B, C de l'une des séries coïncident avec leurs homologues. Il resulte des belles recherches de MM. Lüroth et Zeuthen que vous avez exposées au tome VII des *Mathematische Annalen* (p. 531) que, dans tout intervalle, il y aura des points qui coïncideront avec leurs homologues (ce sont les points qui, dans notre première démonstration, ont leurs abscisses rationnelles). Je dis que tout autre point x coïncidera avec son homologue x'. En effet, s'il en était autrement, nous pourrions prendre entre x et x' deux points A et B, dans l'ordre $(xABx')$, que coïncideraient avec leurs homologues. Alors les deux segments xA, Bx', n'empiètant pas l'un sur l'autre seraient divisés harmoniquement par un troisième segment et par conséquent les segments $x'A$, Bx formés par les quatre points homologues de x, A, B, x' devraient être divisés harmoniquement par le segment $m'n'$, homologue de mn. Or cela est impossible, puisque les deux segments $x'A$, Bx, empiètant l'un sur l'autre, ne peuvent admettre aucun segment qui les divise tous les deux harmoniquement. Il est donc impossible que x' ne coïncide pas avec x et la proposition de v. Staudt se trouve établie dans toute sa généralité.

Une fois le théorème fondamental établi, on peut en déduire de nombreuses conséquences. Il est aisé par exemple de reconnaitre avec v. Staudt (Geometrie der Lage § 121—122) que l'on peut définir la correspondance projective ou homographique dans le plan ou dans l'espace par l'unique condition qu'à des points en ligne droite de l'une des figures correspondent dans l'autre des points en ligne droite. On déduit en effet facilement de cette définition et du principe fondamental 1° qu'à un point correspond un seul point, 2° qu'à une droite ponctuée correspond une droite ponctuée projectivement, 3° que si quatre

points d'un plan dont trois ne sont pas en ligne droite coïncident avec leurs homologues, il en sera de même de tout autre point du plan, etc.

Mais il y a une autre conséquence du theorème fondamental sur laquelle je désirerais, en terminant, appeler votre attention. Möbius dans son beau Mèmoire *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* (Abh. der K. S. Ges. d. Wissensch. IV.) se propose d'étudier la transformation la plus générale dans laquelle à un cercle corresponde un cercle et il arrive au fond à cette conclusion qu'une telle transformation équivant à l'inversion (transformation par rayons vecteurs réciproques) accompagnée de déplacements. Mais pour établir cette intéressante proposition il suppose, et il le dit expressivement (p. 535), que la correspondance des deux figures soit assujettie aux conditions de continuité. Je me propose de montrer, en m'appuyant sur ce qui précède, que ces conditions ne sont pas nécessaires.

Supposons en effet que l'on veuille rechercher la transformation la plus générale dans laquelle à un cercle correspond un cercle. Il est clair d'abord qu'à un point devra correspondre un seul point. A tous les cercles passant par un point A de la première figure (C) devront correspondre tous les cercles passant par le point correspondant A' de la seconde figure (C'): soumettons la première figure (C) à une inversion ayant pour pole A, ce qui donnera une figure (D), et de même la figure (C') à une inversion ayant pour pole A', ce qui donnera une figure (D'). Les deux figures (D), (D') étant telles qu'à une droite de l'une corresponde une droite de l'autre seront en correspondance homographique. Mais cette correspondance doit être telle qu'à un cercle corresponde un cercle et il est aisé de reconnaitre que cela ne peut avoir lieu que si les deux figures sont semblables.

En effet les points à l'infini de (D) ne peuvent avoir leurs homologues de (D') qu'à l'infini. Car soit m un point à l'infini de (D); si ce point avait pour homologue un point m' à distance finie, à tout cercle de (D') passant par m' devrait correspondre une courbe allant à l'infini, ce qui est impossible puisque l'homologue de ce cercle est un cercle. Donc les droites de l'infini se correspondent dans les deux figures. A un parallélogramme de la première figure correspond un parallélogramme de la seconde. Donc, comme le remarque *Möbius*, à un rectangle (parallélogramme inscrit dans un cercle) correspond un rectangle; à un angle droit, un angle droit; à un carré (rectangle à diagonales rectangulaires) correspond un carré.

D'après cela soit $ABCD$ un carré de (D) ayant pour homologue le carré $A'B'C'D'$ de (D'). On peut toujours amener ces deux carrés à la coïncidence en soumettant la figure (D') à une transformation

homothétique et à un déplacement. Alors les deux figures homographiques ayant quatre points coïncidents seront superposables dans toute leur étendue.

Ainsi la transformation cyclique de *Möbius* peut toujours se réaliser au moyen d'une inversion [passage de (C') en (D')] suivie d'une transformation homothétique et d'un déplacement [passage de (D') en (D)] et enfin d'une autre inversion [passage de (D) en (C)]. On sait que toutes ces opérations peuvent toujours se ramener soit à une seule inversion, soit à une transformation homothétique, précédées ou suivies d'un déplacement.

Paris.

Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen.*)

Von

Felix Klein in München.

Durch eine Reihe von Arbeiten, die im XIV. und XV. Bande der mathematischen Annalen veröffentlicht sind, bin ich allmählich zu einer allgemeinen und im Wesentlichen neuen Auffassung der elliptischen Modulfunctionen geführt worden. Indem ich im Folgenden einige auf diese Auffassung bezüglichen Ideen entwickele, ist meine besondere Absicht, zu zeigen, dass die verschiedenen Formen, welche man den Modulargleichungen ertheilt hat und die in gewissermassen verwirrender Mannigfaltigkeit bisher unvermittelt neben einander standen, sich einem einfachen, allgemeinen Principe als sehr specielle Fälle einordnen.

I.

Allgemeines über elliptische Modulfunctionen.

Die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, wie ich sie auffasse, hat es mit *allen* solchen eindeutigen Functionen einer Variablen ω zu thun, welche gegenüber ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante Eins:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

ungeändert bleiben. Diese Substitutionen brauchen im einzelnen Falle die Gesammtheit aller ganzzahligen Substitutionen dieser Art durchaus nicht zu erschöpfen; sie bilden also, allgemein zu reden, eine in der Gesammtheit enthaltene *Untergruppe*. Daher scheint es mir ein erster wichtiger Schritt zu einem planmässigen Studium der elliptischen Modulfunctionen zu sein, dass man alle in der erwähnten Gesammtheit enthaltenen Untergruppen aufstellt und nach sachgemässen Rücksichten classificirt. Meine heutige Darlegung soll sich, soweit sie sich auf

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der Münchener Akademie, Sitzung vom 6. Decbr. 1879.

derartige allgemeine Fragen bezieht, auf die Besprechung einiger Classificationsprincipien und der aus ihnen hervorgehenden functionentheoretischen Folgerungen beschränken. Ich nehme dabei an, was freilich eine grosse Beschränkung ist, dass die in Betracht kommenden Untergruppen einen *endlichen* Index haben, d. h. dass sie einen endlichen Theil der Gesammtheit aller ω-Substitutionen umfassen.

Zuwörderst ist ersichtlich, dass alle die Gesichtspunkte, die man, seit Galois, bei endlichen Gruppen von Transformationen kennt, auch bei unendlichen Gruppen, und somit bei der Gruppe aller ω-Substitutionen, ihre Bedeutung behalten. Ich spreche demnach von *ausgezeichneten* Untergruppen, indem ich darunter solche verstehe, die mit der Gesammtheit aller ω-Substitutionen vertauschbar sind, — oder auch von *relativ ausgezeichneten* Untergruppen, die, in einer umfassenderen Untergruppe enthalten, sich wenigstens mit den Substitutionen dieser umfassenderen Untergruppe vertauschbar erweisen. Eine leichte Ueberlegung zeigt, dass in der That die Gesammtheit der ω-Substitutionen die verschiedenartigsten ausgezeichneten Untergruppen enthält, dass also die Gesammtheit, um den Galois'schen Ausdruck zu gebrauchen, eine „zusammengesetzte", und sogar eine höchst zusammengesetzte Gruppe ausmacht.

Mein *zweites* Classificationsprincip gründet sich auf die *arithmetische* Natur der Substitutionscoëfficienten α, β, γ, δ, welche bei Substitutionen der Untergruppe vorkommen. Es ist dieses Princip gewissermassen ein empirisches. Es hat sich nämlich gezeigt, dass sich die bei einer Untergruppe auftretenden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in vielen Fällen dadurch charakterisiren lassen, dass man Congruenzen angiebt, denen diese Coëfficienten in Bezug auf einen Zahlenmodul m genügen. Ich spreche dann von einer *Congruenzgruppe*, und zwar *der m^{ten} Stufe*, sofern m die kleinste Zahl ist, die zur Definition der Untergruppe ausreicht. Aber es muss stark hervorgehoben werden, dass durchaus nicht alle Untergruppen Congruenzgruppen sind. Die Congruenzgruppen sind diejenigen, mit denen man sich bisher fast ausschliesslich beschäftigt hat; die anderen Gruppen scheinen desshalb nicht weniger interessant; nur sind sie, zunächst, weniger zugänglich.

Ich komme nun zu meinem dritten, *functionentheoretischen* Eintheilungsprincipe. Dasselbe dürfte insofern das wichtigste sein, als sich vermöge desselben gewisse Schwierigkeiten, welche sich bisher einem weiteren Fortschritt in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen entgegengestellt hatten, einfach wegheben. — Ich muss dabei auf die bereits zu Eingang dieser Mittheilung citirten Arbeiten zurückgreifen. Ich zeigte in denselben an verschiedenen Stellen (Annalen, Bd. XIV p. 133, 420 etc.), dass jeder in der Gesammtheit der ω-Substitutionen enthaltenen Untergruppe vom Index μ in der ω-Ebene ein

gewisses, noch in vielen Hinsichten willkürliches, *Fundamentalpolygon* entspricht, das aus 2μ, abwechselnd schraffirten und nicht schraffirten, „Elementardreiecken" besteht, und dessen Kanten vermöge der Substitutionen der Untergruppe paarweise zusammengehören. Die geschlossene Fläche, welche durch Vereinigung der zusammengehörigen Kanten des Fundamentalpolygons entsteht, besitzt, im Sinne der Analysis situs, ein gewisses Geschlecht, p, — und der Zahlenwerth dieses p, welches ich kurz als *Geschlecht der Untergruppe* bezeichne, ist mein functionentheoretisches Eintheilungsprincip. Es gilt vor allen Dingen, zu unterscheiden, ob $p = 0$ ist, oder nicht.

An die so exponirte Theorie der Untergruppen schliesst sich nun eine Lehre von den *zugehörigen Moduln*, d. h. von solchen *eindeutigen* Functionen von ω, $M(\omega)$, die bei den Substitutionen der Untergruppe, nicht aber bei anderen Substitutionen ungeändert bleiben. Aus nahe liegenden Gründen betrachte ich hier, wo es sich um Untergruppen von endlichem Index handelt, nur solche Moduln, die innerhalb der durch das Fundamentalpolygon definirten geschlossenen Fläche keine Unstetigkeiten höherer Art besitzen; ich nenne sie *algebraische* Moduln. Hier wird nun sogleich das Geschlecht der Untergruppe von Wichtigkeit. *Ist $p = 0$, so kann man einen zugehörigen algebraischen Modul so wählen, dass er jeden vorgegebenen Werth im Fundamentalpolygon nur einmal annimmt. Ist aber $p > 0$, so muss man, um den einzelnen Punkt des Fundamentalpolygons zu bezeichnen, mindestens zwei Moduln gleichzeitig betrachten, zwischen denen dann eine Gleichung von dem betreffenden p besteht.* — Dementsprechend rede ich im ersten Falle von einem *Hauptmodul*, im zweiten von den *Moduln eines vollen Systems*, wobei selbstverständlich ist, dass man, im zweiten Falle, statt zweier Moduln ev. eine grössere Zahl von Moduln verwerthen kann, die dann an eine Reihe algebraischer Identitäten gebunden sind.

Man hat nun sofort folgenden Satz:

Alle zur Untergruppe gehörigen algebraischen Moduln, sowie alle algebraischen Moduln, die einer umfassenderen Untergruppe angehören, drücken sich, für $p = 0$, durch den Hauptmodul, anderenfalls durch die Moduln des vollen Systems rational aus.

Dann aber nachstehendes Resultat, vermöge dessen, wie ich schon andeutete, eine vielfach aufgeworfene Frage erledigt wird:

Soll ω' mit ω durch eine Substitution einer vorgelegten Untergruppe zusammenhängen, so ist, falls $p = 0$, nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, dass der Hauptmodul, berechnet für ω, mit dem für ω' berechneten Hauptmodul übereinstimmt. Ist aber $p > 0$, so ist für

den gleichen Schluss die Gleichheit aller Moduln eines vollen Systems erforderlich. —

Uebrigens spreche ich, den anderen bei den Untergruppen getroffenen Unterscheidungen entsprechend, von *Congruenzmoduln* (der m^{ten} Stufe), so wie von *ausgezeichneten Moduln.* Nur bezüglich letzterer sei hier eine Bemerkung gestattet. Wenn die Moduln $M(\omega)$, $M_1(\omega)$, $\cdots$ das volle System einer ausgezeichneten Untergruppe bilden, so drücken sich, wie man sofort sieht, alle Werthe $M\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$, $M_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$, $\cdots$ durch die ursprünglichen Werthe rational aus. Nun zeigen die Ueberlegungen, die ich Annalen Bd. XV., p. 251 ff. entwickelte, dass man in solchen Fällen M, M_1 so wählen kann, dass die rationalen Ausdrücke in *lineare* übergehen. Etwas Aehnliches gilt für solche Untergruppen, die nicht schlechthin, sondern nur relativ ausgezeichnet sind. — Eine solche Wahl scheint in vielen Beziehungen zweckmässig, wie ich noch weiter unten hervorzuheben habe, und in der That hat man auch früher, ohne die in Rede stehenden allgemeinen Ueberlegungen zu haben, ausgezeichnete Moduln, wenn sie auftraten, immer diesem Principe entsprechend gewählt.

Zu den somit zur Sprache gebrachten allgemeinen Definitionen möchte ich hier nur einige wenige Beispiele anführen, indem ich übrigens auf meine anderen neueren Publicationen verweise:

1. Die Theorie der Modulfunctionen bekommt dadurch einen besonders einfachen Charakter, dass die Gesammtheit aller ω-Substitutionen, als Gruppe aufgefasst, das Geschlecht *Null* besitzt. Desshalb giebt es einen Hauptmodul, der allen anderen Moduln übergeordnet ist, *die absolute Invariante* J (Herrn Dedekind's Valenz, vergl. Borchardt's Journal Bd. 83).

2. *Die* ν^{te} *Wurzel aus dem Legendre'schen* $\varkappa^2$, *sowie die* ν^{te} *Wurzel aus* $\varkappa^2\varkappa'^2$ *ist für jedes ganzzahlige* ν *ein Hauptmodul.* Eine naheliegende Frage ist die, wesshalb in der bisher üblichen Theorie von diesen Moduln nur eine kleine Zahl auftrat, nämlich $\varkappa^2$, $\varkappa$, $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\varkappa^2\varkappa'^2$, $\varkappa\varkappa'$, $\sqrt{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[3]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[3]{\varkappa^2\varkappa'^2}$, $\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[6]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$. Die Antwort ist, dass unter allen Moduln $\sqrt[\nu]{\varkappa^2}$, $\sqrt[\nu]{\varkappa^2\varkappa'^2}$ *nur diese* Congruenzmoduln sind*).

---

*) Ich benutze diese Gelegenheit zu einer Berichtigung. Dass nicht jeder Modul ein Congruenzmodul ist, habe ich bereits im XIV. Bande dieser Annalen p. 128, 129 ausgesprochen. Zugleich verwies ich auf zwei früher von mir berechnete Gleichungssysteme (Annalen XII, p. 175, 176), durch welche derartige Moduln definirt werden; das eine ist vom siebenten, das andere vom zehnten

3. Als einen Hauptmodul fünfter Stufe und zugleich als einen „ausgezeichneten“ Modul, der sich bei beliebigen ω-Substitutionen linear transformirt, bringe ich hier die *Ikosaederirrationalität* η in Erinnerung (Annalen, Bd. XIV, p. 158). Desgleichen als volle Systeme ausgezeichneter Moduln von der siebenten Stufe (die auch nach dem Princip der linearen Transformation gewählt sind): einmal die drei Verhältnissgrössen $\lambda : \mu : \nu$ (Annalen, XIV, p. 456), zwischen denen die Gleichung besteht:

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0,$$

dann die vier Verhältnissgrössen $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ (Annalen XV, p. 268), für die man folgende Relationen hat:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_0 & -x_2\sqrt{2} & 0 \\ x_2 & 0 & x_0 & -x_3\sqrt{2} \\ x_3 & -x_1\sqrt{2} & 0 & x_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Das zugehörige Geschlecht ist gleich drei.

II.

Anwendung auf die Transformationstheorie.

Unter *Transformation n^{ter} Ordnung* sei der Uebergang von ω zu $\omega' = \frac{\omega}{n}$ verstanden, oder, was noch vortheilhafter ist, weil es die Umkehrbarkeit der in Betracht kommenden Operation deutlicher hervortreten lässt, der Uebergang von ω zu $\omega' = -\frac{n}{\omega}$. Dann ist das allgemeinste Problem, welches man aufstellen mag, dieses:

Man soll alle algebraischen Gleichungen angeben, die, einem solchen Uebergange entsprechend, zwischen irgendwie gegebenen algebraischen Moduln und ihren transformirten Werthen statthaben.

Es ist nun keineswegs meine Absicht, dies Problem in voller Allgemeinheit hier zu behandeln. Vielmehr genügt mir ein viel be-

---

Grade. Es hat mich nun Herr Cayley darauf aufmerksam gemacht, dass die Gleichung zehnten Grades numerisch falsch angegeben ist. Zugleich hatte Herr Cayley die Güte, seinerseits die betr. Rechnung von Neuem (unter Benutzung der auch von mir eingehaltenen Methode) durchzuführen. Sein Resultat ist, in der von mir im XIV. Bande eingehaltenen Schreibweise, das folgende:

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 = & (5x - 27)(125x^3 - 25x^2 - 265x - 243)^3 \\ & : (-3125x^5 + 9375x^4 + 18750x^3 + 8750x^2 \\ & \qquad + 30375x + 19683)^2 \\ & : -1382400000\, x^3 (x+1)^2. \end{aligned}$$

[Mai 1880.]

scheideneres Ziel. Ich erinnere zunächst an die Gleichungen, welche zwischen $J(\omega)$ und $J(\omega') = J'$ bestehen und die man als Prototyp aller Modulargleichungen erachten kann. Sodann wünsche ich zu zeigen, *dass es unendlich viele von vorneherein erkennbare Fälle giebt, in denen Gleichungssysteme auftreten, welche mit den zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichungen in allen wesentlichen Eigenschaften übereinstimmen.* — Als wesentlich erachte ich dabei den *Grad* der Gleichung, ihre *Galois'sche Gruppe* und die *Vertauschbarkeit* der in ihr auftretenden Argumente.

Den eigentlichen Kern meiner bez. Ueberlegung bildet ein gruppentheoretischer Satz, der als selbstverständlich gelten kann. Es handelt sich darum, einzusehen, dass zwei Untergruppen m^{ter} und n^{ter} Stufe, *sobald m und n theilerfremd sind,* eine Untergruppe mn^{ter} Stufe gemein haben, die innerhalb der Gruppe m^{ter} Stufe dieselbe Stellung einnimmt wie die Gruppe n^{ter} Stufe innerhalb der Gesammtheit der ω-Substitutionen. Und dies folgt einfach daraus, dass irgendwelche Congruenzen, denen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo m unterworfen sein mögen, mit anderen Congruenzen, denen dieselben Zahlen modulo n genügen sollen, in keiner Weise collidiren können, sobald m und n, wie vorausgesetzt, relativ prim sind.

Auf Grund dieser Anschauung prüfe man jetzt die Schlüsse, welche zur Existenz der zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichung und ihren Eigenschaften hinleiten*). Man sieht dann sofort, dass der *gruppentheoretische* Theil derselben ungeändert bleibt, wenn man an die Stelle der Gesammtheit der ω-Substitutionen irgend eine Untergruppe m^{ter} Stufe setzt, sofern m zum Transformationsgrade n relativ prim ist. — Und nun handelt es sich, will man zu meinem allgemeinen Satze kommen, nur noch darum, dies gruppentheoretische Resultat functionentheoretisch zu interpretiren. Offenbar muss man, dem Obigen zufolge, unterscheiden, ob das *Geschlecht* der Untergruppe m^{ter} Stufe gleich Null ist oder nicht. Im ersteren Falle kann man auch functionentheoretisch so weiter schliessen, wie man es bei der absoluten Invariante J that; nur tritt an die Stelle von J der betr. *Hauptmodul.* Wir haben dann folgenden ersten Satz:

Ist M ein Hauptmodul m^{ter} Stufe, so bestehen für alle Transformationsgrade n, die zu m relativ prim sind, zwischen $M(\omega) = M$ und $M\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M'$ Gleichungen, die nach Grad, Galois'scher Gruppe

*) Man kann diese Schlüsse sehr knapp zusammenziehen, so dass gar keine Rechnung mehr erforderlich ist. Vergl. die Darstellung bei Dedekind, Borchardt's Journal Bd. 83, wo indess die Galois'sche Gruppe nicht bestimmt wird.

und Vertauschbarkeit der Argumente mit der zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichung übereinstimmen.

Im zweiten Falle bedarf das Schlussverfahren einer Modification, die aber, nach dem Vorausgegangenen, nicht mehr schwer zu finden ist. Statt der *einen* Invariante J muss man jetzt *sämmtliche* Moduln $M, M_1, \cdots$ eines vollen Systems gleichzeitig betrachten. Zwischen den *Werthsystemen* $M(\omega) = M, M_1(\omega) = M_1, \cdots$ und $M\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M', M_1\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M_1', \cdots$ findet jetzt ein Entsprechen statt, das dem zwischen J und J' durchaus analog ist. Man hat also statt einer Gleichung zwischen zwei Grössen das, was die Geometer eine „*Correspondenz*" nennen, und zwar eine Correspondenz auf einer „*Curve vom Geschlechte p.*"

Grad und Galois'sche Gruppe dieser Correspondenz sind wieder dieselben, wie bei der zwischen J und J' bestehenden Gleichung; auch ist die Correspondenz, wie jene Gleichung, in den zweierlei in Betracht kommenden Argumenten symmetrisch.

Es ist kein Grund vorhanden, derartige Correspondenzen nicht ebenso in Betracht zu ziehen, wie jene Gleichungen; *wir haben also schliesslich für jeden Transformationsgrad n unendlich viele Gleichungssysteme, die sämmtlich als Modulargleichungen bezeichnet werden können;* und dies ist der Satz, um dessen Ableitung es sich bei der heutigen Gelegenheit handelte.

Dass sich nun, wie in der Einleitung bemerkt, sämmtliche bisher aufgestellten Modulargleichungen in das so gewonnene allgemeine Schema als sehr specielle Fälle einordnen, ist leicht zu sehen*); ein specieller Nachweis würde hier zu weit führen. Ich erinnere nur an die Jakobi-Sohnke'schen Modulargleichungen für $\sqrt[4]{x}$, an die Schröter'schen Modulargleichungen in irrationaler Form, etc. Dabei ist freilich eine gewisse Kritik nöthig, sobald es sich um Correspondenzen handelt. Natürlich muss man bei einer solchen Correspondenz immer den zwischen $M, M_1, \cdots$ einerseits, und den zwischen $M', M_1', \cdots$ andererseits bestehenden Identitäten Rechnung tragen. Aber auch dann wird die Correspondenz nicht immer durch *eine* Gleichung zwischen den $M, M_1, \cdots$ und den $M', M_1', \cdots$ definirt sein. Hat man also durch irgend eine Methode *eine* solche Gleichung gefunden, so bleibt

*) Ich betone ausdrücklich, dass es sich im Texte nur um *Modular*gleichungen handelt (bei denen Vertauschbarkeit der Argumente Statt hat), nicht aber um *Multiplicator*gleichungen oder andere verwandte Gleichungen.

zu untersuchen, ob sie zur vollen Definition der gewollten Correspondenz ausreicht, und wenn es nicht der Fall ist, so muss man eben noch weitere Relationen zwischen den M, M' aufsuchen*). —

Noch folgende Bemerkung möge hier eine Stelle finden. Es sollen die Moduln M, $M_1, \cdots$ der m^{ten} Stufe *ausgezeichnet* und dabei so gewählt sein, dass sie sich bei beliebiger ω-Substitution linear transformiren. Dann sieht man leicht, dass die zwischen den M und M' bestehenden Relationen bei gewissen *simultanen* linearen Transformationen der M, M' ungeändert bleiben müssen. Handelt es sich also darum, die fraglichen Relationen explicite herzustellen, so kann es vortheilhaft sein, vorher alle von M, M' abhängenden Ausdrücke zu bilden, die diese Eigenschaft der Unveränderlichkeit besitzen. Eine solche Untersuchung, die der *linearen Invariantentheorie***) angehört, kann z. B. mit Nutzen bei den gewöhnlich betrachteten, zwischen $\varkappa^2$ und λ^2 bestehenden Gleichungen durchgeführt werden. Ich habe denselben Gedanken bereits früher (Annalen XIV, p. 162 – 164) benutzt, um für die niedrigsten Transformationsgrade die *Ikosaedermodulargleichungen* ohne Weiteres hinzuschreiben. Ich habe ihn neuerdings herangezogen, um wenigstens einige Modularcorrespondenzen der *siebenten Stufe* zu bilden. Die Moduln, welche ich dabei verwende, und die zwischen ihnen bestehenden identischen Relationen wurden bereits oben genannt. Ich kann also sofort die Resultate anführen, was nunmehr zum Schlusse geschehen mag. Es sind folgende:

---

*) Herr Stud. Hurwitz, der mich bei solchen Untersuchungen unterstützte, wurde dabei für den 23. und 47. Transformationsgrad zu folgenden eleganten Gleichungen geführt:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} = 1,$$

$$\left[2\left(\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - 1\right) - \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}\right]^2$$

$$= 8\left(\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} + 1\right) - 7\,\sqrt[3]{16}\,\sqrt[6]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}.$$

Hier bedeuten λ, λ' in der üblichen Weise die transformirten Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$. Das volle System der in Betracht kommenden Moduln ist durch

$$\sqrt[4]{\varkappa},\ \sqrt[4]{\varkappa'},\ \sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$$

gegeben, zwischen denen folgende Identitäten bestehen:

$$(\sqrt[4]{\varkappa})^8 + (\sqrt[4]{\varkappa'})^8 = 1,\quad (\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'})^3 = \sqrt{\varkappa}\cdot\sqrt[4]{\varkappa'};$$

die zugehörige Untergruppe ist von der 48. Stufe. — Jede der beiden angegebenen Gleichungen stellt die bei ihr in Betracht kommende Correspondenz rein dar.

**) Natürlich gilt etwas Aehnliches in beschränkterem Sinne, wenn es sich nicht um ausgezeichnete Moduln schlechthin, sondern um „relativ ausgezeichnete" Moduln handelt. Hieher gehören z. B. die bekannten Regeln, welche die Art der Glieder bestimmen, die in den zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ bestehenden Gleichungen auftreten.

1) *Für $n = 3$ und $n = 5$ erhält man nachstehende einfache lineare Gleichungen, deren jede zur Definition der bei ihr in Betracht kommenden Correspondenz ausreicht:*

$$\lambda'\lambda + \mu'\mu + \nu'\nu = 0^{*)},$$
$$x_0' x_0 + x_1' x_1 + x_2' x_2 + x_3' x_3 = 0.$$

2) *Die Modularcorrespondenz für $n = 2$ wird durch irgend zwei der folgenden drei Gleichungen völlig definirt:*

$$x_0' x_1 + x_1' x_0 - \sqrt{2} \cdot x_2' x_2 = 0,$$
$$x_0' x_2 + x_2' x_0 - \sqrt{2} \cdot x_3' x_3 = 0,$$
$$x_0' x_3 + x_3' x_0 - \sqrt{2} \cdot x_1' x_1 = 0.$$

3) *Für $n = 4$ bekommt man das einfachste**) Resultat, wenn man die $\lambda : \mu : \nu$ heranzieht. Die Correspondenz ist dann nämlich durch die eine Formel gegeben:*

$$(\lambda'^2 \cdot \lambda\mu + \mu'^2 \cdot \mu\nu + \nu'^2 \cdot \nu\lambda) + (\lambda^2 \cdot \lambda'\mu' + \mu^2 \cdot \mu'\nu' + \nu^2 \cdot \nu'\lambda') = 0,$$

sofern ausdrücklich festgesetzt wird, dass man von der evidenten (doppeltzählenden) Lösung

$$\lambda' : \mu' : \nu' = \lambda : \mu : \nu$$

absehen soll.

München, im November 1879.

---

*) Diese Gleichung stellt sich vermöge ihrer dreigliedrigen Form unmittelbar neben die bekannten Formen:

$$\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} = 1, \quad \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} = 1,$$

die Legendre für den dritten Grad und Gützlaff für den siebenten Grad gewonnen haben.

**) Ich hatte zunächst nur mit den $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ operirt; das Resultat, wie es im Texte mitgetheilt ist, rührt von Herrn Hurwitz her.

Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

(Erste Note)*).

Von

J. Gierster in Bamberg.

Die acht Formeln, welche Herr Kronecker**) zwischen den Classenzahlen der quadratischen Formen von negativer Determinante aufgestellt hat, sind dadurch hergeleitet worden, dass man in den Modulargleichungen, welche zwischen $u = \sqrt[4]{k}$, $v = \sqrt[4]{l}$, resp. zwischen Potenzen von diesen Grössen bestehen, die beiden Moduln einander gleichsetzte***). Auf ganz demselben Wege kann man aus den von Herrn F. Klein eingeführten Modulargleichungen der regulären Körper †) analoge Relationen herleiten, welche in Bezug auf den einfachen arithmetischen Aufbau mit den Formeln Kronecker's auf gleicher Stufe stehen. Ich erlaube mir insbesondere die Resultate mitzutheilen, welche aus den Ikosaeder-Modulargleichungen folgen.

Zu diesem Zwecke seien folgende Festsetzungen getroffen:

Es seien d, a ganze Zahlen, welche der Bedingung $d \cdot a = n$ genügen, und zwar sei immer $d > \sqrt{n}$, also $a < \sqrt{n}$. Es sei ferner δ *irgend ein* Theiler von n.

Dann bedeute:

$$\Psi_{+1}(n) = \Sigma\left[d + \left(\frac{a}{5}\right)a\right],$$

$$\Psi_{-1}(n) = \Sigma\left[d - \left(\frac{a}{5}\right)a\right],$$

---

*) Abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten vom 4. Juni 1879.

**) Die erste ausführliche Mittheilung siehe Crelle, J. Bd. 57, pag. 248 ff.

***) Siehe insbesondere: Stephen Smith: Report of the British Association 1865 vol. 35. Kronecker: Monatsberichte d. Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 19. April 1875, Seite 235.

†) F. Klein: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichung 5. Grades." Math. Annalen Bd. XIV, pag. 160 ff.

††) Die Functionen $\Phi(n)$, $\Psi(n)$, $\mathrm{H}(n)$ sind von Hrn. Kronecker in derselben Bedeutung verwendet.

$$\sigma(n) = \Sigma - \left[\left(\frac{a}{5}\right) + \left(\frac{d}{5}\right)\right] \cdot a,$$
$$\Phi(n) = \Sigma\delta,$$
$$\Psi(n) = \Sigma(d-a),$$

wo die Summen rechter Hand hinzuerstrecken sind über alle Theiler d, a, δ von n.

Ferner sei:

$\mathsf{H}(n)$ die Anzahl aller nicht äquivalenten Classen ganzzahliger quadratischer Formen $Px^2 + 2Qxy + Ry^2$ von der Determinante $Q^2 - PR = -n$, deren äussere Coefficienten P und R beide gerade sind. Hiebei sind aber die Formenclassen $2\varrho x^2 + 2\varrho y^2$ und $2\varrho x^2 + 2\varrho xy + 2\varrho y^2$ als $\frac{1}{2}$, resp. $\frac{1}{3}$ zu zählen.

$\mathsf{H}_1(n)$ bedeute diejenigen Formen von $\mathsf{H}(n)$, durch welche quadratische Reste mod. (5) darstellbar sind,

$\mathsf{H}_{-1}(n)$ jene, durch welche quadratische Nichtreste mod. (5) dargestellt werden können, so dass immer $\mathsf{H}_1(n) = \mathsf{H}_{-1}(n)$ ist.

Ausserdem sei $\mathsf{H}_1(o) = \mathsf{H}_{-1}(o) = 0$; $\mathsf{H}(o) = -\frac{1}{12}$, und $\mathsf{H}(l) = \Phi(l) = \Psi(l) = 0$, wenn l keine ganze Zahl bedeutet.

Endlich bezeichnen wir mit:

k_0 alle Zahlen $0, \pm 5, \pm 10$, welche ihrem absoluten Werthe nach $\leq \sqrt{4n}$ sind;

k_{+1} alle Reste mod. (5), d. h. die Zahlen:

$1, 4, 6, 9 \cdots$, welche $\leq \sqrt{4n}$ sind;

k_{-1} alle Nichtreste mod. (5), d. h. die Zahlen:

$2, 3, 7, 8 \cdots$, welche $\leq \sqrt{4n}$ sind;

k alle Zahlen, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$, welche ihrem absoluten Werthe nach $\leq \sqrt{4n}$ sind.

Dann bestehen folgende Relationen:

I. $n \equiv \pm 1$ mod. (5).

1) $2 \cdot \Sigma\mathsf{H}(4n - k_0^2) = \Phi(n) + 2 \cdot \Psi(n) - 2\Psi_{\mp 1}(n)$,

2) $60 \cdot \Sigma\mathsf{H}\left(\frac{4n - k_{\mp 1}^2}{25}\right) = 6\Psi_{\mp 1}(n) - 5\Phi(n)$,

3) $5 \cdot \Sigma\mathsf{H}_1(4n - k_{\mp 1}^2) = 5\Sigma\mathsf{H}_{-1}(4n - k_{\mp 1}^2) = \Psi_{\mp 1}(n)$,

4) $3 \cdot \Sigma\mathsf{H}(4n - k_{\pm 1}^2) = \Phi(n)$.

II. $n \equiv \pm 2$ mod. (5).

1) $3 \cdot \Sigma\mathsf{H}(4n - k_0^2) = \Phi(n)$,

2) $2 \cdot \Sigma\mathsf{H}(4n - k_{\mp 1}^2) = \Psi(n)$,

3) $3 \cdot \Sigma\mathsf{H}(4n - k_{\pm 1}^2) = \Phi(n)$.

III. $n \equiv 0 \bmod. (5)$,

$= 5^{\mu} \cdot m \cdot$, wo $m \gtrless 0 \bmod. (5)$.

$$1)\ \Sigma \mathsf{H}_{+1}(4n - k_0^2) = \Phi(m) + 2\Phi\left(\frac{n}{25}\right) + 2\Psi\left(\frac{n}{25}\right),$$

$$2)\ \frac{1}{2} \cdot \Sigma\left(\frac{k}{5}\right) \mathsf{H}(4n - k^2) = \sigma(n).$$

Die Summation linker Hand erstreckt sich in allen diesen Formeln auf die oben mit k_0, k_{+1}, k_{-1}, k bezeichneten Zahlenreihen und in den Formeln I. und II. gehören die oberen, respective die unteren Vorzeichen zusammen. $\left(\frac{k}{5}\right)$ bedeutet das Legendre'sche Zeichen.

Zwischen diesen Formeln und den Kronecker'schen besteht, soviel ich sehen kann, nur *die* Abhängigkeit, dass es *eine* Combination giebt, welche sich auch aus den Kronecker'schen ableiten lässt. Diese Combination liefert die Formel:

$$\text{A)}\quad \Sigma \mathsf{H}(4n - k^2) = \Phi(n) + \Psi(n)$$

die sich auch direct aus *den* Modulargleichungen ergiebt, welche zwischen den rationalen Invarianten J, J' des elliptischen Integrales erster Gattung bestehen. Bezeichnet man nämlich die Kronecker'schen Relationen, gebildet für die Zahl m der Reihe nach mit $\mathrm{I}(m), \cdots$ so findet man mit Hülfe der Fundamentalrelationen, welche zwischen den von Hrn. Kronecker gebrauchten Functionen $F(n)$, $G(n)$ und der Function $\mathsf{H}(n)$ bestehen, leicht, dass:

$$A = \begin{cases} \mathrm{I}(n) - \mathrm{II}(m) \quad \text{oder} \\ \mathrm{I}(n) - \frac{2}{3}\mathrm{I}(m) + \frac{1}{3}\mathrm{IV}(m) - \frac{1}{3}\mathrm{V}(m) \end{cases}$$

ist (wo $n = 2^{\mu} \cdot m$ und m ungerade ist), und zwar je nachdem μ ungerade oder gerade ist.

Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

(Zweite Note)*).

Von

J. Gierster in Bamberg.

Die acht Kronecker'schen Relationen zwischen gewissen Classenzahlen quadratischer Formen von negativer Determinante sind bekanntlich aus den gewöhnlichen Modulargleichungen durch Resultantenbildung gewonnen worden.**) In gleichem Sinne untersuchte ich schon früher die von F. Klein aufgestellten Modulargleichungen der regulären Körper***) und theilte insbesondere die Ikosaëderresultate in den Göttinger Nachrichten vom 4. Juni 1879 mit†). Ich habe mich neuerdings in analoger Weise mit den *unendlich vielen Formen der Modulargleichungen* beschäftigt, welche nach der kürzlich von F. Klein dargelegten allgemeinen Theorie der elliptischen Modulfunctionen ††) existiren und möchte im Folgenden einige bisher von mir erhaltene Resultate mittheilen.

Ich muss dabei hervorheben, dass ich zu diesen neuen Untersuchungen, wie zu meinen früheren, durch Herrn F. Klein veranlasst und bei der Ausführung in mannigfacher Weise unterstützt worden bin.

---

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der Münchener Akademie, Sitzung vom 7. Februar 1880.

**) Betreffs dieser Relationen vergl. man folgende Litteratur:

Kronecker: Crelle's Journal Bd. 57 pag. 248 ff. und Berliner Monatsberichte von 1857, 1862, 1875.

Hermite: Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique in den Comptes Rendus Bd. 55 (1862). Vergl. auch den Briefwechsel zwischen Liouville und Hermite ebenda Bd. 53 (1861).

Joubert: Sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres in den Comptes Rendus Bd. 50.

Stephen Smith: Report of the British Association 1865 Bd. 35.

***) Mathem. Annalen Bd. XIV pag. 123

†) Vergl. den hier voranstehenden Wiederabdruck der betr. Note (p. 71—73).

††) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu München vom 6. December 1879 (oder auch p. 62—70 des gegenwärtigen Annalenheftes). Viel ausführlicher in der Vorlesung: Ueber elliptische Modulfunctionen, Sommer 1879.

Die Tendenz der neuen Untersuchungen kann folgendermassen bezeichnet werden: *Es gilt, bei den Modularcorrespondenzen m^{ter} Stufe die Anzahl der „Coincidenzen" in doppelter Weise abzuzählen, nämlich einmal auf arithmetischem, dann auf algebraischem Wege.* Auf arithmetischem Wege erhält man dabei stets eine *Summe von Classenanzahlen;* setzt man dann die beiderlei Resultate einander gleich, so hat man, was ich als *eine Classenzahlrelation der m^{ten} Stufe* bezeichne, und solcher Classenzahlrelationen giebt es, den verschiedenen Werthen von m entsprechend, unendlich viele. —

Die hiemit bezeichnete Aufgabe ist nun bis jetzt von mir nur theilweise durchgeführt worden.

Die *arithmetische* Abzählung, welche die linken Seiten unserer Relationen liefert, bietet, auch bei allgemeinstem Ansatze, keinerlei principielle Schwierigkeit. Ich habe die betr. Resultate für eine beliebige *Primzahlstufe* im I. Abschnitte dieser Note explicite angegeben.

Hingegen ist eine allgemeine *algebraische* Abzählung, welche die rechten Seiten der Classenzahlrelationen der m^{ten} Stufe ergiebt, vorerst noch zu ferne liegend. Die Hauptschwierigkeit liegt hier offenbar in der Lösung der Aufgabe, die Modularcorrespondenzen der m^{ten} Stufe auf der Curve des Geschlechtes p nach einer allgemeinen auf alle Transformationsgrade passenden Methode durch algebraische Gleichungen zu definiren. Verhältnissmässig einfach aber gestaltet sich diese Abzählung noch, wenn die betrachteten Congruenzmoduln *Hauptmoduln* im Sinne von pag. 64 sind.*) Für sie ist nämlich $p = 0$ und man hat es mit *Modulargleichungen* schlechthin, nicht aber mit Modularcorrespondenzen zu thun. *Ich habe mich bei Untersuchung der rechten Seiten bisher ausschliesslich mit solchen Hauptmoduln beschäftigt.* Sie allein schliessen schon eine grosse Menge der genannten Classenzahlrelationen in sich ein. Insbesondere enthalten sie auch die acht Kronecker'schen Formeln, welche nach der hier gemachten Eintheilung als Formeln 2., 4., 8., 16. Stufe erscheinen.

Was an diesen Formeln besonders bemerkenswerth erscheint, ist der Umstand, *dass ihre rechten Seiten sämmtlich sich durch höchst einfache a priori angebbare Theilersummen darstellen lassen,* dass sie also durchgehends mit den acht Kronecker'schen Relationen in Bezug auf ihren einfachen arithmetischen Aufbau auf gleicher Stufe stehen. Indess habe ich von einer Aufzählung aller dieser letztbezeichneten Resultate abgesehen und mich im II. Abschnitt der Note darauf beschränkt, die *Gesammtergebnisse* zu bezeichnen, welche mit den genannten Mitteln für die *siebente Stufe* gewonnen werden.

*) Blosse Citate auf Seitenzahlen beziehen sich immer auf die eingangs citirte Abhandlung von F. Klein [und zwar auf den in diese Annalen aufgenommenen Abdruck].

I.

Die linken Seiten für beliebige Primzahlen.

Die folgenden Erörterungen beziehen sich auf ein vollständiges System ausgezeichneter Congruenzmoduln der m^{ten} Stufe, wo m eine Primzahl > 2 sein soll. Dieses Modulsystem soll weiterhin nach pag. 65 so gewählt sein, dass es für verschiedene Werthe ω und ω' dann und nur dann dasselbe Werthsystem M_1', M_2', $\cdots$ aufweist, wenn ω und ω' auseinander durch ganzzahlige Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ mod. q von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ hervorgehen, dass sie hingegen für Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, welche mod. q nicht zur Identität congruent sind, sich linear transformiren.

Die Gruppe dieser linearen Transformationen besteht bei den hier gemachten Einschränkungen, wie bekannt, aus $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen.

Ich muss nun zunächst die F. Klein'schen Resultate, welche diese Modulsysteme betreffen, nach zwei Richtungen hin weiter ausführen.

1) Neben die von F. Klein genannte Modularcorrespondenz der q^{ten} Stufe stellen sich noch $q \cdot \frac{q^2-1}{2} - 1$ weitere, welche alle aus jener dadurch hervorgehen, dass man das ursprüngliche Modulsystem M, M_1, M_2, $\cdots$ fest lässt, hingegen das transformirte M', M_1', M_2' den eben genannten $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen (von der Identität abgesehen) unterwirft. Arithmetisch gelangt man zu denselben nach pag. 66 dadurch, dass man in $M(\omega)$, $M_1(\omega)$, $\cdots$ an Stelle von ω $\omega' = \frac{1}{n}\,\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ setzt und $M(\omega')$, $M_1(\omega')$, $\cdots$ beziehungsweise mit $M'(\omega)$, $M_1'(\omega)\cdots$ bezeichnet. Hiebei bedeutet $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ irgend eine ganzzahlige Substitution von der Determinante 1 und alle derartigen Substitutionen $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$, welche mod. q zu $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ congruent sind, liefern dieselbe Modularcorrespondenz. Dem entsprechend will ich die einzelne Correspondenz im Folgenden kurz durch

$$\omega' = \frac{1}{n}\,\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$$

bezeichnen.

Nach pag. 69 geht ferner jede dieser Correspondenzen durch $\frac{q(q^2-1)}{2}$ simultane Substitutionen der beiden Modulsysteme M, M' in sich über, und wenn insbesondere der Transformationsgrad n quadra-

tischer Rest mod. q ist, so giebt es *eine* Correspondenz, für welche diese simultanen Substitutionen *cogredient* (d. h. unter sich identisch) sind.

2) Auch für Transformationsgrade n, welche zu q nicht relativ prim sind, existiren in gewissem Sinne Modulargleichungen, bez. Modularcorrespondenzen, nämlich algebraische Relationen zwischen den gegebenen und den transformirten Moduln.

Ich begnüge mich hinsichtlich dieser Gleichungen, die als besonderen Fall die gewöhnlich sogenannten Modulargleichungen zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ für einen durch 2 theilbaren Transformationsgrad einschliessen, mit einigen wenigen Bemerkungen, die für das Folgende nöthig sind.

Der Grad dieser Gleichungen für die Transformation n^{ter} Ordnung ist in den einzelnen Variablen durch $n \cdot \Pi'\left(1 + \frac{1}{r}\right)$ dargestellt. Hiebei erstreckt sich das Product Π' über alle verschiedenen in n enthaltenen Primzahlen r mit Ausnahme von q. Ferner bleiben diese Correspondenzen bei $\frac{q^2(q-1)}{2}$ simultanen linearen Substitutionen der beiden Modulsysteme ungeändert. Da es im Ganzen $\frac{q^2(q^2-1)^2}{4}$ derartige Substitutionen giebt, so existiren überhaupt $\frac{(q^2-1)(q+1)}{2}$ Modulargleichungen der gemeinten Art. —

Nunmehr handelt es sich darum, auf zahlentheoretischem Wege die Coincidenzen aller dieser Modularcorrespondenzen abzuzählen, d. h. anzugeben, wie oft es vorkommt, dass das ursprünglich gegebene Modulsystem $M, M_1, \cdots$
mit dem transformirten $M', M_1', \cdots$
übereinstimmt.*)

Wir wollen der leichteren Ausdrucksweise halber in dem Falle, wo n auch quadratische Theiler ϱ^2 besitzt, welche zu q relativ prim sind, nicht an den im Vorhergehenden besprochenen irreduciblen Correspondenzen festhalten,**) sondern auch alle jenen irreduciblen Gleichungen zu gleicher Zeit im Auge behalten, welche den Transformationsgraden $\frac{n}{\varrho^2}$ entsprechen. Ist n ein reines Quadrat, so hat man noch eine gewisse Verabredung, die Transformation 1. Ordnung betreffend, hinzuzufügen.

Verstehen wir jetzt mit Kronecker unter $\mathrm{H}(n)$ die Anzahl aller

---

*) Es muss hierzu bemerkt werden, dass sich die folgenden Abzählungen nur auf jene Coincidenzen beziehen, welche Werthen ω mit *nicht* verschwindendem imaginären Bestandtheile entsprechen.

**) Hält man an den irreduciblen Gleichungen fest, so sind alle quadratischen Formen $Px^2 + Qxy + Ry^2$, für welche P, Q, R mit n einen Theiler gemeinsam haben, bei Berechnung der Classenzahlen auszuschliessen. Vergl. Joubert, die citirte Abhandlung.

Classen quadratischer Formen $Px^2 + Qxy + Ry^2$ von der negativen Determinante

$$Q^2 - 4PR = -n,$$

wobei jedoch die Formenclassen $Px^2 + Pxy + Py^2$ und $Px^2 + Py^2$ beziehungsweise als $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ gezählt werden und $\mathsf{H}(o) = -\frac{1}{12}$ gesetzt wird, *so ist die Anzahl der für die Correspondenz*

$$\omega' = \frac{1}{n} \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

entstehenden Coincidenzen im Allgemeinen durch:

$$g \Sigma \mathsf{H}(4n - l_i^2)$$

dargestellt. Hier bedeutet g eine ganze Zahl, welche ich das *Gewicht* nenne, und l_i beschreibt die sämmtlichen positiven und negativen ganzen Zahlen, eventuell auch 0, welche $\equiv \pm i \equiv \pm (\delta n + \alpha)$ mod. q sind und für welche

$$\Delta = 4n - l_i^2$$

nicht negativ wird. *Das Gewicht* g*), welches als Multiplicator der Classenzahlsumme auftritt, *ist gleich der Anzahl derjenigen linearen Transformationen der betrachteten Modularcorrespondenzen in sich, welche zu gleicher Zeit die Gleichungen:*

$$M : M_1 : M_2 : \cdots = M' : M_1' : M_2' : \cdots$$

in sich überführen und jeder der aufgezählten Classen quadratischer Formen entspricht ein Cyklus von solchen Coincidenzen, welche durch die g bezeichneten Substitutionen in einander übergehen.

Dieses allgemeine Verhalten bedarf nur in einigen speciellen Fällen, welche sich auf die Determinante $\Delta = 4n - l_i^2 \equiv 0$ mod. q beziehen, einer Ergänzung. *Sind nämlich die* $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *simultanen Substitutionen der Correspondenzen in sich cogredient,* — ein Fall, der, wie oben geschildert, nur eintritt, wenn der Transformationsgrad n quadratischer Rest mod. q ist, — *so ist die Anzahl der Coincidenzen durch:*

$$\frac{q(q^2-1)}{2} \Sigma \mathsf{H}\left(\frac{4n - l^2}{q^2}\right)$$

dargestellt, wo l sich über alle jene positiven und negativen Werthe hin erstreckt, für welche $4n - l^2$ nicht negativ und durch q^2 theilbar ist. Für die übrigen Correspondenzen des *Falles* $\Delta \equiv 0$ *mod.* q sind dann in den Classenzahlsummen links jedesmal alle jene Formen ausgeschlossen, für welche

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0 \text{ mod. } q$$

ist. *Ist in diesem Falle* $q \equiv 3$ *mod.* 4, *so wird die entstehende Anzahl von Coincidenzen durch*

*) Diese Auffassung des Gewichtes g verdanke ich Herrn F. Klein.

$$\frac{g}{2}\left(\Sigma \mathsf{H}\left(4n - l^2_{2\sqrt{n}}\right) - \Sigma \mathsf{H}\left(\frac{4n-l^2}{q^2}\right)\right)$$

oder

$$g\left(\Sigma \mathsf{H}\left(4n - l^2_{2\sqrt{n}}\right) - \Sigma \mathsf{H}\left(\frac{4n-l^2}{q^2}\right)\right)$$

dargestellt, je nachdem $n \gtrless 0$ *mod.* q, *oder* $n \equiv 0$ *mod.* q *ist.* Wenn hingegen *der Modul* $q \equiv 1$ *mod.* 4 *ist*, so trennen sich ausserdem noch diejenigen Classen quadratischer Formen von einander, durch welche *quadratische Reste* und jene, durch welche *quadratische Nichtreste mod.* q darstellbar sind, für welche also *der Charakter* $\left(\frac{P}{q}\right)$ den Werth $+1$, bez. -1 hat. Bezeichnen wir die Anzahl der Classen erster Art mit $\mathsf{H}_{+1}(n)$, jene der zweiten mit $\mathsf{H}_{-1}(n)$, *so sind die bezüglichen Coincidenzzahlen durch*

$$g\,\Sigma \mathsf{H}_{+1}\left(4n - l^2_{2\sqrt{n}}\right)$$

oder

$$g\,\Sigma \mathsf{H}_{-1}\left(4n - l^2_{2\sqrt{n}}\right)$$

dargestellt, je nachdem β, γ *quadratische Reste oder Nichtreste mod.* q *sind.* — Der Index $2\sqrt{n}$ bedeutet hier eine Zahl, welche, zum Quadrat erhoben, $\equiv 4n$ mod. q ist.

Hinsichtlich des Gewichtes g hat man, abgesehen von der cogredienten Correspondenz, folgende Resultate: Im Falle $l_i \gtrless 0$ mod. q ist

$$g = \frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right] \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2}\left[q + \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$$

oder $= q$, je nachdem $\Delta = 4n - l_i^2$ quadratischer Rest, oder Nichtrest oder congruent 0 mod. q ist. Dabei bedeutet $\left(\frac{-1}{q}\right)$ das Legendre'sche Zeichen, also $+1$ oder -1, je nachdem $q \equiv 1$ oder $\equiv 3$ mod. 4 ist. Ist $l \equiv 0$ mod. q, so ist g für jeden der bezeichneten Fälle gerade das Doppelte des angegebenen Werthes. Nur eine Ausnahme findet hier ($l \equiv 0$ mod. q) statt. Wenn nämlich $\Delta \equiv 0$, $q \equiv 3$ mod. 4 und $n \equiv 0$ mod. q ist, so wird wieder $g = q$ statt $2q$ sein.

Die Anzahl μ aller Correspondenzen der Transformation n^{ter} Ordnung, welche ein und dasselbe g liefern, ist im Allgemeinen $\frac{q(q^2-1)}{2g}$ und sie alle besitzen dieselbe Anzahl von Coincidenzen, indem diese nämlich durch ein und dieselbe Classenzahlsumme dargestellt ist. Sie gehen aus einander hervor, wenn man simultan die beiden Modulsysteme den $\frac{q(q^2-1)}{2}$ cogredienten Substitutionen unterwirft. Nur für den Fall $\Delta \equiv 0$ ist dieses wieder dahin zu ergänzen, dass es für denselben Werth von g (wieder abgesehen von der cogredienten Corre-

spondenz) 2 Arten von Modularcorrespondenzen giebt, sobald $n > 0$ mod. q oder gleichzeitig $n \equiv 0$ mod. q, $q \equiv 1$ mod. 4 ist.

Von den ausgezeichneten Modulsystemen der q^{ten} Stufe, wie sie bisher vorausgesetzt waren, *kann man nunmehr unmittelbar herabsteigen zu nicht ausgezeichneten Systemen von Congruenzmoduln N, N_1, N_2, $\cdots$ derselben Stufe*, d. h. zu solchen Modulsystemen, welche ausser bei ganzzahligen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ mod. q auch noch bei anderen solchen Substitutionen der Determinante 1 ungeändert bleiben. Diese Substitutionen sind in jedem speciellen Falle durch gewisse Congruenzen für α, β, γ, δ mod. q definirt. Alle diese Moduln lassen sich nach pag. 64 als rationale Functionen der erst betrachteten ausgezeichneten Moduln der q^{ten} Stufe darstellen und die verschiedenen Werthsysteme des Systems ausgezeichneter Moduln, welche einem festen Werthsysteme des nicht ausgezeichneten Modulsystems entsprechen, gehen aus einander durch gewisse lineare Substitutionen der ersteren hervor, welche eine in der Gesammtheit der $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen enthaltene Untergruppe bilden. Hieraus ergiebt sich sofort, dass das nicht ausgezeichnete Modulsystem für verschiedene Werthe ω und ω' nur dann dieselben Werthe aufweist, wenn die diesen ω Werthen entsprechenden Werthsysteme des ausgezeichneten Modulsystems durch eine Substitution der letztgenannten Untergruppe aus einander hervorgehen. *Dem entsprechend treten jetzt linker Hand als Anzahlen von Coincidenzpunkten einfach lineare Combinationen der oben beschriebenen Classenzahlaggregate auf*, die sich in jedem speciellen Falle leicht hinschreiben lassen.

II.

Die rechten Seiten für die siebente Stufe.

Von den ausgezeichneten Moduln, wie sie im ersten Abschnitt beschrieben sind, sind nur diejenigen *der ersten fünf Stufen* Hauptmoduln. Sie liefern die Modulargleichungen der regulären Körper, d. h. die Modulargleichungen der *rationalen Invariante*, des *Doppelverhältnisses*, *Tetraeders*, *Oktaeders* und *Ikosaeders**) und für sie lassen sich daher die rechten Seiten der bezüglichen Classenzahlrelationen einzeln leicht ermitteln. Dagegen treten für die genannten ausgezeichneten Congruenzmoduln höherer Stufen bereits *Modularcorrespondenzen* auf. Es können aber noch vielfach nichtausgezeichnete Moduln der q^{ten} Stufe vorkommen, welche wieder Hauptmoduln sind. Ich

*) F. Klein: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades in den Mathem. Annalen Bd. XIV, pag. 162.

möchte mir vorbehalten, bei einer nächsten Gelegenheit eine volle Aufzählung dieser Fälle zu geben.

Für die siebente Stufe schreibe ich folgende wesentlich verschiedene Hauptmoduln hin:

1. $$M = \frac{\lambda^2\mu}{\nu^3},$$

2. $$N = \frac{\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

3. $$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{(\lambda+\mu+\nu)(\gamma^6 A^2\lambda + \gamma^3 C^2\mu + \gamma^5 B^2\nu)}{(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) + \dfrac{-1-\sqrt{-7}}{2}(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)}, \\[2ex] Q_2 = \dfrac{(\lambda+\mu+\nu)(\gamma A^2\lambda + \gamma^4 C^2\mu + \gamma^2 B^2\nu)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2 + \dfrac{-1+\sqrt{-7}}{2}(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)}. \end{cases}$$

Aus ihnen setzen sich alle übrigen Hauptmoduln der siebenten Stufe rational zusammen. — Die Bedeutung der Grössen $\lambda, \mu, \nu, \gamma, A, B, C$ ist hier dieselbe wie in der F. Klein'schen Abhandlung: Ueber die Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Ann. Bd. XIV (insbes. pag. 440, 444, 445). —

Ausserdem sei bemerkt, *dass für Transformationsgrade* $n \equiv 0$ mod. 7 *wieder wirkliche Modulargleichungen zwischen* λ, μ, ν *und* λ', μ', ν' *stattfinden*, indem diese Gleichungen von selbst nur die Grössen $M = \frac{\lambda^2\mu}{\nu^3}$, $M' = \frac{\lambda'^2\mu'}{\nu'^3}$ enthalten.*) Diese Angabe entspricht dem, *dass man die Ikosaedermodulargleichungen für einen durch fünf theilbaren Transformationsgrad als Gleichungen zwischen* η^5 *und* η'^5 *anschreiben kann*, wie hier beiläufig bemerkt sei.

Auf Grund der genannten Hauptmoduln 7. Stufe gelingt es nun, *die sämmtlichen Formeln 7. Stufe mit Hilfe eines einzigen Parameters* $\xi(n)$ *darzustellen*, der übrigens nur dann einen von Null verschiedenen Werth haben kann, wenn n quadratischer Rest mod. 7 ist. *Nach Adjunction dieses Parameters drücken sich die sämmtlichen rechten Seiten der Classenzahlformeln 7. Stufe durch höchst einfach definirte Theilersummen des Transformationsgrades* n *aus, während der Parameter* $\xi(n)$ *selbst sich nicht allgemein durch diese Theilersummen darstellt, und daher als eine wesentlich complicirtere zahlentheoretische Function erscheint*, über die ich bei einer anderen Gelegenheit Mittheilung machen möchte.

Die angedeuteten Theilersummen von n sind folgende:

1) $\Phi(n)$ ist die Summe aller Theiler von n,

---

*) Z. B. hat man nach einer Rechnung, die Herr Klein gelegentlich anstellte, für $n = 7$ folgende Gleichung:

$$1 - MM' = [2(\gamma+\gamma^6) + 3(\gamma^2+\gamma^5)](M+M'+1).$$

2) $\Psi(n)$ ist die Summe der Theiler von n, die $> \sqrt{n}$ sind, weniger der Summe der Theiler von n, die $< \sqrt{n}$ sind.

3) U_i bedeutet die Summe jener Theiler a_i von n, die $< \sqrt{n}$ sind und zugleich die Bedingung $a_i \equiv \pm i$ mod. 7 erfüllen, mit der Festsetzung, dass wenn n ein reines Quadrat und $\sqrt{n} \equiv \pm i$ mod. 7 ist, zu dieser Summe noch $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ hinzuaddirt werde.

4) $U_i^{(\nu)}$ bedeutet die Summe der Theiler von n, welche $< \sqrt{n}$, durch $7^{(\nu)}$ theilbar und durch 7^ν dividirt congruent $\pm i$ mod. 7 sind.

5) Ausserdem bedeutet $\xi(n)$, wie schon soeben gesagt, die hier nicht näher zu definirende höhere zahlentheoretische Function.

Die Formeln 7. *Stufe sind dann* (nach Hinwegwerfung von gemeinsamen Factoren) *folgende:*

I. $n =$ *quadr. Rest mod.* 7

1) $$3 \cdot \Sigma \mathrm{H}\, \frac{4n - l^2}{49} = \xi(n),$$

2) $$3 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_0^2) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{n}} - 14\,\xi(n),$$

3) $$3 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_{\sqrt{n}}^2) = \Phi(n) - 3\,U_{2\sqrt{n}} - 3\,U_{4\sqrt{n}},$$
$$= \frac{1}{2}\,(3\Psi(n) - \Phi(n)) + 3\,U_{\sqrt{n}},$$

4) $$3 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_{2\sqrt{n}}^2) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{n}} - 7\,\xi(n),$$

5) $$6 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_{4\sqrt{n}}^2) = \Phi(n) + 12\,U_{\sqrt{n}} + 28\,\xi(n).$$

II. $n =$ *quadr. Nichtrest mod.* 7.

1) $$3 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_0^2) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{-n}},$$

2) $$4 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_{\sqrt{-n}}^2) = \Phi(n),$$

3) $$3 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_{2\sqrt{-n}}^2) = \Phi(n) - 3\,U_{2\sqrt{-n}} - 3\,U_{4\sqrt{-n}},$$
$$= \frac{1}{2}\,(3\Psi(n) - \Phi(n)) + 3\,U_{\sqrt{-n}},$$

4) $$4 \cdot \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_{4\sqrt{-n}}^2) = \Phi(n).$$

III. $n \equiv 0$ *mod.* 7.

$$n = 7^\mu \cdot m; \quad m \gtrless 0 \text{ mod. } 7.$$

1) $$\Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_0^2) = 2\Phi(m) + 7\Phi\left(\frac{n}{49}\right) + 7\Psi\left(\frac{n}{49}\right),$$

2) $$3 . \Sigma \mathrm{H}\,(4n - l_d^2) = 7^\mu \Phi(m) - 3\,U_d^{(0)} - 3\,U_{\frac{m}{d}}^{(\mu)}.$$

Die Summen linker Hand erstrecken sich für die so geschriebenen Formeln über folgende Zahlensysteme:

1) $l_0 = 0, \pm 7, \pm 14, \cdots \equiv 0 \bmod. 7,$
2) $l_1 = 1, 6, 8, 13, \quad \cdots \equiv \pm 1 \bmod. 7,$
3) $l_2 = 2, 5, 9, 12, \quad \cdots \equiv \pm 2 \bmod. 7,$
4) $l_4 = 3, 4, 10, 11, \quad \cdots \equiv \pm 4 \bmod. 7,$

und sind so lange fortzusetzen, als $4n - l_i^2$ nicht negativ ist. Desgleichen beschreibt l alle positiven ganzen Zahlen, für welche $\frac{4n-l^2}{49}$ eine ganze positive Zahl oder Null ist. Ferner sind $\Phi\left(\frac{n}{49}\right)$ und $\Psi\left(\frac{n}{49}\right)$ gleich Null zu setzen, falls $\frac{n}{49}$ keine ganze Zahl sein soll, und der Index $r\sqrt{\mu}$ bedeutet immer jenen kleinsten quadratischen Rest mod. 7, welcher ins Quadrat erhoben $\equiv \mu r^2$ mod. 7 ist. Endlich bedeutet der Index d in Formel III, 2 einen beliebigen der quadratischen Reste 1, 2, 4 mod. 7, so dass diese eine Formel 3 Formeln vertritt. —

Zum Schlusse schreibe ich beispielsweise noch je eine Formel 9ter, 13ter und 11ter Stufe hin.

I. Sei $n \equiv$ quadr. Nichtrest mod. 9, so ist:

$$3\Sigma \mathsf{H}(4n - l_0^2) = \Phi(n) - 6\,U_{\sqrt{-n}}.$$

II. Sei $n \equiv 5$ mod. 13, so ist:

$$6\Sigma \mathsf{H}(4n - l_6^2) = \Phi(n) - 6\,U_1 - 6\,U_5.$$

III. Sei $n \equiv 1$ mod. 11, so ist:

$$22\Sigma \mathsf{H}\left(\frac{4n-l^2}{121}\right) + 3\,\Sigma \mathsf{H}(4n - l_0^2) + 4\Sigma \mathsf{H}(4n - l_1^2)$$
$$+ 2\Sigma \mathsf{H}(4n - l_3^2) + 2\Sigma \mathsf{H}(4n - l_4^2) = \Phi(n) + \Psi(n).$$

Die auftretenden Symbole sind hierbei ebenso definirt, wie bei den Formeln 7. Stufe, nur dass an Stelle von mod. 7 beziehungsweise mod. 9, mod. 13, mod. 11 zu setzen ist.

Ich knüpfe hieran noch einige Bemerkungen über Liouville's einschlägige Arbeiten. Bekanntlich war Liouville der Erste, der in dem hier behandelten Gebiete über Kronecker hinaus ging. Auf seine reinzahlentheoretischen Ansätze gestützt konnte er auf die Existenz von unendlich vielen den Kronecker'schen analogen Classenzahlformeln hinweisen. Die Analogie der Liouville'schen mit den Kronecker'schen Formeln bestand hauptsächlich darin, dass es sich hier wie dort um Aggregate von Classenzahlen quadratischer Formen von negativen Determinanten handelte, welche eine arithmetische Reihe 2. Ordnung bildeten. Hingegen kam Liouville, so viel ich weiss, nirgends ausdrücklich auf die Frage zurück, welcher Art die zahlentheoretischen Functionen sind, durch welche jene Classenzahlaggregate

definirt werden können, und es ist klar, dass diese Functionen im Allgemeinen wesentlich complicirter ausfallen werden, als jene einfachen Theilersummen, welche ausschliesslich in den oft erwähnten acht Kronecker'schen Formeln enthalten sind.*) Aber im Besonderen können wohl solche Aggregate auftreten, zu deren Definition derartige einfache Theilersummen hinreichen und welche also in jeder Beziehung mit den acht Kronecker'schen Formeln analog sind. Indes hat Liouville nur eine geringe Anzahl derartiger neuer Formeln in kleinen, sehr zerstreuten Abhandlungen wirklich explicite hingestellt.**)

Von diesen fallen nur zwei unter die bislang von mir gewonnenen Resultate. Seine Formeln im *Journal de Mathématiques* sér. 2 Bd. XIII pag. 2, und Bd. XIV pag. 262 sind nämlich beziehungsweise specielle Formeln 6. und 10. Stufe. Hingegen findet sich keine der von mir im Vorhergehenden mitgetheilten Relationen unter den Liouville'schen Angaben Möglicherweise sind aber derartige Resultate implicite in den Liouville'schen Abhandlungen enthalten und dann müsste allerdings der rein arithmetischen Methode Liouville's der Vorrang gelassen werden. Aber ganz abgesehen von dem zahlentheoretischen Werthe dieser Untersuchungen *ist es immerhin für den neuen Stand der elliptischen Modulfunctionen bezeichnend, dass nunmehr auch hier auf dem ursprünglich von Kronecker eingeschlagenen Wege in Bezug auf solche Classenzahlrelationen ein unendlicher Ausblick eröffnet ist, während das alte Gebiet derselben mit den erwähnten acht Kronecker'schen Formeln vollkommen erschöpft war.* (Vergl. Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1875 pag. 235.)

---

*) Formeln, in denen complicirtere zahlentheoretische Functionen auftreten, hat späterhin auch Kronecker aufgestellt und zwar durch Umformung von Θ-Reihen, vergl. Berliner Monatsberichte von 1875 pag. 225 ff.

**) Vergl. Liouville's Journal, sér. 2, Bd. XII p. 98, Bd. XIII p. 1. ff. Bd. XIV p. 2, 7, 8, 262, sowie die allgemeinen Auseinandersetzungen in Bd. III—VIII ebenda, insbesondere die Bemerkungen in Bd. VII, p. 44.

Ueber Reihenentwicklung nach Bessel'schen Functionen.

Von

Julius König in Budapest.

(Auszug aus einem Schreiben des Verfassers an die Redaction.)

Im ersten Capitel seiner Abhandlung über Bessel'sche Functionen (Annalen, XVI. Bd. p. 2) beschäftigt sich Herr Sonine mit dem Probleme, die Entwicklung einer beliebigen analytischen Function in Reihen zu geben, die nach Bessel'schen Functionen der Variabeln fortschreiten und im Uebrigen der Taylor'schen, bez. Mac-Laurin'schen Reihe entsprechen. Während die Lösung, die C. Neumann für dieses Problem gegeben, die Coefficienten noch in Form geschlossener Integrale liefert, bestimmen sich in den Formeln (22) und (23) der angeführten Abhandlung die Coefficienten direct durch recurrirende Gleichungen, also gerade so, wie im Falle der Potenzreihen.

Gestatten Sie mir jedoch die Bemerkung, dass ich diese Darstellung schon im V. Bande der Annalen („Ueber die Darstellung von Functionen durch unendliche Reihen" pag. 310) gegeben habe. Nur der Umstand, dass diese Resultate sich in einer grösseren Arbeit zumeist allgemein functionentheoretischen Inhalts finden, scheint der Grund zu sein, dass sie in den seitherigen Arbeiten über Bessel'sche Functionen übersehen wurden.

Der einfache überaus kurze Gang der Entwicklung, den ich damals eingeschlagen habe, ist dem complicirten Transformationsapparate bei Herrn Sonine um so eher vorzuziehen, als auf diesem Wege die Bestimmung der Convergenzverhältnisse wohl nicht als stringent angesehen werden kann.

Meine am a. O. gegebene Ableitung benutzt übrigens die Sätze der allgemeinen Functionentheorie gar nicht. Auf S. 311—12 findet sich die Reihenentwicklung einer beliebigen analytischen Function nach Functionen

$$G_0(z),\ G_1(z),\ \cdots,\ G_n(z),\ \cdots$$

wo

$$G_n(z) = (z - z_0)^n \Phi_n(z), \quad \text{und} \quad \Phi_n(z) \text{ für } z = z_0$$

endlich von Null verschieden, im Uebrigen aber beliebig ist. Die Bessel'schen Functionen genügen diesen Bedingungen, und die speciellen Resultate für diesen Fall sind unter verschiedenen anderen Anwendungen auf S. 338 angegeben. — Nur die recurrirenden Formeln für die Coefficienten (pag. 312 und 338) sind bei H. Sonine durch die ausgerechneten Ausdrücke ersetzt, die übrigens aus jenen ohne Mühe abgeleitet werden können.

Budapest 1880.

Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen.

Von

A. Brill in München.

Im Folgenden beabsichtige ich einen Weg anzugeben, auf dem man in den Kernpunkt der Theorie der elliptischen Functionen, die Lehre von der Θ-Function, mit Hilfe einer kurzen Rechnung in naturgemässer Weise eingeführt wird. Ich will nämlich zeigen, dass der auch in der Theorie der Abel'schen Functionen fruchtbare Process der Normirung des Integrals dritter Gattung (dem man zu diesem Zwecke die Form eines Doppelintegrals giebt) gewissermaassen von selbst zur Einführung der Jacobi'schen Functionen Z und Θ hinleitet, deren fundamentale Bedeutung im Verlaufe der Entwicklung, aus der sie hervorgehen, deutlich zu Tage tritt. Ich bediene mich der Jacobi'schen Bezeichnungsweise und setze nur die Periodicitätseigenschaften des Integrals *erster* Gattung als bewiesen voraus.

1.

Das Additionstheorem für Integrale erster Gattung.

Differenzirt man in Bezug auf die Veränderlichen x_1 und x_2 die Gleichung*):

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \sqrt{X_1} \\ 1 & x_2 & \sqrt{X_2} \\ 1 & c & \sqrt{C} \end{vmatrix} = 0,$$

wo $X_i = x_i(1-x_i)(1-\varkappa^2 x_i)$, $(i=1,2)$, $\varkappa$, c, C Constante sind, und c mit C ebenso zusammenhängt, wie x_i mit X_i, und eliminirt

*) Geometrisch ausgedrückt ist diese Gleichung die Bedingung dafür, dass drei Punkte der Curve:

$$y^2 = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)$$

in gerader Linie liegen.

dann c, so erhält man eine Differentialgleichung für x_1 und x_2, die sich durch Einführung der folgenden Hilfsgrösse bequemer bilden lässt. Man setze:

$$\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}} = \frac{x_1 - c}{\sqrt{X_1} - \sqrt{C}} = \frac{x_2 - c}{\sqrt{X_2} - \sqrt{C}} = \lambda.$$

Die Gleichung:

$$\lambda^2 X - (x - c + \lambda \sqrt{C})^2 = 0$$

wird dann durch $x = x_1$ und $x = x_2$ identisch erfüllt, und man hat:

$$\frac{\lambda^2(X - C)}{x - c} - 2\lambda\sqrt{C} - (x - c) \equiv \lambda^2 \varkappa^2 (x - x_1)(x - x_2) \equiv \Phi(x, \lambda).$$

Hieraus ergiebt sich durch Differenziren:

$$dx_i = - d\lambda \cdot \left[\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}\right]_{x = x_i}.$$

Nun ist:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\right]_{x=x_1} = \frac{2\lambda(X_1 - C)}{x_1 - c} - 2\sqrt{C} = 2\sqrt{X_1};$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{x=x_1} = \varkappa^2 \lambda^2 (x_1 - x_2).$$

Daher:

(2) $$\frac{dx_1}{2\sqrt{X_1}} = - \frac{d\lambda}{\varkappa^2 \lambda^2 (x_1 - x_2)}; \quad \frac{dx_2}{2\sqrt{X_2}} = \frac{d\lambda}{\varkappa^2 \lambda^2 (x_1 - x_2)},$$

woraus:

(3) $$\frac{dx_1}{2\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{2\sqrt{X_2}} = 0.$$

Eine Form des Integrals dieser Differentialgleichung ist die Ausgangsgleichung, eine andere Form erhält man, indem man (3) Glied für Glied integrirt, wobei rechts eine Constante auftritt, die eine Function von c sein wird. Man bestimmt dieselbe auf folgende Weise. Zunächst gebe man (1) die Form:

(4) $$x_1\sqrt{X_2} - x_2\sqrt{X_1} + c(\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}) = \sqrt{C} \cdot (x_1 - x_2)$$

Quadrirt man diese Gleichung, so erhält man eine in c rationale Form, die, vom dritten Grad, die zwei Wurzeln $c = x_1$, $c = x_2$ besitzen wird. Nennt man die dritte Wurzel c, so ist das Product der drei Wurzeln gleich dem negativen Quotienten der Coefficienten des ersten und letzten Gliedes der nach Potenzen von c geordneten Gleichung; also:

(5) $$x_1 x_2 c = \left[\frac{x_1\sqrt{X_2} - x_2\sqrt{X_1}}{\varkappa(x_2 - x_1)}\right]^2,$$

daher, mit Benutzung der Gleichung (4):

$$(6)\qquad \frac{\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}}{x_1-x_2}-\frac{\sqrt{C}}{c}=\varkappa\sqrt{\frac{x_1x_2}{c}}.$$

Aus der Formel (5) leitet man noch die folgende ab:

$$(7)\qquad c=\left[\frac{\sqrt{x_2(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)}-\sqrt{x_1(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)}}{\varkappa(x_2-x_1)}\right]^2,$$

aus der man erkennt, dass, für $x_2=0$; $x_1=\frac{1}{\varkappa^2c}$ wird. Hierdurch erhält das Integral der obigen Differentialgleichung die Form:

$$(8)\qquad \int_0^{x_1}\frac{dx_1}{2\sqrt{X_1}}+\int_0^{x_2}\frac{dx_2}{2\sqrt{X_2}}=\int_0^{\frac{1}{\varkappa^2c}}\frac{dx}{2\sqrt{X}}=-\int_\infty^{c}\frac{dy}{2\sqrt{Y}},$$

wo $y=\frac{1}{\varkappa^2x}$ unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite eingeführt wurde.

Bezeichnet man den imaginären Periodicitätsmodul des Normalintegrals erster Gattung:

$$u=\int_0^x\frac{dx}{2\sqrt{X}},$$

mit:

$$iK'=\int_0^\infty\frac{dx}{2\sqrt{X}},$$

und setzt:

$$\sqrt{x_i}=\sin\operatorname{am}(u_i,\varkappa),\quad \sqrt{c}=\sin\operatorname{am}(\gamma,\varkappa),$$

so wird die neue Form der Integralgleichung von (3):

$$(8a)\qquad u_1+u_2=iK'-\gamma,$$

und demnach, mit Benutzung einer bekannten Transformationsformel (die übrigens auch aus der in (8) vorgenommenen Transformation des Integrals folgt):

$$(9)\qquad c^2=\sin^2\operatorname{am}\gamma=\sin^2\operatorname{am}(u_1+u_2+iK')$$
$$=\frac{1}{\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u_1+u_2)}.$$

Führt man dies in die Gleichung (7) ein, nachdem man dieselbe reciprok genommen und den Nenner auf rationale Form gebracht hat, so erhält man, indem man beiderseits die Wurzel zieht, die Additionsformel für Sinus amplitudo:

$$\sin\operatorname{am}(u_1+u_2)=\frac{\sqrt{x_2(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)}+\sqrt{x_1(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)}}{1-\varkappa^2x_1x_2}$$
$$=\frac{\sin\operatorname{am}u_2\cos\operatorname{am}u_1\Delta\operatorname{am}u_1+\sin\operatorname{am}u_1\cos\operatorname{am}u_2\Delta\operatorname{am}u_2}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}u_1\sin^2\operatorname{am}u_2}.$$

Hieraus folgen die später zu verwendenden Formeln:

(9)
$$\frac{1}{2}\left\{\sin^2 \mathrm{am}\,(u_1+u_2)+\sin^2 \mathrm{am}\,(u_1-u_2)\right\}$$
$$=\frac{x_2(1-x_1)(1-\varkappa^2 x_1)+x_1(1-x_2)(1-\varkappa^2 x_2)}{(1-\varkappa^2 x_1 x_2)^2},$$

(10)
$$\sin^2 \mathrm{am}(u_1+u_2)-\sin^2 \mathrm{am}(u_1-u_2)=\frac{4\sqrt{X_1 X_2}}{(1-\varkappa^2 x_1 x_2)^2}.$$

2.

Das Additionstheorem für Integrale zweiter und dritter Gattung.

Wiewohl für das Folgende unwesentlich mag das Additionstheorem für die beiden anderen Gattungen von Integralen ebenfalls auf dem eingeschlagenen Wege abgeleitet werden, weil der hierzu nöthige Rechnungsaufwand beträchtlich geringer ist, als ihn die mir sonst bekannten Beweise verlangen.

Ich gehe von den Integralen aus:

$$J(u)=\int_0^x \frac{\varkappa^2 x\,dx}{2\sqrt{X}},\qquad \pi(u,\alpha)=\int_0^x \frac{dx\sqrt{A}}{2(x-a)\sqrt{X}},$$

welche, wenn man:

$$x=\sin^2 \mathrm{am}\,u;\quad a=\sin^2 \mathrm{am}\,\alpha;\quad b=\sin^2 \mathrm{am}\,\beta;\quad K=\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{X}},$$

und:

(1)
$$\sin^2 \mathrm{am}\,\alpha=\frac{1}{\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\beta}=\sin^2 \mathrm{am}\,(\beta+iK')$$

setzt, mit den von Jacobi eingeführten Integralen 2. und 3. Gattung $\mathsf{Z}(u)$ und $\Pi(u,\beta)$ in der Beziehung stehen:

(2)
$$J(u)=\frac{u}{K}\int_0^K \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u\,du-\mathsf{Z}(u);$$

(3)
$$\pi(u,\alpha)=-\int_0^u \frac{du}{1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,\beta}\cdot\frac{\cos \mathrm{am}\,\beta\,\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}{\sin \mathrm{am}\,\beta}$$
$$=\Pi(u,\beta)-u\cdot\frac{\cos \mathrm{am}\,\beta\,\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}{\sin \mathrm{am}\,\beta},$$

wo

(4)
$$\Pi(u,\beta)=\int_0^u \frac{\varkappa^2 du \sin^2 \mathrm{am}\,u\cdot \sin \mathrm{am}\,\beta \cos \mathrm{am}\,\beta\,\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}{1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,\beta}.$$

Die Summe von zwei *Integralen zweiter Gattung* $J(u_1)+J(u_2)$

lässt sich mit Hülfe der Formeln (2) und (6) des § 1. transformiren. Man hat nämlich in den Bezeichnungen dieses Paragraphen:

$$\frac{\varkappa^2 x_1 dx_1}{2\sqrt{X_1}} + \frac{\varkappa^2 x_2 dx_2}{2\sqrt{X_2}} = -\frac{d\lambda}{\lambda^2} = d\left(\frac{\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}}{x_1-x_2}\right) = \varkappa \cdot d\sqrt{\frac{x_1 x_2}{c}}\,.$$

Führt man hier statt der x, c die Integrale u, γ ein und integrirt zunächst unbestimmt, so kommt, indem man die Integrationsconstante aus $u_2 = 0$ bestimmt, wo denn (§ 1. (8a)) $u_1 = -\gamma + iK'$ wird:

$$J(u_1) + J(u_2) = \varkappa^2 \sin\operatorname{am} u_1 \sin\operatorname{am} u_2 \sin\operatorname{am}(u_1+u_2) + J(u_1+u_2).$$

Diese Formel bleibt offenbar richtig, wenn man J durch Z ersetzt; dies ist dann aber die zu beweisende Additionsformel für Integrale zweiter Gattung.

Für die Summe von zwei *Integralen dritter Gattung* erhält man (in den Bezeichnungen des § 1.):

$$\frac{dx_1\sqrt{A}}{2(x_1-a)\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2\sqrt{A}}{2(x_2-a)\sqrt{X_2}} = \frac{\sqrt{A}\,d\lambda}{\varkappa^2\lambda^2(x_1-a)(x_2-a)}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\varkappa^2\lambda^2(x_1-a)(x_2-a) &= \Phi(a,\lambda)\\ &= \frac{\lambda^2(A-C)}{a-c} - 2\lambda\sqrt{C} - (a-c)\\ &= \frac{A-C}{a-c}\left(\lambda - \frac{c-a}{\sqrt{C}-\sqrt{A}}\right)\left(\lambda - \frac{c-a}{\sqrt{C}+\sqrt{A}}\right),\end{aligned}$$

wo die eingeführte Grösse c mit x_1, x_2 in der in § 1. erörterten Weise verbunden ist. Daher wird:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{A}\,d\lambda}{\varkappa^2\lambda^2(x_1-a)(x_2-a)} &= \frac{1}{2}\,d\log\frac{\lambda - \dfrac{c-a}{\sqrt{C}-\sqrt{A}}}{\lambda - \dfrac{c-a}{\sqrt{C}+\sqrt{A}}}\\ &= \frac{1}{2}\,d\log\frac{\dfrac{\sqrt{C}-\sqrt{A}}{c-a} - \dfrac{\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}}{x_1-x_2}}{\dfrac{\sqrt{C}+\sqrt{A}}{c-a} - \dfrac{\sqrt{X_1}-\sqrt{X_2}}{x_1-x_2}}.\end{aligned}$$

Man gestaltet zunächst den Zähler dieses Ausdrucks dadurch um, dass man von jedem der beiden Brüche die Grösse $\frac{\sqrt{C}}{c}$ abzieht, wodurch derselbe mit Rücksicht auf (5) und (6) § 1. die Form erhält:

$$\varkappa\sqrt{\frac{ap}{c}} - \varkappa\sqrt{\frac{x_1x_2}{c}},$$

wo die Grösse p mit a und c in derselben Beziehung steht, in der c mit x_1 und x_2 steht, so dass also:

$$p = \frac{1}{\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(\alpha + \gamma)} = \frac{1}{\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(u_1 + u_2 - \beta)}$$

ist, wenn:

$$a = \sin^2 \operatorname{am} \alpha = \frac{1}{\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \beta} = \sin^2 \operatorname{am}(\beta + iK')$$

gesetzt wird. Der Zähler des obigen Ausdrucks erhält unter Einführung dieser Bezeichnungen — bis auf einen in die Constante der Integration eingehenden Factor — die Form:

$$1 - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u_1 \sin \operatorname{am} u_2 \sin \operatorname{am} \beta \sin \operatorname{am}(u_1 + u_2 - \beta).$$

Man geht zum Nenner über, indem man $\sqrt{A}$ mit $-\sqrt{A}$, d. h. α mit $-\alpha$ und also β mit $-\beta$ vertauscht, und erhält, nach Bestimmung der Integrationsconstanten aus dem Specialfall $u_2 = 0$, $u_1 = iK' - \gamma$, die Gleichung (s. oben (1), (3)):

$$\Pi(u_1, \beta) + \Pi(u_2, \beta)$$
$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u_1 \sin \operatorname{am} u_2 \sin \operatorname{am} \beta \sin \operatorname{am}(u_1 + u_2 - \beta)}{1 + \varkappa^2 \sin \operatorname{am} u_1 \sin \operatorname{am} u_2 \sin \operatorname{am} \beta \sin \operatorname{am}(u_1 + u_2 + \beta)}$$
$$+ \Pi(u_1 + u_2, \beta).$$

3.

Vorläufige Normirung des Integrals dritter Gattung.

In den folgenden beiden Paragraphen wird das von Jacobi mit $\Pi(u, \alpha)$ bezeichnete Integral dritter Gattung durch Addition eines Logarithmus und eines Integrals erster Gattung in eine Normalform übergeführt, welche bezüglich des Vorkommens von Argument und Parameter symmetrisch, und deren reeller Periodicitätsmodul Null ist. Das Erstere geschieht im Anschluss an die Form des Integrals dritter Gattung $\pi(u, \alpha)$ (§ 2.), für welche sich vermöge einiger in § 1. entwickelten Formeln die Rechnung einfach gestaltet, und von der man leicht zu einer für die weitere Normirung bequemeren Form übergeht.

Man bringe das Integral $\pi(u, \alpha)$ auf die Form eines Doppelintegrals:

$$\pi(u, \alpha) = \int_0^x \frac{dx}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{X}} = \int_0^x \int_0^a \frac{dx\, da}{2\sqrt{X}} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{A}}{x - a} \right),$$

wo

$$\sqrt{x} = \sin \operatorname{am} u; \quad \sqrt{a} = \sin \operatorname{am} \alpha;$$
$$X = x(1 - x)(1 - \varkappa^2 x); \quad A = a(1 - a)(1 - \varkappa^2 a)$$

ist. Vertauscht man den Parameter α mit dem Argument u, d. h. $(a, \sqrt{A})$ mit $(x, \sqrt{X})$, so kann man der Differenz $\pi(u, \alpha) - \pi(\alpha, u)$ die Form geben:

$$\pi(u, \alpha) - \pi(\alpha, u)$$

$$= -\int_0^x \int_0^a dx\, da \left\{ \frac{1}{2\sqrt{X}} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{X} - \sqrt{A}}{x - a} \right) - \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{X} - \sqrt{A}}{x - a} \right) \right\}.$$

Aber die zu differenzirenden Ausdrücke, reciprok genommen, haben die Form des oben § 1. mit λ bezeichneten Ausdrucks, wenn man dort statt x_1, c bezw. x, a setzt. Wird ferner vorübergehend statt der dort auftretenden Grösse $x_2 \cdots y$ gesetzt, so hat man mit Hülfe von (2) § 1.:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{X} - \sqrt{A}}{x - a} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{-\varkappa^2 \lambda^2 (x - y)}{2\sqrt{X}}.$$

Vertauscht man in dieser Formel x mit a, so erhält man den anderen der zu bildenden Differentialquotienten, und der obige Klammerausdruck wird:

$$\frac{1}{2\sqrt{X}} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\varkappa^2 (a - x)}{4\sqrt{XA}},$$

also:

$$\pi(u, \alpha) - \pi(\alpha, u) + \int_0^x \int_0^a \frac{dx\, da}{4\sqrt{XA}} \cdot \varkappa^2 (a - x) = 0.$$

Man vereinige nun das eine der beiden Doppelintegrale mit $\pi(u, \alpha)$, das andere mit $\pi(\alpha, u)$ und setze:

$$\pi_1(u, \alpha) = \pi(u, \alpha) + \int_0^x \int_0^a \frac{dx\, da \cdot \varkappa^2 a}{4\sqrt{XA}}.$$

Die nähere Verbindung der Integrale rechts führt auf eine elegante Form von $\pi_1(u, \alpha)$. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{2\sqrt{X}} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sqrt{A}}{x - a} \right) + \frac{\varkappa^2 a}{4\sqrt{XA}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{X}} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{2(x - a)^2} + \frac{\varkappa^2 a}{4\sqrt{XA}} = \frac{\varkappa^2 y (x - a)^2 + 2\sqrt{XA}}{4\sqrt{XA}(x - a)^2}.$$

Nach § 1. Formel (7), die auch nach Vertauschung von x_2 mit c richtig bleibt, hat man aber:

$$\varkappa^2 y (a - x)^2 = \left\{ \sqrt{a(1 - x)(1 - \varkappa^2 x)} - \sqrt{x(1 - a)(1 - \varkappa^2 a)} \right\}^2,$$

und demnach:

$$\pi_1(u, \alpha) = \int_0^x \int_0^a \frac{dx\, da}{4\sqrt{XA}} \left\{ \frac{a(1 - x)(1 - \varkappa^2 x) - x(1 - a)(1 - \varkappa^2 a)}{(a - x)^2} \right\}.$$

Wir übertragen diese Beziehung zunächst auf eine andere Form des Integrals dritter Gattung. Differenzirt man π_1 nach u, so kommt:

$$\frac{\partial \pi_1(u, \alpha)}{\partial u} = \frac{\sqrt{A}}{x - a} + \int_0^\alpha \frac{\varkappa^2 a\, d\alpha}{2\sqrt{A}}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{2\sqrt{A}} \left\{ \frac{a(1-x)(1-\varkappa^2 x) - x(1-a)(1-\varkappa^2 a)}{(a-x)^2} \right\}.$$

Setzt man hier $x = \frac{1}{\varkappa^2 y}$, so wird:

$$\sqrt{y} = \sin \operatorname{am} v = \sin \operatorname{am}(u + iK'),$$

und demnach, mit Rücksicht auf § 1. (9):

$$\frac{\varkappa^2 y \sqrt{A}}{1 - \varkappa^2 a y} + \int_0^\alpha \frac{\varkappa^2 a\, d\alpha}{2\sqrt{A}}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{\varkappa^2 d\alpha}{2\sqrt{A}} \left\{ \frac{a(1-y)(1-\varkappa^2 y) + y(1-a)(1-\varkappa^2 a)}{(1-\varkappa^2 a y)^2} \right\}$$

$$= \int_0^\alpha \frac{\varkappa^2}{2} \left\{ \sin^2 \operatorname{am}(v+\alpha) + \sin^2 \operatorname{am}(v-\alpha) \right\} d\alpha.$$

Integrirt man nach v, so kommt:

$$2\int_0^y \frac{\varkappa^2 y \sqrt{A}}{1 - \varkappa^2 a y} \cdot \frac{dy}{2\sqrt{Y}} + 2\int_0^y \int_0^\alpha \frac{\varkappa^2 a\, d\alpha\, dy}{4\sqrt{YA}}$$

$$= \int_0^v \int_0^\alpha \varkappa^2 \left\{ \sin^2 \operatorname{am}(v+\alpha) + \sin^2 \operatorname{am}(v-\alpha) \right\} dv\, d\alpha,$$

oder, mit Benutzung der in § 2. eingeführten Bezeichnungen, wenn man noch das letzte Doppelintegral gleich $\Pi_1(v, \alpha)$ setzt:

$$2\,\Pi(v, \alpha) + 2v J(\alpha) = \Pi_1(v, \alpha).$$

Bevor wir mit der Untersuchung der Periodicitätseigenschaften des Integrals dritter Gattung beginnen, zerlegen wir $\Pi_1(v, \alpha)$ in zwei Theile, welche den Summanden unter dem Doppelintegralzeichen entsprechen.

Es geschieht dies mit Hülfe der Formel (10) § 1.:

$$\frac{4\sqrt{YA}}{(1-\varkappa^2 a y)^2} = \sin^2 \operatorname{am}(v+\alpha) - \sin^2 \operatorname{am}(v-\alpha).$$

Hieraus folgt nämlich:

$$\frac{1}{\varkappa^2}\log(1-\varkappa^2 a y)=\int\limits_0^v\int\limits_0^\alpha(\sin^2\operatorname{am}(v+\alpha)-\sin^2\operatorname{am}(v-\alpha))\,dv\,d\alpha.$$

Multiplicirt man mit $\varkappa^2$ und subtrahirt (bez. addirt) die Gleichung (1), so kommt, nach Division mit 2:

$$\Pi(v,\alpha)+v\cdot J(\alpha)\mp\frac{1}{2}\log(1-\varkappa^2 a y) \tag{2}$$
$$=\int\limits_0^v\int\limits_0^\alpha\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v\mp\alpha)\,dv\,d\alpha.$$

Führt man noch die Bezeichnung ein:

$$\Pi_2(v,\alpha)=\int\limits_0^v\int\limits_0^\alpha\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v-\alpha)\,dv\,d\alpha \tag{3}$$

so ist:

$$\Pi_2(v,-\alpha)=\int\limits_0^v\int\limits_0^{-\alpha}\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v-\alpha)\,dv\,d\alpha$$
$$=-\int\limits_0^v\int\limits_0^\alpha\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v+\alpha)\,dv\,d\alpha$$

und also, wegen (1):

$$2\Pi(v,\alpha)+2v\cdot J(\alpha)=\Pi_2(v,\alpha)-\Pi_2(v,-\alpha). \tag{4}$$

(Jacobi, fund. theor. funct. ell. p. 140.)

Das Integral Π_2 kann man, wie leicht ersichtlich, auf die Form bringen:

$$\Pi_2(v,\alpha)=\int\limits_0^v dv\left\{J(\alpha-v)+J(v)\right\}. \tag{5}$$

4.

Periodicitätseigenschaften der Integrale zweiter und dritter Gattung. Definitive Normirung.

Für die weitere Normirung des Integrals dritter Gattung $\Pi_2(v,\alpha)$ ist die Kenntniss der Periodicitätsmoduln desselben nothwendig. Der Vollständigkeit wegen mögen dieselben hier kurz entwickelt werden, wobei wir mit denen des Integrals zweiter Gattung J, durch welches sich Π_2 darstellen lässt, beginnen wollen.

Man führe in:

$$J(v)=\int\limits_0^v\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} v\,dv$$

als Variable unter dem Integralzeichen statt $v \cdots v - 2K$ ein, wodurch die Grenzen 0 und v bezw. in $2K$ und $2K + v$ übergehen. Man erhält so:

$$J(v) = J(v + 2K) - J(2K).$$

Nun ist aber, wie sich durch Einführung von $-v$ statt v unter dem Integralzeichen ergiebt:

$$J(-v) = -J(v).$$

Setzt man also in der vorstehenden Gleichung für $v \cdots - K$, so kommt:

$$J(2K) = 2J(K) = 2j,$$

wo:

$$j = \int_0^K \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} v \, dv$$

gesetzt ist. Es wird so:

(1) $$J(v + 2K) = J(v) + 2j.$$

Zur Bestimmung des imaginären Periodicitätsmoduls führe man in J die Integrationsvariable $v + 2iK'$ statt v ein. Man erhält so:

$$J(v) - J(K) = J(v + 2iK') - J(K + 2iK'),$$

wo zur Abkürzung das Integral J mit den complexen Grenzen $v + 2iK'$ und $K + 2iK'$ durch die rechtsstehende Differenz bezeichnet wurde. Man schliesst hieraus (unter Anwendung der gleichen Bezeichnungsweise):

$$J(v + 2iK') - J(v) = J(K + 2iK') - J(K).$$

Nun ist aber:

$$J(v + 2iK') - J(v) = 2\{J(K + iK') - J(K)\}.$$

Um dies zu beweisen, gehe man zu dem complementären Modul $\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}$ über, wobei sich K in K' verwandelt. Sind α und β zwei reelle Grössen, so hat man:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \varkappa') - J(\beta, \varkappa') &= \int_\beta^\alpha \varkappa'^2 \sin^2 \operatorname{am}(u, \varkappa') \, du \\ &= \alpha - \beta + \int_\alpha^\beta \Delta^2 \operatorname{am}(u, \varkappa') \, du \\ &= -i \int_{i\alpha}^{i\beta} \Delta^2 \operatorname{am}(iv, \varkappa') \, dv + \alpha - \beta, \end{aligned}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Aber vermöge bekannter Transformationsformeln wird:

$$\Delta^2 \operatorname{am}(iv, \varkappa') = \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(v, \varkappa)}{\cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa)} = \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(v + K + iK').$$

Ersetzt man daher unter dem Integralzeichen $v - K - iK'$ durch eine neue Variable, so kommt:

$$J(\alpha, \varkappa') - J(\beta, \varkappa')$$
$$= - i\{J(K + iK' + i\beta) - J(K + iK' + i\alpha)\} + \alpha - \beta.$$

In dieser Gleichung setze man $\alpha = 0$ und $\beta = K'$, beziehungsweise $\beta = - K'$, so folgt durch Vergleichung:

$$J(K', \varkappa') = K' + i\{J(K + 2iK', \varkappa) - J(K + iK', \varkappa\}$$
$$= K' - i\{J(K, \varkappa) - J(K + iK', \varkappa)\},$$

wo die mit i multiplicirten Differenzen rein imaginäre Grössen sein müssen, weil $J(K', \varkappa')$ reell ist. Setzt man also:

$$J(K + iK') - J(K) = \int\limits_K^{K+iK'} \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} v\, dv = ij',$$

so ist j' eine reelle Grösse, und es wird:

(1a) $$J(K + 2iK') - J(K) = 2ij',$$

ferner:

(1b) $$j' = K' - J(K', \varkappa'),$$

und somit:

(2) $$J(v + 2iK') - J(v) = 2ij'.$$

Die Beziehungen (1) und (2) enthalten die Periodicitätseigenschaften des Integrals zweiter Gattung. Aus ihnen folgt für das oben eingeführte Integral dritter Gattung:

$$\Pi_2(v + 2K, \alpha) - \Pi_2(v, \alpha) = \int\limits_0^{\alpha} d\alpha \int\limits_0^{2K} \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(v - \alpha)\, dv$$
$$= \int\limits_0^{\alpha} d\alpha \int\limits_{-\alpha}^{2K-\alpha} \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} v\, dv = 2j\alpha,$$

und ebenso:

$$\Pi_2(v + 2iK', \alpha) - \Pi_2(v, \alpha) = 2ij'\alpha.$$

Das Integral $\Pi_2(v, \alpha)$ hat also die Periodicitätsmoduln $2j\alpha$ und $2ij'\alpha$.

Subtrahirt man nun von Π_2 die Grösse $\frac{\alpha v j}{K}$, *so ist für die Differenz der reelle Periodicitätsmodul Null.* Wenn man die gleiche Bedingung auch dem Integral zweiter Gattung auferlegt, so sind:

$$(3)\quad \begin{cases} \Pi_3(v,\alpha) = \frac{\alpha v j}{K} - \Pi_2(v,\alpha), \\ Z(v) = \frac{vj}{K} - J(v) \end{cases}$$

die definitiv normirten Integrale dritter und zweiter Gattung. Es ist also:

$$(4)\qquad \Pi_3(v+2K,\alpha) = \Pi_3(v,\alpha);\quad Z(v+2K) = Z(v).$$

Die imaginären Periodicitätsmoduln sind:

$$(5)\quad \begin{cases} \Pi_3(v+2iK',\alpha) - \Pi_3(v,\alpha) = \frac{2\alpha i}{K}(jK'-Kj') = -\frac{\alpha i\pi}{K}; \\ Z(v+2iK') - Z(v) = \frac{2i}{K}(jK'-Kj') = -\frac{i\pi}{K}. \end{cases}$$

Es besteht nämlich nach einem bekannten Satze von Legendre die Identität*):

$$j'K - jK' = \frac{\pi}{2},$$

wo π der halbe Kreisumfang vom Halbmesser eins ist.

Die Function $Z(v)$ ist ebenso wie $J(v)$ eine unpaare Function, und wird wie diese unendlich nur für diejenigen Werthe von u, für die $\sin\operatorname{am} v$ unendlich wird, nämlich für $v = iK'$ (bis auf Periodenvielfache), und zwar wird dann $Z(v)$ unendlich wie $-J(v)$, d. h. wie:

$$-\int^{\cdot} \frac{\varkappa\, dy}{2\sqrt{y}} = -\varkappa\sqrt{y}$$

für $\qquad \sin\operatorname{am} v = \sqrt{y} = \infty.$

Durch die Function $Z(v)$ lässt sich das Integral dritter Gattung $\Pi_3(v,\alpha)$ ebenso darstellen, wie oben $\Pi_2(v,\alpha)$ durch $J(v)$ dargestellt wurde. Da wegen § 3. (5):

$$\Pi_3(v,\alpha) = -\Pi_2(v,\alpha) + \frac{\alpha v j}{K} = \int_0^v (Z(\alpha - v) + Z(v))\, dv,$$

*) Mit Hilfe der oben (1a), (1b) aufgestellten Beziehungen kann man der linken Seite dieser Gleichung die Form geben:

$$K\cdot K' - K\cdot J(K',\varkappa') - K'\cdot J(K,\varkappa) = \int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{4\sqrt{XY}}(1 - \varkappa'^2 y^2 - \varkappa^2 x^2),$$

wo X in x und dem Modul $\varkappa$, Y in y und dem Modul $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$ geschrieben ist. Ein eleganter Beweis der Legendre'schen Relation, der von Glaisher herrührt, und den Cayley, Treatise on ellipt. funct. p. 49, mittheilt, knüpft an diese Form an, deren Differentialquotient nach $\varkappa^2$ gleich Null gefunden wird, worauf sich der Werth des differenzirten Ausdrucks aus dem Falle $\varkappa = 0$ bestimmt.

so folgt durch Zerlegung:

$$(6) \qquad \Pi_3(v, \alpha) = \int_0^v Z(v)\,dv + \int_0^\alpha Z(v)\,dv - \int_0^{\alpha - v} Z(v)\,dv.$$

5.

Die Θ-Function.

Die vorstehende Darstellung des normirten Integrals dritter Gattung $\Pi_3(v, \alpha)$ durch die Z-Function rückt den Gedanken nahe, an Stelle der Letzteren das dort auftretende Integral dieser Function als neue Function einzuführen. Dieselbe wird nur für $v = iK'$ (bis auf Periodenvielfache) unendlich (s. § 4. am Ende), und zwar unendlich wie:

$$-\int \frac{dy}{\varkappa\sqrt{y^3}} \cdot \varkappa\sqrt{y} = -\log y$$

für

$$y = \infty.$$

Setzt man also jenes Integral nicht selbst gleich einer neuen Function, sondern — bis auf eine additive Constante — gleich dem Logarithmus einer solchen: $\Theta(v)$, also:

$$(1) \qquad \int_0^v Z(v)\,dv = \log \frac{\Theta(v)}{\Theta(0)},$$

und demnach:

$$Z(v) = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)},$$

so wird die Function $\Theta(v)$ für endliche Werthe von v überhaupt nicht unendlich, sondern nur Null für $v = iK'$ (bis auf Periodenvielfache).

Ferner ist $\Theta(v)$ eine paare Function, deren Periodicitätseigenschaften sich aus denen von $Z(v)$ sogleich ergeben. Weil nämlich:

$$\int_0^{2K} Z(v)\,dv = \int_{-K}^{+K} Z(v+K)\,dv$$

$$= \int_0^K \{Z(v+K) - Z(v-K)\}\,dv = 0$$

ist, und weil ebenso:

$$\int_K^{K+2iK'} Z(v)\,dv = \int_0^{2iK'} Z(v+K)\,dv$$

$$= \int_0^{iK'} \{Z(v+K+iK') - Z(v+K-iK')\}\,dv = \frac{\pi K'}{K}$$

ist, so folgt:

$$\int_0^{v+2K} Z(v)\,dv = \int_0^{v} Z(v)\,dv;$$

ferner:

$$\int_{K+2iK'}^{v+2iK'} Z(v)\,dv = \int_K^{v} Z(v+2iK')\,dv = \int_K^{v} \left\{Zv - \frac{i\pi}{K}\right\} dv$$

$$= \int_K^{v} Z(v)\,dv - \frac{i\pi}{K}(v-K),$$

und also:

$$\int_v^{v+2iK'} Z(v)\,dv = -\frac{i\pi v}{K} + i\pi + \frac{\pi K'}{K}.$$

Dies in die neue Bezeichnung übertragen, giebt:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Theta(v+2K) = \Theta(v); \\ \Theta(v+2iK') = -\frac{1}{q}\,\Theta(v)\cdot e^{\frac{-i\pi v}{K}}, \end{cases}$$

wenn $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$ gesetzt wird. Wir bemerken hierzu noch die oben abgeleitete Gleichung:

$$\Theta(iK') = 0.$$

Die Gleichungen (2) in Verbindung mit:

$$\Theta(-v) = \Theta(v)$$

genügen aber zur Herstellung einer Entwicklung von $\Theta(v)$ in eine trigonometrische Reihe.

In der That, man setze:

$$\Theta(v) = \Sigma A_m e^{\frac{i\pi m v}{K}},$$

wo Σ die Summe über alle Glieder mit ganzzahligem m von $-\infty$ bis $+\infty$ andeutet, und, wegen $\Theta(v) = \Theta(-v)$, $A_m = A_{-m}$ ist. Die Periode $2K$ von $\Theta(v)$ ist durch die Gestalt des Exponenten bereits berücksichtigt. Die Coefficienten A_m bestimmen sich dann aus der Vergleichung der beiden Formen, in die man die Reihe für $\Theta(v+2iK')$ bringen kann. Einerseits ist nämlich:

$$\Theta(v+2iK') = \Sigma A_{m-1}\, q^{2(m-1)} e^{\frac{i\pi v}{K}(m-1)},$$

wo

$$q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$$

ist, andererseits, wegen (2):

$$\Theta(v+2iK') = -\Sigma A_m q^{-1} e^{\frac{i\pi v}{K}(m-1)}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten gleichhoher Potenzen von $e^{\frac{i\pi v}{K}}$ erhält man so die Recursionsformel:

$$A_m = -A_{m-1}q^{2m-1},$$

und hieraus:

$$A_m = (-1)^m A_0 q^{mm}.$$

Daher endlich:

$$\Theta(v) = A_0 \cdot \Sigma e^{\frac{-mm\pi K'}{K} + \frac{i\pi v}{K} + i\pi m},$$

wo noch die Constante $A_0 = 1$ gesetzt werden kann, weil im Vorstehenden überall $\Theta(v):\Theta(0)$ eingeführt worden ist. Indem man die Glieder mit entgegengesetzten Werthen von m vereinigt, erhält man die bekannte Entwicklung:

$$\Theta(v) = 1 - 2q\cos\frac{\pi v}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi v}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi v}{K} + \cdots$$

Um die Θ-Function zur Darstellung des Integrals dritter Gattung $\Pi(v,\alpha)$ und der elliptischen Functionen sin am v etc. zu verwenden, gehe man auf die Formel (6) des § 4. zurück, die durch Einführung von $\Theta(v)$ aus (1) die Form erhält:

$$\Pi_3(v,\alpha) = \log\frac{\Theta(v)}{\Theta(0)} - \log\frac{\Theta(v-\alpha)}{\Theta(\alpha)}.$$

Vertauscht man in dieser Formel α mit $-\alpha$ und bildet die Differenz, so erhält man mit Rücksicht auf die Formeln § 4. (3) und § 3. (4):

$$\begin{aligned}\log\frac{\Theta(v+\alpha)}{\Theta(v-\alpha)} &= \Pi_3(v,\alpha) - \Pi_3(v,-\alpha)\\ &= -\Pi_2(v,\alpha) + \Pi_2(v,-\alpha) + \frac{2\alpha v j}{K}\\ &= -2\Pi(v,\alpha) - 2vJ(\alpha) + \frac{2\alpha v j}{K}\\ &= -2\Pi(v,\alpha) + 2v\mathrm{Z}(\alpha).\end{aligned}$$

Daher endlich die bekannte Formel:

$$\Pi(v,\alpha) = v\mathrm{Z}(\alpha) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(v-\alpha)}{\Theta(v+\alpha)}.$$

Wie sich nun weiter aus dieser Gleichung durch Differenziation nach v und nachmalige Integration nach α die Beziehung:

$$1 - \varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\,v = \Theta^2(0)\cdot\frac{\Theta(v-\alpha)\,\Theta(v+\alpha)}{\Theta^2(v)\,\Theta^2(\alpha)}$$

ergiebt, die für $\alpha = K$ den Ausdruck von Δ am v durch die Θ-Function und folgeweise den von cos am v und sin am v vermittelt, ist bekannt (Jacobi, fund. funct. ell. p. 152).

In bequemem Anschluss an die vorstehend entwickelten Formeln lassen sich die zahlreichen Relationen ableiten, durch die Jacobi in den letzten Nummern seiner „fundamenta“ die elliptischen Functionen der Anwendung zugänglich gemacht hat, und in welche einzuführen die Absicht dieser Blätter war.

München, im Mai 1880.

Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten.

Von

A. Brill in München.

Die zwölf Wendepunkte einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten können einer zweifach unendlichen Schaar von Curven vierter Ordnung als Basispunkte dienen. Ich will in dieser Note zeigen, wie man die Gleichung einer solchen Schaar aus derjenigen der gegebenen Curve ableitet.

Wenn zwei algebraische Curven durch ihre Gleichungen

$$f = 0, \qquad \psi = 0$$

gegeben sind, und eine Curve $\varphi = 0$ existirt (φ ebenso wie f von niederer Ordnung als ψ), deren sämmtliche Schnittpunkte mit f einen Theil des Schnittpunktsystems von f mit ψ bilden, so besteht bekanntlich die Identität:

$$\psi \equiv \alpha\varphi + \beta f,$$

(wo α, β Ausdrücke von den zur Ordnung von ψ ergänzenden Ordnungen sind) immer dann, wenn φ nur durch einfache Punkte von f hindurchgeht. Aber sie bleibt unter Umständen*) auch noch bestehen, wenn f und φ ausser in einfachen sich noch in Doppelpunkten u. s. w. von f schneiden.

Ich erwähne drei solche Fälle:

I. Wenn in jedem Doppelpunkt von f, durch welchen φ einfach hindurchgeht, ψ einen Doppelpunkt (mit übrigens beliebig gerichteten Tangenten) besitzt.

II. Wenn in jedem Doppelpunkt von f, in welchem auch φ einen solchen mit denselben Tangenten wie f hat, ψ ebenfalls einen Doppelpunkt mit den gleichen Tangenten besitzt.

---

*) Vgl. Nöther, Math. Ann. Bd. VI, S. 351.

III. Wenn in jedem Doppelpunkt von f, in welchem ψ einen ebensolchen mit den gleichen Tangenten wie f besitzt, $\alpha\varphi$ einen dreifachen Punkt hat, für welchen die Richtungen von zwei Zweigen beliebig sind, während die des dritten einer gewissen Bedingung genügt.*)

Zur Bestimmung der Wendepunkte einer Curve vierter Ordnung dient zunächst die Hesse'sche Curve $H=0$. Aber man kann, wenn jene Curve Doppelpunkte hat, statt H Curven niederer Ordnung angeben, welche die Wendepunkte ausschneiden.

Ist eine *Curve vierter Ordnung* $f=0$ *mit einem Doppelpunkt* gegeben, und legt man durch die beiden weiteren Schnittpunkte a und α, welche die in dem Doppelpunkt gezogenen Tangenten noch mit f besitzen, eine Gerade Γ, so geht die Curve, welche durch die Gleichung:

$$H\cdot\Gamma=0$$

dargestellt wird, durch alle Schnittpunkte des Tangentenpaars $t\cdot\tau$ mit f. Da in dem Doppelpunkt die Bedingung II. erfüllt ist, so besteht die Identität:

$$H\cdot\Gamma\equiv At\tau+Bf,$$

wo denn also $A=0$ eine *Curve fünfter Ordnung* darstellt, *welche durch die* 18 *Wendepunkte von f und die zwei Schnittpunkte hindurchgeht, die ausser a und α die Gerade Γ mit f gemeinsam hat.*

Wir betrachten weiter eine *Curve vierter Ordnung* $f=0$ *mit zwei Doppelpunkten* d_1 und d_2. Sei $t_1\tau_1t_2\tau_2$ das Product der vier Tangenten in derselben. Legt man durch die vier weiteren Schnittpunkte $a_1\alpha_1a_2\alpha_2$ dieser Tangenten mit f ein Kegelschnittbüschel, so besteht zunächst der Satz, *dass ein Kegelschnitt dieses Büschels durch die Doppelpunkte von f hingurchgeht.* Denn legt man durch d_1 und d_2 die Gerade $\Gamma=0$, so hat die Curve:

$$\Gamma^2=0$$

je einen Doppelpunkt in d_1 und d_2. Ist nun $\Delta=0$ die Gleichung eines durch d_1 und d_2 gehenden Kegelschnitts, so kann man dessen Tangenten in diesen beiden Punkten so bestimmen, dass von der Curve:

$$\Gamma^2\cdot\Delta=0,$$

welche in d_1 und d_2 je einen dreifachen Punkt besitzt, die unter III. geforderte Bedingung in jedem dieser Punkte erfüllt ist. Es muss

*) Das Product der Abstandsverhältnisse der Tangenten der drei Zweige in Bezug auf die Tangenten des Doppelpunkts muss gleich sein dem Product der Abstandsverhältnisse (ebenfalls in Bezug auf die Tangenten des Doppelpunkts) der drei Strahlen, die man nach den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden mit der in Bezug auf den Doppelpunkt genommenen $(n-3)^{\text{ten}}$ Polaren der Curve f ziehen kann. (Siehe diese Annalen Bd. 13, S. 180.)

dann also möglich sein, über den noch unbestimmten Coefficienten in Δ so zu verfügen, dass die Identität besteht:

$$t_1 \tau_1 t_2 \tau_2 \equiv \Gamma^2 \cdot \Delta + cf,$$

wo c eine Constante ist. $\Delta = 0$ ist dann die Gleichung eines durch die Doppelpunkte und die Punkte $a_1\, \alpha_1\, a_2\, \alpha_2$ gehenden Kegelschnitts. q. e. d.

Ist $N = 0$ die Gleichung eines andern Kegelschnitts jenes Büschels durch $a_1 \alpha_1 a_2 \alpha_2$, so geht die Curve:

$$(\varkappa \Delta + \lambda N) \cdot H = 0$$

wo $\varkappa$, λ beliebige Constante sind, H die Hesse'sche Determinante von f, durch alle Schnittpunkte von:

$$t_1 \tau_1 t_2 \tau_2 = 0$$

mit f, und erfüllt in d_1 und d_2 die in II. vorgeschriebene Bedingung. Es besteht also die Identität:

$$H(\varkappa \Delta + \lambda N) \equiv t_1 \tau_1 t_2 \tau_2 (\varkappa F + \lambda \Phi) + C \cdot f,$$

wo C von der sechsten Ordnung ist, $F + \lambda \Phi = 0$ ein *Curvenbüschel vierter Ordnung* darstellt, *welches durch die* 12 *Wendepunkte von f hindurchgeht, und auf f dieselbe einfach unendliche Schaar von je vier Punkten ausschneidet, welche durch das Kegelschnittbüschel:*

$$\varkappa \Delta + \lambda N = 0$$

ausgeschnitten wird, dessen Basispunkte die Punkte $a_1 \alpha_1 a_2 \alpha_2$ auf den Tangenten in den Doppelpunkten von f sind.

Dabei geht die Curve $F = 0$ durch die beiden Doppelpunkte von f einfach hindurch, weil dies mit $\Delta = 0$ der Fall ist.

Die Gleichung:

$$\varkappa F + \lambda \Phi + \mu f = 0$$

stellt somit eine lineare doppelt unendliche Schaar von Curven vierter Ordnung dar, welche die zwölf Wendepunkte der gegebenen Curve zu Basispunkten hat.

Es bleibt noch zu zeigen, *wie man zu der Gleichung $N = 0$ gelangt.* Da $\Delta = 0$ ein Kegelschnitt ist, der durch jeden der Doppelpunkte von f einfach hindurchgeht, während die doppelt gerechnete Verbindungslinie $\Gamma^2 = 0$ derselben dort je einen Doppelpunkt hat, so muss, da die Bedingung I. erfüllt ist, eine Identität von der Form bestehn:

$$\Gamma^2 N \equiv \Delta' \Delta + cf,$$

wo c eine Constante, $\Delta' = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts ist, der durch die Doppelpunkte von f geht, $N = 0$ die eines ebensolchen durch die oben mit $a_1 \alpha_1 a_2 \alpha_2$ bezeichneten Punkte und noch vier

weitere Punkte von f, durch welche auch $\Delta' = 0$ hindurchgeht. Diese vier Punkte sind indess durch obige Identität noch nicht völlig bestimmt, denn man kann ihr die Form geben:

$$\Gamma^2(N+\varrho\Delta) \equiv (\Delta'+\varrho\Gamma^2)\,\Delta + cf,$$

wo ϱ eine willkürliche Constante ist. Die Coefficienten in N sind also, wie dies zu erwarten war, lineare Functionen eines willkürlichen Parameters, und die vorstehende Identität liefert zugleich das oben verwendete Kegelschnittbüschel.

Die *Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten* habe ich ähnlichen Betrachtungen schon früher (a. o. a. O.) unterzogen.

München, im Mai 1880.

Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades.

Von

F. Schur in Maciejewo.

Bekanntlich bedeuten die adjungirten Formen von homogenen quadratischen Formen mit drei bez. vier Veränderlichen, die ihrerseits Curven bez. Flächen 2. Grades in Punktcoordinaten darstellen, dieselben geometrischen Gebilde in Linien- bez. Ebenencoordinaten. Meines Wissens ist eine ähnliche geometrische Deutung der adjungirten Form einer quadratischen Form von sechs Veränderlichen, die ja einen Strahlencomplex 2. Grades darstellt, bisher nicht gegeben worden. Durch meine geometrischen Untersuchungen im XV. Bande, S. 432 dieses Journals bin ich auf eine solche Deutung geführt worden.

Sind nämlich $p_1, \cdots, p_6$ die Punktstrahlencoordinaten eines Strahles p, ist also:

$$p_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad p_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1, \cdots, \quad p_4 = x_3 y_4 - x_4 y_4, \cdots,$$

wo x, y zwei Punkte von p, sodass also die identische Relation besteht:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i p_{i+3} = 0,$$

so sind die Ebenenstrahlencoordinaten $\pi_1, \cdots, \pi_6$ desselben Strahles p mit jenen durch die Gleichungen:

$$\varrho \pi_i = p_{i+3} \; (i = 1, 2, \cdots, 6)$$

verbunden, wo, wie stets im Folgenden, der Index $k + 6$ mit dem Index k gleichbedeutend ist.

Dies vorausgeschickt sei nun:

$$\sum_{i,k=1}^{6} a_{ik} p_i p_k = 0, \tag{1}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ die Gleichung des zu betrachtenden Strahlencomplexes 2. Grades. Die Gleichung eines Polarcomplexes eines Strahles q ist dann:

$$\sum_{i,k=1}^{6} a_{ik} p_i q_k + \lambda \sum_{i=1}^{6} p_i q_{i+3} = 0, \tag{2}$$

wo q gleichzeitig in (1) liegen mag, sodass die Gleichung besteht:

$$(3) \qquad \sum_{i,k=1}^{6} a_{ik} q_i q_k = 0.$$

r sei nun ein Strahl, der sowohl in (1) als in 2) liegt, dessen Coordinaten also den Gleichungen genügen:

$$(4) \qquad \sum_{i,k=1}^{6} a_{ik} r_i r_k = 0,$$

$$(5) \qquad \sum_{i,k=1}^{6} a_{ik} r_i q_k + \lambda \sum_{i=1}^{6} r_i q_{i+3} = 0;$$

dann liegt auch q im Polarcomplexe von r, der die Gleichung hat:

$$(6) \qquad \sum_{i,k=1}^{6} a_{ik} p_i r_k + \lambda \sum_{i=1}^{6} p_i r_{i+3} = 0.$$

Die drei Complexe (1), (2), (6) haben nun i. A. die Strahlen p einer Regelfläche 4. Grades gemein. Nun sieht man aber aus den Gleichungen (1) bis (6), dass, wenn p ein Strahl dieser Regelfläche ist, dasselbe auch von dem Strahle s gilt, dessen Coordinaten:

$$(7) \qquad \varrho s_i = \alpha p_i + \beta q_i + \gamma r_i,$$

wo α, β, γ nur so gewählt zu werden brauchen, dass die Relation:

$$\sum_{i=1}^{3} s_i s_{i+3} = 0$$

erfüllt ist. Die durch (7) dargestellten Strahlen sind aber die eine Erzeugung einer Regelfläche 2. Grades, sodass jene Fläche 4. Grades in zwei Flächen 2. Grades zerfällt. Genügen nun die Ebenenstrahlencoordinaten $\tau_1, \cdots, \tau_6$ eines Strahles t für alle Werthe von s_i der Gleichung

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{6} s_i \tau_i = 0,$$

so sind die Strahlen t offenbar die andere Erzeugung der durch (7) dargestellten Regelfläche 2. Grades. Nun wird die Gleichung (8) erfüllt durch die Annahme:

$$(9) \qquad \varrho \tau_i = \sum_{k=1}^{6} a_{ik} s_k + \lambda s_{i+3} \; (i=1, 2, \cdots 6)$$

für alle aus (7) hervorgehenden s_k. Eliminirt man also die s_k aus (8) und den sechs Gleichungen (9), sucht also die Gesammtheit der Strahlen t, die aus allen Strahlenpaaren q, r des Complexes (1) für

dasselbe λ hervorgehen, so erkennt man, dass diese Strahlen einen Complex 2. Grades erfüllen, der durch die zu (1) adjungirte Form dargestellt ist.

Aus meinen geometrischen Untersuchungen S. 463 folgt aber leicht, dass die Strahlen t einen der zu (1) in Involution liegenden oder mit (1) die Singularitätenfläche gemeinsam habenden Complexe 2. Grades erfüllen.

Wir erhalten also folgenden Satz:

„*Stellt eine quadratische Form von sechs Veränderlichen einen Strahlencomplex 2. Grades in Punktstrahlencoordinaten dar, so stellen die ihr adjungirten Formen, welche vermöge des variablen Factors eine einfach-unendliche Schaar bilden, in Ebenenstrahlencoordinaten die Complexe 2. Grades mit derselben Singularitätenfläche dar*"*).

Maciejewo, im Juni 1880.

---

*) Verzichtet man auf die geometrische Interpretation, so ergiebt sich dieser Satz sehr leicht, wie mir Herr Prof. F. Klein nachträglich mitgetheilt hat, aus der Gleichungsform, die derselbe im II. Bande dieses Journals gegeben hat. In der That hat beim Gebrauche der $x_1, \ldots, x_6$ der gegebene Complex die unendlich vielen Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{6} k_i x_i^2 + \lambda \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0,$$

und die zugehörigen Complexe sind:

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^2}{k_i + \lambda} = 0,$$

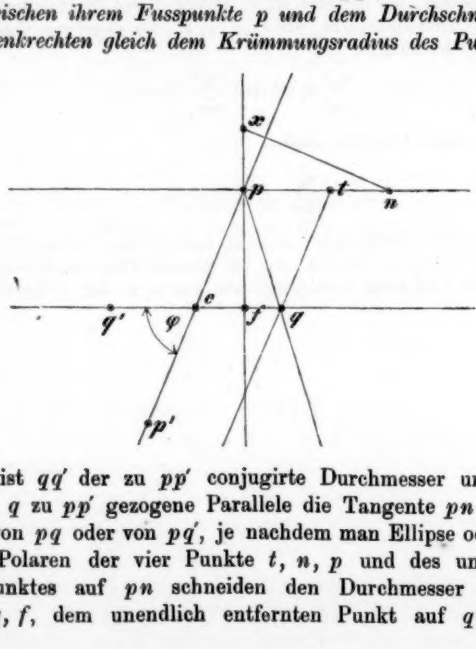
worin das Theorem bereits liegt; denn es handelt sich bei der Bildung der adjungirten Form um einen Process, der bei linearen Transformationen ungeändert bleibt, der also auch beim Uebergange von den x_i zu den p_i bestehen bleibt.

Synthetischer Nachweis des Euler'schen Satzes über Krümmungsradien.

Von

W. Marx in München.

„*Ist p ein Punkt eines Kegelschnittes, N seine Normale und n deren Pol bezüglich des Kegelschnittes, und fällt man von n eine Senkrechte zu dem durch p gehenden Durchmesser pp', so ist das Stück der Normale zwischen ihrem Fusspunkte p und dem Durchschnittspunkte x mit jener Senkrechten gleich dem Krümmungsradius des Punktes p.*“



Denn ist qq' der zu pp' conjugirte Durchmesser und schneidet eine durch q zu pp' gezogene Parallele die Tangente pn in t, so ist t der Pol von pq oder von pq', je nachdem man Ellipse oder Hyperbel hat. Die Polaren der vier Punkte t, n, p und des unendlich entfernten Punktes auf pn schneiden den Durchmesser qq' in den Punkten q, f, dem unendlich entfernten Punkt auf qq' und in c. Sonach ist

$$\frac{\overline{pt}}{\overline{pn}} = \frac{\overline{cf}}{\overline{cq}},$$

und da ferner aus den Dreiecken pcf und nxp:

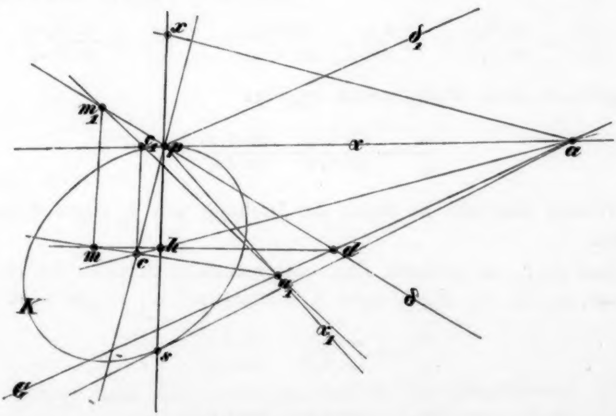
$$\frac{\overline{cf}}{\overline{pf}} = \frac{\overline{xp}}{\overline{np}},$$

so wird

$$\overline{xp} = \frac{\overline{cq}^2}{\overline{pf}} = \frac{\overline{cq}^2}{\overline{cp} \cdot \sin\varphi}$$

gleich dem Krümmungsradius des p sein. Der Satz behält auch für die Parabel Gültigkeit.

Es sei nun p ein Punkt einer Oberfläche zweiter Ordnung F^2, s der zweite Schnittpunkt seiner Normale mit F^2, G die reciproke Polare von ps bezüglich F^2. Die Ebene irgend eines durch p gehenden Normalschnittes K der F^2 schneidet G in einem Punkte a und dieser ist der Pol von ps bezüglich des K. Der Mittelpunkt c des Normalschnittes findet sich als Durchschnittspunkt zweier Geraden, deren eine den Punkt a mit dem Halbierpunkt h von ps, deren andere den Mittelpunkt m der F^2 mit dem auf G liegenden Pol a_1 der Ebene des K verbindet. Die Punkte $a a_1$ sind ein Punktepaar der zu G bezüglich der F^2 gehörigen Involution, deren Doppelpunkte, die Schnittpunkte von G mit F^2, reell vorhanden oder imaginär sind, je nachdem die Fläche F^2 Regelfläche oder Nichtregelfläche ist. Die von a aus zu dem durch p gehenden Durchmesser pc des K gefällte Senkrechte schneidet auf der Normale ps ein Stück xp ab gleich dem Krümmungsradius ϱ_a des K in p.



Sind m_1 und c_1 die Fusspunkte der von m und c zur Berührebene

des p gefällten Perpendikel, so folgt, da $\Delta\, p x a \sim \Delta\, c_1 p c$ und $c_1 c \parallel ph$:

$$px = \varrho_a = pa \cdot \frac{c_1 p}{c_1 c} = \frac{pa^2}{ph} \cdot \frac{c_1 p}{c_1 a}.$$

Schneidet G die durch m, m_1, p und s gelegte Ebene in d, so ist $m_1 c_1 a_1$ Transversale im Dreieck pad, mithin:

$$\frac{m_1 p}{m_1 d} \cdot \frac{a_1 d}{a_1 a} \cdot \frac{c_1 a}{c_1 p} = 1,$$

also geht der Werth von px oder ϱ_a über in:

$$(1) \qquad \varrho_a = \frac{pa^2}{ph} \cdot \frac{m_1 p}{m_1 d} \cdot \frac{a_1 d}{a_1 a}.$$

Rückt a nach d, so fällt a_1 in unendliche Entfernung auf G, ϱ_a geht über in den Krümmungsradius ϱ_δ des durch ps gehenden Mittelpunktsschnittes der F^2 und es wird:

$$(2) \qquad \varrho_\delta = \frac{pd^2}{ph} \cdot \frac{m_1 p}{m_1 d},$$

woraus folgt:

$$(3) \qquad \frac{\varrho_\delta}{\varrho_a} = \frac{pd^2}{pa^2} \cdot \frac{a_1 a}{a_1 d}.$$

Nimmt man p als Mittelpunkt eines der Involution auf G perspectivischen Strahlsystems, dessen Doppelstrahlen die reellen oder imaginären Linien sind, wornach F^2 von der Berührebene des p getroffen wird, so folgt, wenn α, α_1, δ die Strahlen nach a, a_1, d; δ_1 der Parallelstrahl zu G ist, aus den Dreiecken pad, paa_1 und pda_1:

$$\frac{pd}{pa} = \frac{\sin(\delta_1 \alpha)}{\sin(\delta_1 \delta)}; \qquad \frac{a_1 a}{pa} = \frac{\sin(\alpha \alpha_1)}{\sin(\delta_1 \alpha_1)}; \qquad \frac{pd}{a_1 d} = \frac{\sin(\delta_1 \alpha_1)}{\sin(\delta \alpha_1)},$$

woraus sich durch Multiplication ergiebt:

$$(4) \qquad \frac{\varrho_\delta}{\varrho_a} = \frac{\sin(\alpha \alpha_1)}{\sin(\delta_1 \delta)} \cdot \frac{\sin(\delta_1 \alpha)}{\sin(\delta \alpha_1)}.$$

Die Winkel sind alle im Sinne der Drehung von δ_1 gegen δ positiv gezählt.

Sind β, β_1 ein weiteres Paar entsprechender Strahlen des Strahlsystems, ϱ_β, ϱ_{β_1} die zugehörigen Krümmungsradien, so gilt auch

$$\frac{\varrho_\delta}{\varrho_\beta} = \frac{\sin(\beta \beta_1)}{\sin(\delta_1 \delta)} \cdot \frac{\sin(\delta_1 \beta)}{\sin(\delta \beta_1)}$$

und

$$\frac{\varrho_\delta}{\varrho_{\beta_1}} = \frac{\sin(\beta_1 \beta)}{\sin(\delta_1 \delta)} \cdot \frac{\sin(\delta_1 \beta_1)}{\sin(\delta \beta)},$$

mithin

$$\frac{\varrho_\beta}{\varrho_\alpha} = \frac{\sin(\alpha\alpha_1)}{\sin(\beta\beta_1)} \cdot \frac{\sin(\delta\beta_1)}{\sin(\delta_1\beta)} \cdot \frac{\sin(\delta_1\alpha)}{\sin(\delta\alpha_1)}$$

und

$$\frac{\varrho_{\beta_1}}{\varrho_\alpha} = \frac{\sin(\alpha\alpha_1)}{\sin(\beta_1\beta)} \cdot \frac{\sin(\delta\beta)}{\sin(\delta_1\beta_1)} \cdot \frac{\sin(\delta_1\alpha)}{\sin(\delta\alpha_1)}.$$

Da aber $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\delta\delta_1$ in Involution, so ist

$$\frac{\sin(\delta\beta_1)\cdot\sin(\delta_1\alpha)}{\sin(\delta_1\beta)\cdot\sin(\delta\alpha_1)} = -\frac{\sin(\alpha\beta_1)}{\sin(\alpha_1\beta)}$$

und

$$\frac{\sin(\delta\beta)}{\sin(\delta_1\beta_1)} \cdot \frac{\sin(\delta_1\alpha)}{\sin(\delta\alpha_1)} = -\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha_1\beta_1)},$$

und es folgt

(5)
$$\frac{\varrho_\beta}{\varrho_\alpha} = -\frac{\sin(\alpha\alpha_1)}{\sin(\beta\beta_1)} \cdot \frac{\sin(\alpha\beta_1)}{\sin(\alpha_1\beta)}$$

und

$$\frac{\varrho_{\beta_1}}{\varrho_\alpha} = -\frac{\sin(\alpha\alpha_1)}{\sin(\beta_1\beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha_1\beta_1)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit

$$\frac{\sin^2(\beta\beta_1)}{\sin^2(\alpha\beta_1)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin^2(\beta_1\beta)}{\sin^2(\alpha\beta)},$$

so ergiebt sich weiter:

$$\frac{\varrho_\beta}{\varrho_\alpha} \cdot \frac{\sin^2(\beta\beta_1)}{\sin^2(\alpha\beta_1)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha\alpha_1)}{\sin(\beta\alpha_1)} : \frac{\sin(\alpha\beta_1)}{\sin(\beta\beta_1)} = (\alpha\beta\alpha_1\beta_1) = 1 - (\alpha\alpha_1\beta\beta_1)$$

und

$$\frac{\varrho_{\beta_1}}{\varrho_\alpha} \cdot \frac{\sin^2(\beta\beta_1)}{\sin^2(\alpha\beta)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha\alpha_1)}{\sin(\beta_1\alpha_1)} \cdot \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\beta_1\beta)} = (\alpha\beta_1\alpha_1\beta) = 1 - (\alpha\alpha_1\beta_1\beta),$$

woraus folgt:

$$\left(1 - \frac{\varrho_\beta}{\varrho_\alpha} \cdot \frac{\sin^2(\beta\beta_1)}{\sin^2(\alpha\beta_1)}\right)\left(1 - \frac{\varrho_{\beta_1}}{\varrho_\alpha} \cdot \frac{\sin^2(\beta\beta_1)}{\sin^2(\alpha\beta)}\right)$$

$$= (\alpha\alpha_1\beta\beta_1)\cdot(\alpha\alpha_1\beta_1\beta) = 1,$$

also

(6)
$$\frac{\sin^2(\beta\beta_1)}{\varrho_\alpha} = \frac{\sin^2(\alpha\beta_1)}{\varrho_\beta} + \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\varrho_{\beta_1}}.$$

Ersetzt man $\beta\beta_1$ durch das rechtwinklige Strahlenpaar $\sigma\sigma_1$ der Involution, so wird $\sin^2(\alpha\sigma_1) = \cos^2(\alpha\sigma)$, $\sin^2(\alpha\sigma) = \cos^2(\alpha\sigma_1)$, und aus (6) erhält man die Euler'sche Beziehung:

(7) $$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\cos^2(\alpha\sigma)}{\varrho_\sigma} + \frac{\cos^2(\alpha\sigma_1)}{\varrho_{\sigma_1}}.$$

Dieser Satz behält auch für beliebige Flächen Gültigkeit.

Denn ist p ein nicht singulärer Punkt einer beliebigen Fläche F, so verschaffe man sich drei Kegelschnitte, von denen jeder einen Normalschnitt der F in p osculirt und durch einen festen Punkt s auf der Normale des p geht, dort eine feste Ebene berührend. Diese drei Kegelschnitte bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung, die alsdann mit F eine Osculation in p eingeht.

München, 6. Juni 1880.

On a theorem relating to the Multiple Thetafunctions.

By

A. Cayley of Cambridge.

I propose — partly for the sake of the theorem itself, partly for that of the notation which will be employed — to demonstrate the general theorem (3′), p. 4, of Dr. Schottky's „Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln", (Leipzig, 1880), which theorem is there presented in the form:

$$(3') \quad e^{-\eta(u_1 \cdots ;\mu', \nu')}\Theta(u_1+2\bar{\omega}_1' \cdots ; \mu, \nu) = e^{-2\pi i \Sigma \mu_\alpha \nu_\alpha'}\,\Theta(u_1 \cdots ; \mu+\mu', \nu+\nu'),$$

but which I write in the slightly different form

$$\exp[-\mathsf{H}(u;\mu',\nu')]\cdot\Theta(u+2\varpi';\mu,\nu) = \exp[-2\pi i \mu\nu']\cdot\Theta(u;\mu+\mu',\nu+\nu').$$

I remark that the theorem is given in the preliminary paragraphs the contents of which are, as mentioned by the Author, derived from Herr Weierstrass: and that the form of the thetafunction is a very general one, depending on the general quadric function

$$G(u_1, \cdots, u_\varrho;\ n_1, \cdots n_\varrho)$$

of 2ϱ variables, ϱ being the number of the arguments $u_1, \cdots u_\varrho$ (in fact the periods are not reduced to the normal form, but are arbitrary); and the characters $\nu_1, \cdots \nu_\varrho;\ \mu_1, \cdots \mu_\varrho$ instead, of having each of them the value 0 or 1, have each of them any integer or fractional value whatever. The meaning of the theorem (u denoting a set or row of ϱ letters $u_1, \cdots u_\varrho$, and so in other cases), is that the function $\Theta(u;\ \mu+\mu',\ \nu+\nu')$ with the new characters $\mu+\mu'$ and $\nu+\nu'$ is, save as to an exponential factor, equal to the function $\Theta(u+2\varpi';\mu,\nu)$ with the original characters μ, ν, but with the new arguments $u+2\varpi'$.

Notation.

This is in some measure a development of that employed in my „Memoir on the Theory of Matrices" Phil. Trans. t. CXLVIII (1858) pp. 17—37. I use certain single letters u etc. to denote sets or rows each of ϱ letters, $u = (u_1, \cdots u_\varrho)$: or if to fix the ideas $\varrho = 3$, then $u = (u_1, u_2, u_3)$, and so in other cases.

But I use certain other letters a, etc. to denote squares or matrices each of ϱ^2 letters; thus $\varrho = 3$ as before,

$$a = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix},$$

and in any such case the transposed matrix is denoted by the same letter enclosed in parentheses

$$(a) = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

The sum $u+v$ of the row-letters $u, =(u_1, u_2, u_3)$ and $v, =(v_1, v_2, v_3)$ denotes the row $(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$: and in like manner the sum $a+b$ of the two matrices or square-letters a and b, denotes the matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12}, & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21}, & a_{22}+b_{22}, & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31}, & a_{32}+b_{32}, & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix}$$

and similarly for a sum of three or more terms.

The product $uv, =(u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3)$, of the two row-letters u, v denotes the single term $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$. We have $uv=vu$.

The product

$$au, = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} (u_1, u_2, u_3),$$

of a preceding square-letter a and a succeeding row-letter u, denotes the set or row

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13})(u_1, u_2, u_3),\ (a_{21}, a_{22}, a_{23})(u_1, u_2, u_3),\ (a_{31}, a_{32}, a_{33})(u_1, u_2, u_3);$$

the notation ua is not employed.

The product

$$auv = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} (u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3)$$ of a preceding square-letter a followed by the two row-letters u et v, denotes the single term

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13})(u_1, u_2, u_3)v_1+(a_{21}, a_{22}, a_{23})(u_1, u_2, u_3)v_2+(a_{31}, a_{32}, a_{33})(u_1, u_2, u_3)v_3.$$

Observe that auv is not in general $=avu$; but it is easy to verify that $auv=(a)vu$; and hence if $(a)=a$, that is if the matrix a be symmetrical, then $auv=avu$.

A product of two matrices

$$ab, = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{vmatrix}$$

denotes a matrix

$$\begin{array}{c|ccc} & (b_{11}, b_{21}, b_{31}), & (b_{12}, b_{22}, b_{32}), & (b_{13}, b_{23}, b_{33}) \\ \hline (a_{11}, a_{12}, a_{13}) & ,, & ,, & ,, \\ (a_{21}, a_{22}, a_{23}) & ,, & ,, & ,, \\ (a_{31}, a_{32}, a_{33}) & ,, & ,, & ,, \end{array}$$

viz. the top-line of the compound matrix is

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13})(b_{11}, b_{21}, b_{31}),\ (a_{11}, a_{12}, a_{13})(b_{12}, b_{22}, b_{32}),\ (a_{11}, a_{12}, a_{13})(b_{13}, b_{23}, b_{33})$$

and so for the other lines: or expressing this in words, we say that any *line* of the compound matrix is obtained by compounding the corresponding *line* of the first or further component matrix with the several columns of the second or nearer component matrix.

Clearly ab is not in general $= ba$. We may easily verify that $(ab) = (b)(a)$, that is, the transposed matrix (ab) is that obtained by the composition of the transposed matrix (b) as first or further matrix, with the transposed matrix (a) as second or nearer matrix. Even if a and b are each symmetrical, we do not in general have $ab = ba$, but only $(ab) = ba$, or what is the same thing $ab = (ba)$.

In a symbol such as $abuv$, we first combine a, b into a single matrix ab, and then regard the expression as a combination such as auv: the expression denotes therefore a single term. The theory might be explained in greater detail; but the mode of working with row- and square-letters will be readily understood from what precedes.

In all that follows $u, \mu, v, \mu', v', n, \varpi', \zeta$ are row-letters; $a, b, h, \omega, \omega', \eta, \eta'$ are square-letters: a and b are symmetrical, viz. $a = (a)$, $b = (b)$.

And I write

$$\begin{aligned} (*)(u, v)^2, &= (a, h, b)(u, v)^2 \\ &= au^2 + 2huv + bv^2 \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} (u_1, u_2, u_3)^2 \\ &+ 2 \begin{vmatrix} h_{11}, & h_{12}, & h_{13} \\ h_{21}, & h_{22}, & h_{23} \\ h_{31}, & h_{32}, & h_{33} \end{vmatrix} (u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3) \\ &+ \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33} \end{vmatrix} (v_1, v_2, v_3)^2. \end{aligned}$$

to denote the general quadric function of the 2ϱ letters u, v, with $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)+\varrho^2+\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1), =\varrho(2\varrho+1)$ coefficients. It is assumed that the determinant formed with the $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)$ coefficients b is negative: this is the necessary and sufficient condition for the convergence of the series.

Definition of $\Theta(u;\ \mu,\ \nu)$

$\Theta(u;\ \mu,\ \nu)$, the general thetafunction with ϱ arguments u, and 2ϱ characters μ, ν is the sum of a ϱ-tuple series of exponentials

$$\Theta(u;\ \mu,\ \nu)=\Sigma\,\text{exp.}\,[(*)(u,\ n+\nu)^2+2\pi i\mu(n+\nu)]$$

where each of the letters n, $=(n_1,\cdots n_\varrho)$, has all integer values (zero included) from $-\infty$ to $+\infty$.

The general theorem in regard to $\Theta(u;\ \mu,\ \nu)$.

This is

$$\begin{aligned}\text{exp.}[-H(u;\ \mu',\ \nu')]\cdot\Theta(u+2\varpi';\ \mu,\ \nu)&\\ =\text{exp.}\,[-2\pi i\mu\nu']\cdot\Theta(u;\ \mu+\mu',\ \nu+\nu'),&\end{aligned}$$

establishing a relation between the function $\Theta(u;\ \mu+\mu',\ \nu+\nu')$, with arbitrary character-increments μ', ν', and the function $\Theta(u+2\varpi';\ \mu,\ \nu)$ with the original characters, but with new arguments $u+2\varpi'$. $H(u;\ \mu',\ \nu')$ denotes a function, linear as regards the arguments u, but quadric as regards μ' et ν'; $-2\pi i\mu\nu'$ is a single term depending only on μ et ν'; and the theorem thus is that the two functions differ only by an exponential factor. The relations between the constants will be obtained in the course of the investigation.

Demonstration.

The truth of the theorem depends on the equality of corresponding exponentials on the two sides of the equation: viz. substituting for the thetafunctions their values, and comparing the exponents or arguments of the exponentials: writing also for convenience

$$G(u+2\varpi',\ n+\nu)$$

to denote the quadric function $(*)(u+2\varpi',\ n+\nu)^2$; we ought to have

$$\begin{aligned}-H(u;\ \mu',\ \nu')+G(u+2\varpi',\ n+\nu)+2\pi i\mu(n+\nu)&\\ =-2\pi i\mu\nu'+G(u,\ n+\nu+\nu')+2\pi i(\mu+\mu')(n+\nu+\nu'),&\end{aligned}$$

or say

$$H(u;\mu',\nu')=G(u+2\varpi',n+\nu)-G(u,n+\nu+\nu')-2\pi i(n+\nu+\nu')\mu'.$$

In this equation, if true at all, the terms containing n must destroy eachother, and assuming that they do so, the equation becomes

$$H(u;\mu',\nu')=G(u+2\varpi',\nu)-G(u,\ \nu+\nu')-2\pi i(\nu+\nu')\mu'.$$

Consider first the terms in n: the right hand side is

$$\begin{aligned}&= a(u+2\varpi')^2 + 2h(u+2\varpi')(n+\nu) + b(n+\nu)^2\\ &\quad - au^2 \qquad - 2hu(n+\nu+\nu') - b(n+\nu+\nu')^2 - 2\pi i n\mu'\end{aligned}$$

and the terms herein which contain n thus are

$$\begin{aligned}&2h(u+2\varpi')n + bn^2 + 2bn\nu\\ &-2hun \qquad - bn^2 - 2bn(\nu+\nu') - 2\pi i n\mu',\\ &=4h\varpi' n \qquad - 2bn\nu' \qquad - 2\pi i n\mu'\end{aligned}$$

which, b being symmetrical, may be written

$$= 2(2h\varpi' - b\nu' - \pi i\mu')n$$

and these terms will vanish if, and only if

$$2h\varpi' - b\nu' - \pi i\mu' = 0,$$

a system of ϱ equations connecting ϖ', μ', ν'.

Assuming them to be satisfied, the remaining relation,

$$H(u;\mu',\nu') = G(u+2\varpi',\nu) - G(u, \nu+\nu') - 2\pi i(\nu+\nu')\mu',$$

becomes

$$\begin{aligned}H(u;\mu',\nu') &= a(u+2\varpi')^2 + 2h(u+2\varpi')n + b\nu^2\\ &\quad - au^2 \qquad -2hu(\nu+\nu') - b(\nu+\nu')^2 - 2\pi i(\nu+\nu')\mu'.\end{aligned}$$

Here a and b being symmetrical, we have $a(u+2\varpi')^2 = au^2 + 4a\varpi' u + 4a\varpi'^2$, $b(\nu+\nu')^2 = b\nu^2 + 2b\nu'\nu + b\nu'^2$, and the value therefore is

$$= 4a(\varpi' u + \varpi'^2) + 2h(2\varpi'\nu - u\nu') - b(2\nu'\nu + \nu'^2) - 2\pi i(\nu+\nu')\mu'.$$

On the right hand side putting the term in h under the form

$$-2h(u+\varpi')\nu' + 2h\varpi'(2\nu+\nu'), = -2(h)\nu'(u+\varpi') + 2h\varpi'(2\nu+\nu')$$

and the last term under the form $-\pi i\mu'(2\nu+\nu') - \pi i\mu'\nu'$, the equation becomes

$$\begin{aligned}H(u;\mu',\nu') &= (4a\varpi' - 2(h)\nu')(u+\varpi') - \pi i\mu'\nu'\\ &\quad + (2h\varpi' - b\nu' - \pi i\mu')(2\nu+\nu'),\end{aligned}$$

where the second line vanishes in virtue of the foregoing equation $2h\varpi' - b\nu' - \pi i\mu' = 0$; the equation thus is

$$H(u;\mu',\nu') = (4a\varpi' - 2(h)\nu')(u+\varpi') - \pi i\mu'\nu'$$

which equation, regarding therein ϖ' as a linear function of μ', ν' shows that $H(u;\mu',\nu')$ is a function linear as regards u, (and containing this only through $u+\varpi'$) but quadric as regards μ', ν'.

Introducing the new row-letter ζ', we may write

$$H(u;\mu',\nu') = 2\zeta'(u+\varpi') - \pi i\mu'\nu'$$

viz. the expression on the right hand side is here assumed as the value of the function

$$H(u;\mu',\nu'),=G(u+2\varpi',\nu)-G(u,\nu+\nu')-2\pi i(\nu+\nu')\mu';$$

and the theorem then is

$$\begin{aligned}&\exp.[-H(u;\mu',\nu')]\cdot\Theta(u+2\varpi';\mu,\nu)\\&\qquad=\exp.[-2\pi i\mu\nu']\cdot\Theta(u;\mu+\mu',\nu+\nu'),\end{aligned}$$

where by what precedes

$$\begin{aligned}2h\varpi'-b\nu'-\pi i\mu'&=0,\\2a\varpi'-(h)\nu'-\zeta'&=0,\end{aligned}$$

2ϱ equations for determing the 2ϱ functions ϖ', ζ' as linear functions of μ', ν': which equations depend on the $\varrho(2\varrho+1)$ constants a, b, h.

Suppose that the resulting values of ϖ', ζ' are

$$\begin{aligned}\varpi'&=\omega\mu'+\omega'\nu',\\\zeta'&=\eta\mu'+\eta'\nu',\end{aligned}$$

where ω, ω', η, η' are square-letters; then, regarding a, b, h as arbitrary, the $4\varrho^2$ new constants ω, ω', η, η' cannot be all of them arbitrary, but must be connected by $4\varrho^2-\varrho(2\varrho+1)$, $=\varrho(2\varrho-1)$ equations.

We may regard ω, ω', η, η' as satisfying these $\varrho(2\varrho-1)$ equations, but as being otherwise arbitrary; the foregoing equations then are

$$\begin{aligned}2h\varpi'-b\nu'-\pi i\mu'&=0,\\2a\varpi'-(h)\nu'-\zeta'&=0,\\\varpi'&=\omega\mu'+\omega'\nu',\\\zeta'&=\eta\mu'+\eta'\nu',\end{aligned}$$

which lead to the equations connecting a, b, h with ω, ω', η, η'.

The first and second equations, substituting for ϖ', ζ' their values, become

$$\begin{aligned}(2h\omega-\pi i)\mu'+(2h\omega'-b)\nu'&=0,\\(2a\omega-\eta)\mu'+(2h\omega'-\eta'-(h))\nu'&=0,\end{aligned}$$

or μ', ν' being arbitrary, we thus obtain the $4\varrho^2$ equations

$$\begin{aligned}2a\omega-\eta&=0,\\2h\omega-\pi i&=0,\\2a\omega'-\eta'-(h)&=0,\\2h\omega'-b&=0,\end{aligned}$$

which are the equations in question. It is to be observed that πi is

like the other symbols a matrix, viz. it is regarded as containing the matrix unity; or what is the same thing it denotes

$$\pi i \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \cdots \\ 0, & 1, & 0 \\ \vdots & & \end{vmatrix},$$

We can from these equations eliminate a, b, h and thus obtain the $\varrho(2\varrho - 1)$ equations before referred to, which connect the $4\varrho^2$ constants $\omega, \omega', \eta, \eta'$. I give, but without a complete explanation, the steps of the elimination.

The equation $2a\omega - \eta = 0$, may be written in the form

$$2(a\omega) - (\eta) = 0,$$

that is

$$2(\omega)(a) - (\eta) = 0,$$

or since

$$(a) = a, \quad 2(\omega)a - (\eta) = 0;$$

from the original form, and the new form respectively, we find

$$2(\omega)a\omega - (\omega)\eta = 0, \quad 2(\omega)a(\omega) - (\eta)\omega = 0;$$

and comparing these

$$(\omega)\eta - (\eta)\omega = 0, \quad \text{(first result).}$$

The equation $2a\omega' - \eta' - (h) = 0$, or say $(h) = -\eta' + 2a\omega'$ may be written in the form $h = -(\eta') + 2(a\omega')$, that is, since $a = (a)$

$$h = -(\eta') + 2(\omega')a,$$

and we thence deduce

$$h\omega = -(\eta')\omega + 2(\omega')a\omega.$$

But from the equation $2a\omega - \eta = 0$, we have $2(\omega')a\omega - (\omega')\eta = 0$, and the equation thus becomes $h\omega = -(\eta')\omega + (\omega')\eta$; which in virtue of $2h\omega - \pi i = 0$, becomes

$$\frac{1}{2}\pi i = -(\eta')\omega + (\omega')\eta, \quad \text{(second result).}$$

From the equation above obtained, $h = -(\eta') + 2(\omega')a$, we have

$$h\omega' = -(\eta')\omega' + 2(\omega')a\omega';$$

in virtue of $2h\omega' - b = 0$, this becomes $-2(\eta')\omega' + 4(\omega')a\omega' = b$; an equation which may also be written $-2((\eta')\omega') + 4((\omega')a\omega') = (b)$, or what is the same thing $-2(\omega')\eta' + 4(\omega')(a)\omega' = (b)$; or since $(a) = a$ and $(b) = b$, this is $-2(\omega')\eta' + 4(\omega')a\omega' = b$: and comparing with the original equation $-2(\eta')\omega' + 4(\omega')a\omega' = b$, we obtain

$$(\omega')\eta' - (\eta')\omega' = 0, \quad \text{(third result).}$$

We have thus the three systems

$$(\omega)\eta - (\eta)\omega = 0, \quad \frac{1}{2}\varrho(\varrho - 1) \text{ equations}$$

$$(\omega')\eta - (\eta')\omega = \frac{1}{2}\pi i, \quad \varrho^2 \quad \text{equations}$$

$$(\omega')\eta' - (\eta')\omega' = 0 \quad , \quad \frac{1}{2}\varrho(\varrho-1) \quad ,,$$

in all $\varrho(2\varrho - 1)$ equations. As to these systems, observe that $(\omega)\eta$, $(\eta)\omega$, etc. are all of them matrices of ϱ^2 terms; each of the three systems denotes therefore in the first instance ϱ^2 equations, viz. the equations obtained by equating to zero the several terms of such a matrix: but in the first system each diagonal term so equated to zero gives the identity $0 = 0$; and equating to zero the terms which are symmetrical in regard to the diagonal we obtain twice over, in the forms $P = 0$, and $-P = 0$, one and the same equation; the number of equations is thus diminished from ϱ^2 to $\frac{1}{2}\varrho(\varrho - 1)$; and similarly in the third system the number of equations is $= \frac{1}{2}\varrho(\varrho-1)$: but for the second system the number of equations is really $= \varrho^2$. It is hardly necessary to remark that in this second system $\frac{1}{2}\pi i$ is as before regarded as a matrix.

The foregoing three systems of equations are in fact the equations (6) p. 4 of Dr. Schottky's work.

Cambridge, 12. July 1880.

Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Bekanntlich ist der ursprüngliche Beweis von der Eindeutigkeit der Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe durch die Bemerkung des Herrn Weierstrass hinfällig geworden, dass das Integral einer unendlichen Reihe ohne weiteres nur dann gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder gesetzt werden darf, wenn die Reihe innerhalb des Integrationsintervalles in gleichem Grade convergirt. Da diese Eigenschaft für eine beliebige trigonometrische Reihe nicht vorausgesetzt werden darf, so handelte es sich darum einen neuen Beweis zu finden, bei welchem unabhängig von der Art der Convergenz erkannt wird, dass zwei trigonometrische Reihen, welche für jeden Werth von x convergiren und dieselbe Summe haben, in ihren Coefficienten übereinstimmen. Nachdem dieser Nachweis von Herrn Heine, der diese Untersuchungen zuerst anregte, mit einer vereinfachenden Einschränkung geliefert war*), zeigte Herr Cantor ganz allgemein, dass jede trigonometrische Reihe, welche im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einer „Punktmenge erster Gattung“ den Werth 0 darstellen soll, verschwindende Coefficienten erhält**). Herr du Bois-Reymond bewies den Satz in der bestimmteren Form, dass, kurz gesagt, jede trigonometrische Reihe, welche eine integrirbare Function definirt, eine Fourier'sche Reihe ist.***)

Ich beabsichtige im Folgenden zuerst zu zeigen, dass man unter einer gewissen Voraussetzung die gleichmässige Convergenz einer Fourier'schen Reihe von vornherein sehr einfach nachweisen kann. Daran schliesst sich vermittelst des Dirichlet'schen Satzes die Lösung des Problemes von der Darstellbarkeit einer willkürlichen Function durch

*) Journal für Mathematik. Bd. 71.

**) Journal f. Math. Bd. 72 u. Math. Annalen Bd. V.

***) Abhandlungen d. k. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl. XII. Bd. I. Abth.

eine Fourier'sche Reihe, und mit Benutzung des Cantor'schen Satzes erhält man einen neuen Beweis für den Fundamentalsatz des Herrn du Bois-Reymond.

Die Voraussetzung, welche ich mache, und die durchweg bei dieser Untersuchung gelten soll, besteht darin, dass nicht nur die Function $f(x)$ *sondern auch ihr Quadrat* $[f(x)]^2$ im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirbar ist. Letzteres ist eine nothwendige Folge der Integrirbarkeit von $f(x)$, falls diese Function im Intervalle endlich bleibt. Demnach kann man an Stelle der beiden Annahmen auch die engere setzen: *Die Function $f(x)$ soll im Intervalle endlich und integrirbar sein.*

Wird aber z. B. $f(x)$ in bestimmter Weise unendlich, so muss die Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ sein, damit $[f(x)]^2$ integrirbar bleibt.

I.

Die gleichmässige Convergenz der Fourier'schen Reihe.

Unter einer Fourier'schen Reihe verstehe ich eine trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

in welcher die Coefficienten die Werthe haben:

$$(1) \qquad b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Die Integrirbarkeit von $f(x)$ ist dabei nothwendige Voraussetzung. Nun kann man zuerst beweisen: Die Fourier'sche Reihe hat, falls $[f(x)]^2$ integrirbar ist, die Eigenschaft, dass zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Stelle n gefunden werden kann, von der ab nicht nur sämmtliche Coefficienten $a_n\, b_n$ ihrem Betrage nach kleiner sind als δ, sondern auch

$$\sum_{k=n}^{k=n+l} (a_k^2 + b_k^2) < \delta$$

für jeden Werth von l.

Setzt man nämlich:

$$f(x) - b_0 - \sum_{1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = P_n,$$

wobei also P_n die Differenz zwischen der Function $f(x)$ und beliebig vielen Gliedern der Fourier'schen Reihe bedeutet, so ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_n^2\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - b_0 - \sum_1^n (a_k \sin kx + b_k \cos kx)]^2\,dx.$$

Da nun:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx dx = 0,$$

so lange k von l verschieden ist, während:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 kx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 kx dx = \pi,$$

so wird:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_n^2\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2\,dx - 2\pi b_0^2 - \pi \sum_1^n a_k^2 + b_k^2.$$

Diese Gleichung gilt, wie gross auch n genommen wird. Da die rechte Seite bei jedem noch so grossen Werthe von n eine positive Grösse darstellen muss, so kann auch

$$2\pi b_0^2 + \pi \sum_1^n a_k^2 + b_k^2,$$

bei beliebig wachsendem Werthe von n nicht über jeden Betrag hinauswachsen, vielmehr nähert sich diese unbedingt convergente Reihe einem bestimmten positiven Werthe, der höchstens gleich

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \cdot dx$$

ist; es muss sich also eine Stelle n finden lassen, von der ab

$$\sum_{k=n}^{k=n+l} a_k^2 + b_k^2 < \delta$$

bleibt für jeden Werth von l; insbesondere ist auch $\operatorname{Lim} a_n = 0$, $\operatorname{Lim} b_n = 0$ für $n = \infty$.

Bezeichnet man nun ferner einen Rest der Fourier'schen Reihe mit $R_{n,l}$ so zwar, dass:

$$R_{n,l} = \sum_{k=n}^{k=n+l} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

so ist:

$$\text{(I)} \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} R_{n,l}^2\, dx = \pi \sum_{k=n}^{k=n+l} a_k^2 + b_k^2 < \delta.$$

Aus dieser Ungleichung erkennt man eine bestimmte Eigenschaft der Fourier'schen Reihe: Eine beliebige unendliche Reihe:

$$f_1(x) + f_2(x) \cdots f_n(x) + \cdots + f_{n+l}(x) \cdots,$$

in welcher jedes Glied eine stetige Function sein soll, heisst in einem Intervalle von a bis b gleichmässig convergent, wenn sich zu jeder Zahl δ eine Stelle n angeben lässt, von der ab für jeden Werth von x die Reste:

$$R_{n,l} = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f'_{n+l}(x)$$

ihrem Betrage nach kleiner bleiben als δ, wie gross auch l gewählt wird. „Im allgemeinen gleichmässig convergent" werde ich nun eine Reihe nennen, wenn sich eine Stelle n finden lässt, von der ab für jeden Werth von l

$$\int_a^b R_{n,l}^2\, dx < \delta$$

wird. Dabei kann es noch unendlich viele Stellen geben, an denen R_n oberhalb einer gewissen (durch δ bedingten) Grenze liegt, oder auch unendlich wird; nur sind solche Stellen in jedem beliebig kleinen Intervalle so vertheilt, dass sie auf den Werth des Integrals keinen Einfluss üben; sie bilden eine Punktmenge erster Gattung.

Somit ist bewiesen: *Die Fourier'sche Reihe, bei welcher* $[f(x)]^2$ *integrabel ist, convergirt im Intervalle von* $-\pi$ *bis* $+\pi$ *im allgemeinen gleichmässig.**)

Will man nun hier schon den Satz des Herrn duBois-Reymond nebst seinem Beweise voraussetzen, so kann man dies Theorem in der allgemeineren Form aussprechen:

Jede trigonometrische Reihe, welche eine nebst ihrem Quadrate integrirbare Function definirt, convergirt im allgemeinen gleichmässig; denn sie ist eine Fourier'sche Reihe.

Wichtiger aber wird es sein, den Satz von der gleichmässigen Convergenz wieder zum Fundamente der Untersuchung über die Darstellbarkeit einer willkürlichen Function zu machen.

Man sieht leicht ein: Das Integral jeder im allgemeinen gleich-

---

*) Derselbe Satz gilt unter der gleichen Voraussetzung für die Entwicklung nach Kugelfunctionen und Bessel'schen Functionen. Die gleichmässige Convergenz „im allgemeinen" ist eine gemeinsame Eigenschaft aller dieser Reihen.

mässig convergenten Reihe wird durch die Reihe dargestellt, welche aus den Integralen der einzelnen Glieder hervorgeht. Denn ist

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x) \cdots f_{n-1}(x) + R_n(x)$$

und wird im Intervalle von a bis b bei allen Werthen von x mit Ausnahme einer Punktmenge erster Gattung $R_n(x)$ durch Wahl von n kleiner als ein beliebiges δ, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \cdots \int_a^b f_{n-1}(x)\,dx$$
$$+ (< \delta(b-a)).$$

Bezeichnet man den Summenwerth der Fourier'schen Reihe, deren Convergenz nachgewiesen wurde, mit $\varphi(x)$, so ergeben sich aus der Gleichung:

$$(2) \qquad \varphi(x) = b_0 + \sum_1^{n-1} [a_k \sin kx + b_k \cos kx] + R_n(x)$$

folgende Eigenschaften:

Durch Multiplication mit $\sin kx$ oder $\cos kx$ und Integration folgt:

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin kx\,dx &= \pi a_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\,dx. \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx\,dx &= \pi b_k = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx\,dx, \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2 \cdots \infty)$$

ferner durch Multiplication mit $\varphi(x)$ und Integration:

$$\text{(III)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} [\varphi(x)]^2 dx = b_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) dx + \sum_{k=1} a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin kx\,dx$$
$$+ b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx\,dx$$
$$= 2\pi b_0{}^2 + \pi \sum_{k=1} a_k^2 + b_k^2.$$

Mithin ist bewiesen: Jede durch eine Fourier'sche Reihe (in welcher $[f(x)]^2$ integrirbar ist) definirte Function $\varphi(x)$, wird durch eine Reihe dargestellt, in welcher die Coefficienten auch die in den Gleichungen (II) zuerst stehende Form haben. Das Quadrat der Function $\varphi(x)$ ist integrirbar und wird durch die Reihe (III) erhalten.

Es entsteht nun die Frage, in welchem Zusammenhange stehen die Werthe der Function $\varphi(x)$ mit der willkürlichen Function $f(x)$? Wenn nachgewiesen werden kann, dass $\varphi(x)$ den gleichen Charakter der Willkürlichkeit besitzt, wie $f(x)$, so wäre die Darstellbarkeit einer willkürlichen Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe erwiesen.

II.

Die Darstellbarkeit einer willkürlichen Function durch eine Fourier'sche Reihe.

Es ist aber vor allem nöthig, den Begriff der Darstellung einer willkürlichen Function durch eine Reihe scharf zu begränzen. Da es Stellen geben kann, an welchen der Summenwerth der Reihe von dem Functionswerthe differirt, so bietet sich folgende Definition (bei einer nebst ihrem Quadrat integrirbaren Function $f(x)$) als ausreichend für unseren Zweck dar: *Eine Function $f(x)$ soll durch eine Reihe im Intervall a bis b dargestellt heissen, wenn der Summenwerth $\varphi(x)$ dieser Reihe die Eigenschaft hat, dass*

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = 0.$$

Dabei kann es wiederum unendlich viele Stellen geben, an denen $\text{abs}[f(x) - \varphi(x)] > \delta$, nur bilden solche Stellen eine Punktmenge erster Gattung.

Es erscheint mir zweckmässig, als Definition einer Punktmenge erster Gattung die folgende festzuhalten: Eine Punktmenge heisst von der ersten Gattung, wenn es möglich ist die Punkte der Menge in Intervalle von endlicher Länge einzuschliessen, deren Summe beliebig verkleinert werden kann.*) Aus dieser Definition ergiebt sich: Man kann in beliebiger Nähe einer jeden Stelle ein endliches Intervall angeben, in welchem kein Punkt der Menge liegt.

Denn ist α ein beliebiger Punkt des Intervalles, so wäre es nur dann nicht möglich in beliebiger Nähe von α ein Intervall ausfindig zu machen, in welchem kein Punkt der Menge liegt, wenn in der Nähe eines jeden Punktes, der innerhalb einer bei α beginnenden endlichen Strecke von der Länge δ liegt, unendlich viele Punkte der Menge sich befänden. Alsdann wäre es aber auch nicht möglich, sämmt-

*) Vergl. Cantor: Math. Ann. Bd. XV. Dort bildet die Eigenschaft der Menge, eine endliche Anzahl von Ableitungen zu besitzen, die Grundlage der Definition.

liche Punkte der Menge von vornherein in Umgebungen einzuschliessen, deren Summe kleiner ist als δ; d. h. die Menge wäre nicht von der ersten Gattung.

Ich kehre nun zu der Frage zurück: In welchem Zusammenhange stehen die durch die Gleichungen (II) verbundenen Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$? Setzt man

$$\varphi(x) = f(x) + g(x)$$

so hat man an Stelle der Gleichungen (II) die Bedingung:

$$\text{(IIa)} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \sin kx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \cos kx\, dx = 0, \quad k = 0, 1, 2 \cdots \infty.$$

Es soll aus diesen Gleichungen gefolgert werden, dass die Function $g(x)$ welche nebst ihrem Quadrate integrirbar ist, im allgemeinen verschwindet.

Herr du Bois-Reymond, dem ich diese Frage vorlegte, hatte die Güte, mich darauf aufmerksam zu machen, dass sich dieselbe vermittelst eines von ihm angegebenen Satzes erledigen lässt. Dieser Satz lautet:*) Wenn das Integral

$$\int_a^b dx\, \lambda(x)\, g(x)$$

Null ist, welche Function (mit stetigen Differentialquotienten) man auch an die Stelle von $\lambda(x)$ setzen möge, so ist $g(x)$ eine solche integrirbare Function, deren Integral zwischen beliebigen dem Intervall $a \cdots b$ angehörigen Grenzen Null ist.

Der Satz kann in der Allgemeinheit, wie er hier zur Anwendung kommen wird, folgendermassen bewiesen werden.

Man construire eine Function $\lambda(x)$, welche im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ 0 ist, mit Ausnahme einer beliebig kleinen Strecke von α bis β, für welche $\lambda(\alpha)$ bis $\lambda(\beta)$ den constanten Werth 1 hat.

Nach dem Dirichlet'schen Satze ist solch eine Function durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar,

$$\lambda(x) = \sum_{k=0} a'_k \sin kx + b'_k \cos kx,$$

in welcher die Coefficienten die Werthe haben:

*) Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung, Math. Ann. Bd. XV. p. 302. Eine ähnliche Frage ist von Liouville behandelt worden; jedoch in einer für den vorliegenden Zweck nicht anwendbaren Weise: Journal de Mathém. T. I., p. 253. T. II., p. 1.

$$a'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\lambda(x)\sin kx\,dx, \qquad b'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\lambda(x)\cos kx\,dx.$$

An den Sprungstellen besitzt die Reihe den Werth $\frac{1}{2}$. Diese Fourier'sche Reihe convergirt aber, wie im § I. bewiesen wurde, im allgemeinen gleichmässig und folglich ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\lambda(x)\,g(x)\,dx = \sum_{k=0} a'_k \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\sin(kx)\,dx + b'_k \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\cos kx\,dx.$$

Zufolge der Gleichungen (IIa) ist die rechte Seite 0 und da $\lambda(x)$ nur im Intervalle von α bis β den Werth 1 hat, im übrigen aber verschwindet, so wird:

$$\text{(IV)} \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\,\lambda(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = 0 \;\Big|\; -\pi \leqq \alpha < \beta \leqq +\pi.$$

Durch diese Gleichung, in welcher die Grenzen α und β beliebig nahe gewählt werden können, ist aber ausgesprochen, dass die Stellen, an welchen der Betrag von $g(x)$ grösser ist als irgend ein Werth δ, nur eine Punktmenge erster Gattung bilden.

Denn weil die Function $g(x)$ integrirbar ist, so kann man in beliebiger Nähe eines jeden Punktes α ein endliches Intervall angeben, in welchem die Schwankungen kleiner werden als δ; geht dieses Intervall vom Punkte $\alpha + \varepsilon$ bis β, so ist für jeden Punkt ξ im Innern derselben:

$$\int_{\xi}^{\beta} g(x)\,dx = 0 = (\beta - \xi)\,[g(\xi) + (< \delta)].$$

Der Betrag von $g(\xi)$ ist also durchweg kleiner als δ, und die Punkte, für welche diese Eigenschaft nicht besteht, können in Intervalle $\pm\,\varepsilon$ eingeschlossen werden, deren Summe beliebig klein wird.

Aus der Gleichung (I)

$$\varphi(x) = \sum_{k=0} a_k \sin kx + b_k \cos kx = f(x) + g(x)$$

folgt nun

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\,g(x)\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,g(x)\,dx + \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)^2\,dx.$$

Also da $g(x)$ im allgemeinen 0 ist, mithin

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

wird, so ist auch:

$$\text{(V)} \qquad \int_{-\pi}^{+\pi}[g(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi}[\varphi(x) - f(x)]^2\,dx = 0.$$

Es ist also bewiesen: *Bedeutet $f(x)$ eine willkürliche Function, deren Quadrat im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ integrirbar ist, so stellt die Fourier'sche Reihe den Werth derselben derart dar, dass der Summenwerth der Fourier'schen Reihe $\varphi(x)$, sich höchstens in Punkten einer Menge erster Gattung von dem Werthe $f(x)$ um eine angebbare Grösse δ unterscheidet.* Es ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx = 2\pi b_0{}^2 + \pi \sum_{k=1} a_k{}^2 + b_k{}^2.$$

III.

Die eindeutige Darstellung einer willkürlichen Function durch eine trigonometrische Reihe.

Durch den Cantor'schen Satz ist die Eindeutigkeit der Entwickelung von $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe bewiesen, es ist aber auch vermitelst dieses Satzes und der vorigen Untersuchungen leicht, die Identität einer trigonometrischen Reihe mit der Fourier'schen nachzuweisen.

Es sei $f(x)$ definirt durch eine trigonometrische Reihe

$$\text{(3)} \qquad f(x) = \sum_{k=0} a'_k \sin kx + b'_k \cos kx;$$

über die Coefficienten a' und b' sei keinerlei Voraussetzung gemacht; nur soll $f(x)$ nebst seinem Quadrate integrirbar sein.

Bildet man nun die Fourier'sche Reihe

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) = \sum_{k=0} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

wobei a_k und b_k durch die Gleichungen (1) definirt sind, so ist

$$g(x) = \sum_{k=0} (a_k - a'_k) \sin kx + (b_k - b'_k) \cos kx$$

eine durch eine trigonometrische Reihe definirte Function, deren Werth, wie in § II. gezeigt wurde, jedenfalls mit Ausnahme einer Punktmenge erster Gattung Null ist. Es müssen daher die Coefficienten dieser Reihe sämmtlich verschwinden, d. h. $g(x)$ ist in diesem Falle durchweg gleich Null; und es wird:

$$\text{(VI)}\quad a'_k = a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx,\quad b'_k = b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Dresden, Juli 1880.

Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung*).

Von

Felix Klein in München.

Der Hauptgesichtspunkt, mit dem ich bisher in der Theorie der elliptischen Functionen gearbeitet habe, lässt sich mit zwei Worten kennzeichnen. Ich wünschte, dem Legendre'schen Modul $\varkappa^2$ nicht diejenige Alleinherrschaft zu lassen, welche er bisher fast unbestritten besass. Einmal muss er in manchem Betracht, wie dies bereits die Weierstrass'schen Vorlesungen gezeigt haben, hinter der rationalen Invariante J zurücktreten, andererseits aber bildet er als *Modul zweiter Stufe* das Anfangsglied einer unendlichen Kette von Moduln, die alle in vieler Hinsicht gleichberechtigt sind und eine gleichmässige Berücksichtigung verlangen. In meiner ersten der k. Akademie vorgelegten Arbeit**) zeigte ich in diesem Sinne, dass sich der Begriff der Modulargleichungen wesentlich erweitern lasse. Herr Gierster publicirte im Anschlusse hieran eine Untersuchung***), derzufolge die neuen Modulargleichungen für zahlentheoretische Zwecke ebenso mit Nutzen verwerthet werden können, wie die früheren. Ich wünsche heute denselben Grundgedanken, allerdings nur in allgemeinen Zügen, nach einer dritten Richtung auszuführen, indem ich nicht nur, wie bisher, Modulfunctionen (von ω_1, ω_2), sondern doppeltperiodische Functionen (von u, ω_1, ω_2) in Betracht ziehe. Als einfachste Gestalt des elliptischen Integrals erster Gattung wählt man zumeist die Legendre'sche Normalform†):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - \varkappa^2 x}}.$$

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der Münchener Akademie, Sitzung vom 3. Juli 1880.

**) Sitzungsbericht vom 6. Dec. 1879. (Vergl. Annalen XVII, p. 62 ff.)

***) Sitzungsbericht vom 5. Febr. 1880. (Annalen XVII, p. 74 ff.)

†) Dass man im Anschlusse an die gewöhnliche Behandlungsweise diese Form und nicht die aus ihr durch quadratische Transformation hervorgehende

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 \cdot 1 - \varkappa^2 x^2}}$$

Ich beabsichtige zu zeigen, *dass ebenso einfache Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung existiren, in denen die Moduln dritter, vierter, fünfter etc. Stufe als Constante auftreten, so dass also die Legendre'sche Form nicht als Normalform schlechthin, sondern nur als solche zweiter Stufe erscheint, an die sich, den unendlich vielen Werthen von n entsprechend, unendlich viele Normalformen n^{ter} Stufe anreihen.* Dabei möchte ich späteren Untersuchungen vorbehalten, zu beweisen, dass sich an jede dieser Normalformen in vollem Umfange analoge Untersuchungen anknüpfen lassen, wie man solche an die Legendre'sche Form in mannigfachster Weise angeschlossen hat.

Es kann sich bei einer solchen Theorie zuvörderst nicht um neue Thatsachen, sondern nur um neue Auffassung bekannter Thatsachen handeln. In der That sind meine ersten Sätze nichts Anderes, als eine Umstellung der bekannten Hermite'schen Sätze über Θ-Producte, wobei ich nur äusserlich, im Anschlusse an die Weierstrass'schen Vorlesungen, insofern eine Umänderung treffe, als ich statt der Function Θ, deren unendlich viele Formen für meine Zwecke gleichberechtigt sein würden, die nur in einer Form existirende Function σ setze.

Man betrachte verschiedene Producte aus je n Factoren σ:

$$\sigma(u-a_1)\cdot\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n),$$
$$\sigma(u-b_1)\cdot\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n),\ \text{etc.}$$

wo

$$\Sigma a = \Sigma b = \text{etc.}$$

sein soll. Dann behaupten die hier in Betracht kommenden Hermite'schen Sätze: *dass der Quotient je zweier solcher Producte eine doppeltperiodische Function von u ist mit denjenigen Perioden* ω_1, ω_2, *die bei der Bildung der σ-Function benutzt wurden*, sowie: *dass sich alle solche Producte aus n unabhängigen derselben linear zusammensetzen lassen.* — Ich schreibe nun, indem ich n unabhängige Producte dieser Art auswähle und unter $x_0, x_1, \cdots x_{n-1}$ homogene Variable, unter ϱ einen Proportionalitätsfactor verstehe:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = \sigma(u-a_1)\cdot\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n), \\ \varrho x_1 = \sigma(u-b_1)\cdot\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n), \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \varrho x_{n-1} = \sigma(u-n_1)\cdot\sigma(u-n_2)\cdots\sigma(u-n_n). \end{cases}$$

Die x betrachte ich sodann, des kürzeren Ausdrucks wegen, als Co-

als eigentliche Normalform betrachten soll, habe ich u. a. Math. Ann. XIV, p. 116 auseinandergesetzt. Will man doch an letzterer festhalten, so operirt man, im Sinne der weiteren Auseinandersetzungen des Textes, mit einer Normalform *vierter* Stufe: $\sqrt{\varkappa}$ ist dann die Oktaederirrationalität (Math. Ann. XIV, p. 155).

ordinaten eines Punktes des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen. In diesem Raume stellen die Formeln (1) eine Curve dar, die, in Folge der voraufgeschickten Sätze, *das Geschlecht* 1 und *die Ordnung* n besitzt. Ich will dieselbe *eine elliptische Curve der* n^{ten} *Stufe* nennen. Man kann die Variable u definiren, indem man sie als Integral an einer solchen Curve hinerstreckt; ich spreche dann von *einem Integral der* n^{ten} *Stufe.*

Die niedrigste in Betracht kommende Stufe ist natürlich die *zweite*, da es keine doppeltperiodischen Functionen der ersten Stufe giebt. Die zugehörige Curve ist die gerade Linie $\frac{x_0}{x_1}$ *doppelt überdeckt*, und, wie man leicht sieht, *mit vier Verzweigungspunkten* (*sommets*) *versehen.* Das Integral zweiter Stufe ist kein anderes, als dasjenige, welches man gewöhnlich als elliptisches Integral (erster Gattung) schlechthin bezeichnet, nämlich:

$$\int \frac{x_1\,dx_0 - x_0\,dx_1}{\sqrt{f(x_0, x_1)}},$$

wo f irgend eine homogene biquadratische Form von x_0, x_1 bedeutet, die, gleich Null gesetzt, die Lage der Verzweigungspunkte auf $\frac{x_0}{x_1}$ fixirt.

Für die *dritte* Stufe erhält man, wie bekannt, aus (1) die allgemeine Curve dritter Ordnung der Ebene $x_0 : x_1 : x_2$. Ein Integral dritter Stufe ist also ein solches, welches an einer ebenen Curve dritter Ordnung hinerstreckt ist. Ich brauche hier nicht noch besonders an die elegante Schreibweise zu erinnern, die Aronhold für solche Integrale eingeführt hat. Nur das will ich betonen, um meiner Grundanschauung wiederholten Ausdruck zu geben, dass ich die Integrale dritter Stufe nicht etwa, wie man dies bisher fast durchgängig that, auf Integrale zweiter Stufe zurückführen, vielmehr dieselben einer directen Behandlung unterwerfen will. Dieselbe Bemerkung gilt natürlich hinsichtlich der Integrale der höheren Stufen. —

Die Integrale *vierter* Stufe werden sich auf die gewöhnliche Raumcurve vierter Ordnung beziehen, welche der volle Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist, die Integrale *fünfter* Stufe auf eine Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen, etc. Was die algebraische Darstellung dieser höheren Curven angeht, so findet man dieselbe der Art nach ohne Weiteres durch den zweiterwähnten Hermite'schen Satz. Aus fünf fünfgliedrigen σ-Producten: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 lassen sich $\frac{5\cdot 6}{2} = 15$ Glieder zweiter Ordnung bilden, deren jedes an 10 Stellen des Periodenparallelogramms gleich Null wird. *Daher bestehen zwischen den* x $15 - 10 = 5$ *quadratische Gleichungen, und unsere Curve erscheint als der Schnitt von fünf richtig gewählten*

Flächen zweiten Grades des Raumes von vier Dimensionen. — Aehnlich in allen höheren Fällen.

Alle diese „elliptischen Curven“ besitzen nun in vielfacher Hinsicht analoge Eigenschaften. Sie haben z. B. alle nur zwei rationale Invarianten, die dem g_2 und g_3 des elliptischen Integrals entsprechen. Bei allen giebt es, den berühmten Formeln analog, die Hermite für $n = 2$*) und Brioschi für $n = 3$**) gegeben hat, rationale Multiplicationsformeln vom Grade n^2, die ohne Weiteres das an der Curve hinerstreckte, richtig normirte Integral in

$$\frac{1}{n}\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

verwandeln, etc. Ich will bei diesen allgemeinen Analogien nicht verweilen, sondern gehe nunmehr sofort zur Besprechung des Hauptpunktes der heutigen Mittheilung über, zur Lehre von den (irrationalen) *Normalformen*, die man den Curven n^{ter} Stufe und damit den zugehörigen Integralen ertheilen kann.

Das Mittel zur Herstellung dieser Normalformen liegt einfach in einer geeigneten linearen Transformation der x, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in einer geschickten Wahl der Constante $a_i, b_i \cdots n_i$ in Formel (1). Indem man diese Constanten gleich n^{ten} Theilen der Perioden wählt, erreicht man, dass in den algebraischen Gleichungen der Curve n^{ter} Stufe, und also auch im zugehörigen Integrale, nur noch wesentliche (invariante, aber irrationale) Constante vorkommen, *und diese Constanten erweisen sich dann als Moduln der n^{ten} Stufe.*

Ich kann dies heute nur für die beiden niedrigsten Stufen, die Neues bieten, einigermassen ausführen, nämlich für die *dritte* und die *fünfte* Stufe. Bei der dritten Stufe handelt es sich darum, die bekannte Theorie der Wendepunkte der ebenen Curven dritter Ordnung in Beziehung zu der früher von mir entwickelten Theorie der Moduln dritter Stufe (der Tetraederirrationalität) zu setzen. Die fünfte Stufe hat Herr Dr. Bianchi in letzter Zeit auf meine Anregung hin untersucht, und es sind wesentlich von ihm gefundene Resultate, die ich im Folgenden mittheile. Herr Dr. Bianchi wird eine ausführlichere Darlegung dieses Gegenstandes demnächst in den mathematischen Annalen veröffentlichen.

Bei den ebenen Curven *dritter* Ordnung erinnere ich an die Existenz der vier Wendepunktsdreiecke und an die Normalform, die man, nach Hesse, erhält, wenn man eins der Wendedreiecke als Coordinatendreieck zu Grunde legt. Bekanntlich lautet die letztere:

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 6a x_0 x_1 x_2 = 0. \tag{2}$$

*) Crelle's Journal Bd. 52.

**) Borchardt's Journal, Bd. 63, p. 30.

Alles, was ich hier hinzufüge, ist, *dass die hier vorkommende Constante a für das an der Curve dritter Ordnung hinerstreckte Integral die Tetraederirrationalität ist.* In der That, man vergleiche die Formel, die etwa in Lindemann's Vorlesungen von Clebsch pag. 569 für den Zusammenhang der Grösse a mit der absoluten Invariante $\frac{S^3}{T^2}$ gegeben ist, mit der Gestalt, die ich in den Mathematischen Annalen XIV, p. 154 der Tetraedergleichung ertheilte. Trägt man der Verschiedenheit der angewandten Bezeichnung Rechnung, so sieht man, dass beide Gleichungen genau übereinstimmen.

Man bilde jetzt das zur Curve (2) gehörige Integral. Dasselbe kann folgende einfache Form annehmen:

$$(3) \qquad \int \frac{x_1\,dx_0 - x_0\,dx_1}{x_2^2 + 2a x_0 x_1},$$

oder auch eine der beiden anderen Formen, die aus dieser durch cyklische Vertauschung der x_0, x_1, x_2 entstehen. *Hier haben wir nun, was ich als Normalform dritter Stufe bezeichne.* Die in (3) vorkommenden Variablen sind durch die Gleichung (2) verknüpft; aber in beiden Ausdrücken, (2) und (3), kommt nur eine Constante (ein Modul) vor: die Tetraederirrationalität.

Bei der Normalform *fünfter* Stufe musste Herr Dr. Bianchi mit der in (1) enthaltenen transcendenten Definition beginnen, da ja die algebraische Definition der Curve erst zu finden ist. Uebrigens erkennt man sofort, dass die Curve fünfter Stufe, den 9 Wendepunkten der Curve dritter Ordnung entsprechend, 25 singuläre Punkte besitzt, in denen je eine Ebene fünfpunktig schneidet. Diese fünfundzwanzig Punkte liegen sehr oft zu je 5 in einer Ebene, und aus diesen Ebenen lassen sich, den vier Wendedreiecken der ebenen Curve dritter Ordnung entsprechend, insbesondere *sechs ausgezeichnete Pentaeder* zusammensetzen. Legt man eins derselben als Coordinatenpentaeder zu Grunde, so erhält unsere Curve, nach kurzen Zwischenüberlegungen, schliesslich folgende fünf Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_0 = x_0^2 + a x_2 x_3 - \frac{1}{a}\, x_1 x_4 = 0, \\ \varphi_1 = x_1^2 + a x_3 x_4 - \frac{1}{a}\, x_2 x_0 = 0, \\ \varphi_2 = x_2^2 + a x_4 x_0 - \frac{1}{a}\, x_3 x_1 = 0, \\ \varphi_3 = x_3^2 + a x_0 x_1 - \frac{1}{a}\, x_4 x_2 = 0, \\ \varphi_4 = x_4^2 + a x_1 x_2 - \frac{1}{a}\, x_0 x_3 = 0. \end{cases}$$

Hier kommt wieder nur *eine* Constante a vor und diese Constante

a erweist sich als identisch mit der *Ikosaederirrationalität*, wie ich sie immer verwandt habe.

Um jetzt das Integral fünfter Stufe aufzustellen, haben wir uns nur noch Rechenschaft zu geben, welche Curve dritter Ordnung irgend drei der Flächen φ (4) noch ausser der von uns in Betracht zu ziehenden Curve fünfter Ordnung gemein haben. Man findet, dass dies eine ebene Curve ist, die z. B. für die drei Flächen φ_0, φ_1, φ_2 in der Ebene $x_1 = 0$ enthalten ist. Hiernach hat man für das an der Curve hinerstreckte Integral nach bekannten Regeln (vergl. Nöther, Mathematische Annalen XIII, p. 510), unter u_x, v_x irgend zwei lineare Ausdrücke, unter C eine willkürliche Constante verstanden:

$$(5) \qquad C \int \frac{(v_x du_x - u_x dv_x) \cdot x_1}{|\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 u_x v_x|}.$$

Der im Nenner stehende Ausdruck bedeutet dabei die Functionaldeterminante der hingeschriebenen Functionen.

Die so gewonnene Formel lässt sich aber noch in doppelter Weise vereinfachen. Einmal kann man, wie selbstverständlich, die linearen Ausdrücke u_x, v_x beliebig specialisiren und also z. B. mit irgend zwei der x zusammenfallen lassen. Dann aber gelingt es, vermöge der Gleichungen $\varphi = 0$, die im Nenner stehende Functionaldeterminante durch das x_1 des Zählers zu dividiren (wie dies a priori aus dem Abel'schen Theoreme erschlossen werden kann). Man erhält so schliesslich, wenn man die Constante C benutzt, um unnöthige Factoren zu entfernen, *zehn unter sich gleichwerthige einfachste Schreibweisen für unser Integral.* Zwei derselben sind diese:

$$(6) \qquad \int \frac{x_1 dx_0 - x_0 dx_1}{5a^3 x_2 x_4 - (2a^3 + 1) x_0 x_1} = \int \frac{x_2 dx_0 - x_0 dx_2}{5a^2 x_3 x_4 - (2 - a^5) x_0 x_2},$$

und die übrigen acht ergeben sich aus diesen zwei durch cyklische Vertauschung der x*).

*) Es ist mir neuerdings gelungen, die im Texte berührten Resultate wesentlich zu generalisiren. Hierdurch werden meine früheren Entwickelungen über Transformation siebenter und elfter Ordnung (Annalen, XIV, p. 428 ff. bez. XV, p. 533 ff.) ganz ebenso an die gewöhnliche Theorie der doppeltperiodischen Functionen angeschlossen, wie dies hinsichtlich meiner Behandlung der Transformation fünfter Ordnung durch Hrn. Dr. Bianchi geschehen ist. [Ende August 1880.]

Ueber das vollständige System einer binären Form achter Ordnung.

(Fortsetzung der gleichnamigen Abhandlung p. 31—51 dieses Bandes.)

Von

von Gall in Mainz.

Nachdem mir durch Entgegenkommen der Annalenredaction Sylvester's Publicationen über binäre Formen achter Ordnung zugänglich geworden sind, habe ich meine Grundformen nochmals einer eingehenden Sichtung unterzogen, deren Erfolg eine *fast* völlige Uebereinstimmung beider vollständigen Systeme gewesen ist. Es hat sich nicht nur gezeigt, dass auch $(pk)_2 = p_2$ und $(H\Delta)^3 = H'''$ auszulassende Formen sind, sondern dass auch H_Δ und $(p\Delta)^4 = p^{IV}$ reducirende Factoren sind. Hiermit fallen die meisten Formen H und P fort. Endlich folgt noch aus zwei allgemeinen Sätzen über biquadratische Formen, dass eine Reihe weiterer Formen überflüssig ist. Zum Schlusse wurde eine Relation zwischen D und $(i\,k^2)^8$ entwickelt und die noch vorhandene Differenz beider vollständigen Systeme besprochen. Ich habe drei der Sylvester'schen Formen ausscheiden zu müssen geglaubt, eine bei Sylvester ausgeschiedene Form vermochte ich nicht zu reduciren, auch konnte ich mich leider nicht überzeugen, dass bei mir Fehler vorliegen.

§ 9. $(pk)_2$.

Durch Vertauschung von i und f erhält man aus den Formeln pag. 42 der angeführten Abhandlung d. J. die beiden gleichartigen:

$$\begin{cases} 6p_2 + 2[(fi)^3k]_1 + \frac{7}{11}(fi)_4\cdot k - f\cdot i_1 = 4(f_3 i)_1 - \frac{1}{3} f_4\cdot i \\ 6p_2 - 2[(fi)^3k]_1 + \frac{7}{11}(fi)_4\cdot k - f_1\cdot i = 4(i_3 f)_1 - \frac{1}{3} i_4\cdot f, \end{cases}$$

welche die Relation ergeben:

$$\text{(I)} \qquad (f_3 i)_1 - (i_3 f)_1 = [(fi)^3, k]_1 - \frac{1}{3}(f\cdot i_1 - i\cdot f_1).$$

Benützen wir dieselbe und die Identität:

$$(f_1 k)_1 = \frac{7}{10} f_2\cdot k - \frac{1}{2} f\cdot\Delta,$$

so erhalten wir aus den aus pag. 42 folgenden verwandten Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} 4[(fi)^3k]_1 + (fi)^4\cdot k + f\cdot i_4 &= 6(f_2 i)^2 - (f_3 i)^1 + \frac{23}{21} f_4 \cdot i \\ -4[(fi)^3k]_1 + (fi)^4\cdot k + i\cdot f_4 &= 6(i_2 f)^2 - (i_3 f)^1 + \frac{23}{11} i_4 \cdot f, \end{aligned}\right.$$

die zweite Relation:

$$\text{(II)} \quad (f_2 i)_2 - (i_2 f)_2 = \frac{3}{20} f_2\cdot k - \frac{3}{28} f\cdot\Delta - \frac{37}{6\cdot 21}(fi_4 - if_4).$$

Eine weitere Relation zwischen $(f_2 i)_2$ und $(i_2 f)^2$ ergiebt sich aus $\begin{pmatrix} i & i & f \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ und Ersetzung der $(fi)^k$ durch f_{k-2} entsprechend den Formeln des § 1.:

$$\text{(III)} \quad \frac{3}{2}[(ii')^4 f]_2 + \frac{5}{28}(ii')^6\cdot f = -\frac{1}{7}(f_1 i)_3 - \frac{6}{35}(f_2 i)_2 + \frac{1}{20} A\cdot p$$
$$+ \frac{5}{7}(f_3 i)_1 + \frac{15}{8\cdot 49} f_4 \cdot i,$$

wenn wir hierin die leicht zu bestimmenden Werthe von $(ii')^4$ und $(ii')^6$ einsetzen. $(ii')^6$ entnehmen wir dem § 6.; $(ii')^4$ findet man aus $\begin{pmatrix} f & f & i \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des § 1.:

$$7(ii')_4 + 12 i_2 + \frac{7}{6} A i - \frac{7}{5} Bf = -\frac{4}{5}(f_2 f)_4 - 12(f_3 f)_3 + \frac{18}{7}(f_4 f)_2.$$

Mit Benützung der aus $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ folgenden Gleichungen:

$$(f_2 f)_4 + (f_3 f)_3 + \frac{2}{7}(f_4 f)_2 = i_2 + \frac{2}{7} k^2,$$
$$(f_3 f)_3 + \frac{1}{2}(f_4 f)_2 = \frac{3}{2} i_2 + \frac{5}{28} k^2,$$
$$(f_4 f)_2 = H_4 + \frac{18}{11} i_2 + \frac{5}{42} k^2$$

und der im § 3. entwickelten Darstellung von H_4, kann man die Glieder $(f_\varrho f)^{6-\varrho}$ successive eliminiren und erhält endlich:

$$\text{(IV)} \quad (ii')^4 = -\frac{8}{35} i_2 - \frac{1}{30} A i + \frac{1}{15} Bf + \frac{6}{5\cdot 49} k^2.$$

Dementsprechend geht (III) über in:

$$\text{(V)} \quad -12(i_2 f)_2 - \frac{7}{8} Ap + \frac{7}{2} BH + \frac{9}{7} f_2\cdot k + \frac{1}{7} f\cdot\Delta + \frac{75}{28} f\cdot i_4 - \frac{5}{24} Akf$$
$$= -5(f_1 i)_3 - 6(f_2 i)_2 + 25(f_3 i)_1 + \frac{75}{56} f_4\cdot i,$$

wenn wir für $(f, k^2)^2 = f_2\cdot k - \frac{2}{7} f\cdot\Delta$, wie sich aus der Polarenentwickelung

$$k_x{}^4 k'_y{}^2 k_x{}^2 = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{2}{i}}{\binom{9-i}{i}} (kk')^i_{y^{2-i}} (xy)^i$$

ergiebt, setzen. Stellen wir nun die der Entwickelung von Θ_3 pag. 42 vorhergehenden Formeln mit Benützung der Relationen des § 1. um, so gehen diese über in:

$$
\text{(VI)}\begin{cases}
-\frac{4}{35}f_2\cdot k+\frac{1}{30}Afk-f\cdot i_4=4(f_1 i)_3-\frac{12}{5}(f_2 i)_2+2(f_3 i)_1-\frac{23}{42}f_4\cdot i \\
\frac{2}{7}f_2\cdot k+\frac{1}{30}Afk+f\cdot i_4-\frac{2}{7}f\cdot\Delta= \quad 6(f_2 i)_2-(f_3 i)_1+\frac{23}{21}f_4\cdot i \\
6p_2+\frac{7}{55}f_2\cdot k+\frac{7}{330}Afk-f\cdot i_4-\frac{1}{7}f\cdot\Delta= \quad 4(f_3 i)_1-\frac{1}{3}f_4\cdot i,
\end{cases}
$$

Setzen wir endlich aus (II) den Werth von $(i_2 f)_2$ in (V) ein, so verwandelt sich letztere in:

$$
\text{(VII)}\quad -\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{9\cdot 12}{35}f_2\cdot k-\frac{8}{7}f\cdot\Delta-\frac{71}{28\cdot 3}f\cdot i_4+\frac{367}{7\cdot 24}f_4\cdot i-\frac{5}{24}Akf
$$
$$
=-5(f_1 i)_3-6(f_2 i)_2+25(f_3 i)_1.
$$

Durch successive Elimination der Glieder auf der rechten Seite der Gleichungen (VI) und (VII) erhalten wir die Identitäten:

$$
-\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{103}{35}f_2 k-\frac{8}{7}f\cdot\Delta-\frac{44}{21}f\cdot i_4+\frac{41}{14}f_4\cdot i-\frac{1}{6}Akf
$$
$$
=-9(f_2 i)_2+\frac{55}{2}(f_3 i)_1,
$$
$$
-\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{118}{35}f_2 k-\frac{11}{7}f\cdot\Delta-\frac{25}{42}f\cdot i_4+\frac{9}{7}f_4\cdot i-\frac{7}{60}Afk
$$
$$
=26(f_3 i)_1,
$$
$$
-\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{169}{70}f_2 k-\frac{5}{2}f\cdot\Delta+\frac{124}{21}f\cdot i_4-\frac{37}{42}f_4\cdot i
$$
$$
\text{(VIII)}\qquad -\frac{14}{55}Afk=39p_2.
$$

Es ist also auch p_2 überflüssig.

§ 10.

Die übrigen Formen $(p, k^\alpha\cdot\Delta^\beta\cdot \mathsf{T}^\gamma)^\varrho$.

Aus $\begin{pmatrix}\varphi & k & k\\ m & 4 & 4\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $m \overline{\overline{<}} 5$ erhält man:

$$
\sum\frac{\binom{1}{i}\binom{2}{i}}{\binom{m-1-i}{i}}\left[(\varphi k)^{3+i}\,k\right]^{2-i}=\sum\frac{\binom{2}{i}\binom{3}{i}}{\binom{m+1-i}{i}}\left[(\varphi k)^{2+i}\,k\right]^{3-i}
$$

oder

$$
\text{(I)}\qquad (\varphi_2 k)_3+\frac{6-m}{m}(\varphi_3 k)_2+\frac{8-2m}{(m-1)(m-2)}(\varphi_4 k)_1=0.
$$

Verbinden wir hiermit die Formel des § 2.

$$
(\varphi\Delta)^3=-(\varphi_3 k)_2+\frac{m-4}{m-2}(\varphi_4 k)_1,
$$

so ergiebt sich

(II) $$(\varphi\Delta)^3 = \frac{m}{6-m}(\varphi_2 k)_3 - \frac{(m-3)(m-4)}{(m-1)(6-m)}(\varphi_4 k)_1.$$

Es ist mithin $(p\Delta)_3$ durch $(p_2 k)_3$ und $(p_4 k)_1$ ersetzbar. Wegen der Darstellungen von p_2 und p_4 in den § 7. und § 9. ergiebt sich hieraus, dass, von zerfallenden Formen und Formen F abgesehen, $(p\Delta)^3$ als ein Aggregat von Formen

$$((f\cdot i_4)k)_3 \quad \text{und} \quad ((i\cdot f_4)k)_3$$

erscheint, und zwar sind die dabei auftretenden zerfallenden Formen, die nicht unter F zu rechnen sind, Producte von Invarianten mit anderen Formen, was wir mit Inv. Φ bezeichnen wollen. $((fi_4)k)_3$ stellt sich als ein Aggregat von Formen $f\cdot(i_4 k)_3$, $((fi_4)^1 k)_2$, $((fi_4)^2 k)_1$ und $(fi_4)^3\cdot k$ dar. Analog der 3. Gleichung pag. 44 des § 5. findet man aber, dass $((fi_4)^1 k)_2$ auf zerfallende Formen und $((fi_4)^2 k)_1$ zurückkommt. Nach einer Bemerkung des § 5. pag. 43 ist aber $(fi_4)^2$ wie $(if_4)^2$ durch p_k und Formen F ersetzbar und mithin auch $((fi_4)k)_3$ wie $((if_4)k)_3$ durch zerfallende Formen und $(p_k k)_1$ und hiermit $(p\Delta)_3$ auszulassen.

Aus $\begin{pmatrix} \varphi & k & k \\ m & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} m \gtrless 6$ erhält man weiter

$$\sum \frac{\binom{2}{i}\binom{4}{i}}{\binom{m+1-i}{i}} [(\varphi k)^{2+i} k]^{4-i} = ((\varphi k)^4 k)^2$$

oder

$$(\varphi_2 k)_4 + \frac{8}{m}(\varphi_3 k)_3 - \frac{(m+2)(m-5)}{(m-1)(m-2)}(\varphi_4 k)_2 = 0,$$

woraus sich in Verbindung mit dem Ausdruck für $(\varphi\Delta)_4$ des § 2. ergiebt, dass $(p\Delta)_4$ durch $(p_4 k)_2$ und $(p_2 k)_4$ darstellbar ist. Wir folgern hieraus analog dem Vorhergehenden:

$$(p\Delta)_4 \equiv \Sigma[F + \text{Inv.}\,\Phi + (f\cdot i_4, k)_4 + (f_4\cdot i, k)_4].$$

$(f_4\cdot i, k)_4$ ist aber gleich einem Aggregat von Formen:

$$f_{kk}\cdot i + ((f_4 i)^1 k)_3 + ((f_4 i)^2 k)_2 + ((f_4 i)^3 k)_1 + (f_4 i)^4\cdot k.$$

Wegen der Gleichung $\frac{23}{42}(f_4 i)_4\cdot k + \cdots$ pag. 44 § 5. ist nun $((f_4 i)^1 k)_3$ durch die anderen Formen und $i_k\cdot f_k$ ersetzbar. Da aber

$$(f_4 i)_2 \equiv p_k + \Sigma(F + \text{Inv.}\,\Phi),$$

so ist auch

$$((f_4 i)^2 k)_2 \equiv \Sigma(F + \text{Inv.}\,\Phi).$$

Die übrigen Formen sind in Folge des § 1. Formen F und Inv. Φ und mithin endlich:

(III) $$(p\Delta)_4 \equiv \Sigma(F + \text{Inv.}\,\Phi + i_k\cdot f_k),$$

da für $(f\,.\,i_4, k)_4$ das gleiche Resultat erhalten wird.

Zur weiteren Betrachtung aller Formen:

$$(p\,,\,\Delta^{\alpha}\,\mathsf{T}^{\beta})^{\gamma}$$

berücksichtigen wir die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}(f_4 i)_1 \text{ und } (i_4 f)_1 \equiv \Sigma F + \Theta_4 + p_3 \\ (f_4 i)_2 \text{ und } (i_4 f)_2 \equiv p_4 + \Sigma F\end{array}\right\}\text{ vergl. pag. 43, § 5.}$$

und die aus $\begin{pmatrix} p & k & k \\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$ folgende Relation: $(p_3, k)_4 = \frac{3}{5}(p_4 k)_3$; es ergiebt dann die zweite der Gleichungen $(i_k f_k)_1$ pag. 45, § 5.

$$(i_k f_k)_1 \equiv \Theta_{kk} + p_{k,3} + \Sigma F = \Sigma F. \quad \text{(Vergl. § 14.)}$$

Ebenso erhält man aus $\begin{pmatrix} i & k & f_k \\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$$(i_k f_k)_2 \equiv p_{kk} + \Sigma F = \Sigma F.$$

Ohne Weiteres folgt aus den Formen des § 2.

$$(f_k i_k)^{3+i} = \Sigma F.$$

Es sind mithin auch alle weiteren Ueberschiebungen

$$(p_\Delta,\,\Delta^{\alpha})^{\beta} \quad \text{und} \quad (p_\Delta,\,k^{\alpha})^{\beta}$$

auszulassen. Aus allgemeinen Gründen folgt die Ueberflüssigkeit aller Formen:

$$(p\,\mathsf{T})^{\alpha}.$$

Wir erhalten nämlich aus der Polarenentwickelung

$$k_x{}^3 k_y \Delta_y{}^4 = \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}}\,(k\Delta)^i{}_{y^{5-i}}\,(xy)^i:$$

$$k_x{}^3(k\varphi)(\Delta\varphi)^4 = (k\cdot\Delta,\,\varphi)^5 - \frac{3}{2}(\mathsf{T}\varphi)^4 + \frac{C}{7}(k\varphi)^3$$

und ebenso aus der Polarenbildung $\Delta_x{}^3\Delta_y k_y{}^4$:

$$\Delta_x{}^3(\Delta\varphi)(k\varphi)^4 = (k\cdot\Delta,\,\varphi)^5 + \frac{3}{2}(\mathsf{T}\varphi)^4 + \frac{C}{7}(k\varphi)^3,$$

woraus wir sofort die Relationen ableiten:

(IV) $$3(\varphi\mathsf{T})^4 = (\varphi_\Delta k)_1 - (\varphi_k\Delta)_1.$$

Verbinden wir diese und die Gleichungen (4) und (5) des § 2. mit dem Obigen, so folgt sofort die Zurückführbarkeit aller Formen $(p\mathsf{T})^{\alpha}$. $(p_\Delta\mathsf{T})^4$ wird sofort zu

$$\Sigma(\text{Inv. }\Phi + F + (i_k\mathsf{T})^4\cdot f_k).$$

In Folge der Relationen (4) und (5), des § 2. ist endlich auch

$$(p_\Delta\mathsf{T})^5 = \Sigma(\text{Inv. }\Phi + F + i_{k\Delta}\cdot(f_k k)^2 - i_{kk}\cdot(f_k\Delta)^2),$$

$$(p_\Delta\mathsf{T})^6 = \Sigma(\text{Inv. }\Phi + F + i_{k\Delta}\cdot(f_k k)^3 - i_{kk}\cdot(f_k\Delta)^2).$$

Alle Ueberschiebungen $(p_{\Delta\Delta}\mathsf{T})^{\alpha}$ fallen nach dem Obigen ohne Weiteres fort.

§ 11.

$(H\Delta)^4$ und die übrigen Formen H.

Man hat nach § 2.:

$$H_\Delta = -2(H_3 k)^3 + \frac{7}{5}(H_4 k)^2 \text{ und nach § 3.:}$$

$$H_k \equiv \Sigma(i_2 + k^2 + \text{Inv. }\Phi),$$

$$H_3 = \frac{1}{2}(f_k f)_1 - \frac{7}{22} i_1,$$

so dass H_Δ äquivalent mit einem Aggregat von Formen:

$$((f_4 f)^1 k)_3 + \Sigma J + \Sigma K + \Sigma \text{Inv. }\Phi$$

wird. Man erhält aber analog § 5. pag. 4:

$$\frac{23}{42}(f_k f)^4 \cdot k + 2((f_k f)^3 k)_1 + \frac{12}{5}((f_k f)^2 k)_2 + 4((f_4 f)^1 k)_3 + f_k^2 = f_{kk} \cdot f$$

und nach Formel (1) § 3.:

$$H_k + \frac{18}{11} i_2 + \frac{5}{42} k^2 = (f_k f)^2,$$

so dass wir der Reihe nach die Beziehungen haben:

$$((f_k f)^2 k)_2 \equiv \Sigma(J + F + K + \Sigma \text{Inv. }\Phi),$$

$$((f_k f)^3 k)_1 = [(ak)^4 (ab)^3 a_x b_x^5, k]_1 = \Sigma(J + K + \text{Inv. }\Phi)$$

und endlich

$$\text{(I)} \qquad H_\Delta \equiv \Sigma(J + F + K + \Sigma \text{Inv. }\Phi + f_k \cdot f_k).$$

Da aber, wie ohne Weiteres einleuchtet, die Relationen bestehen:

$$(f_k, f_k)^2 = (ab)^2 (ak)^4 (bk')^4 a_x^2 b_x^2 = H_{kk} + \Sigma J + \Sigma K + \Sigma \text{Inv. }\Phi$$
$$= \Sigma(J + K + \text{Inv. }\Phi)$$

$$(f_4, f_k)^4 = (ab)^4 (ak)^4 (bk')^4 = \Sigma(i_{kk} + J + K + \text{Inv. }\Phi),$$

so ist ferner auch

$$\text{(II)} \qquad (H_\Delta \Delta^\alpha)^\beta \text{ und } (H_\Delta k^\alpha)^\beta \equiv \Sigma(J + K + \text{Inv. }\Phi).$$

Hiermit fallen auch analog dem vorigen Paragraphen alle Formen:

$$(H_\Delta \mathrm{T})^{4+i}, \quad (H_{\Delta\Delta} \mathrm{T})^\alpha$$

fort.

Es ist ferner:

$$H^{III} = (H_3 k)_2 - \frac{4}{5}(H_4 k),$$

und wegen des obigen Ausdruckes für H_3

$$(H_3, k)_2 = \frac{1}{2}((f_k f)^1 k)^2 - \frac{7}{22}(i_1 k)_2,$$

d. i.

$$H^{III} \equiv \Sigma(J + K + \text{Inv. }\Phi) + ((f_k f)^1 k)^2.$$

Der Entwickelung von $((f_k i)^1 k)_2$ (§ 5., pag. 44) entsprechend, ist aber:

$$((f_k f)^1 k)_2 + \frac{6}{5}((f_k f)_2 k)_1 + \frac{1}{2}(f_k f)_3 \cdot k + f_k \cdot f_3 = (f_k k)_3 \cdot f$$

und da für

$$(f_k f)_2 = H_k - \frac{18}{11} i_2 - \frac{5}{42} K^2,$$
$$(f_k f)_3 \equiv J + K + \text{Inv.}\ \Phi$$

gesetzt werden darf, so ist endlich

$$(H\Delta)^3 \equiv \Sigma(J + K + \text{Inf.}\ \Phi) + f_k \cdot f_3 + f_{k,3} \cdot f$$

und hiermit auszulassen.

§ 12.

$(\varphi\mathsf{T})^2$, $(\varphi\mathsf{T})^3$ und $(\varphi_\Delta\Delta)^1$.

Es bestehen die Polarenentwickelungen:

$$k_x{}^4\Delta_y{}^4 = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} (k\Delta)^i{}_{y^{4-i}}(xy)^i,$$

$$\Delta_x{}^4 k_y{}^4 = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} (\Delta k)^i{}_{y^{4-i}}(xy)^i,$$

aus welchen die Gleichungen folgen:

$$k \cdot (\varphi\Delta)^4 = (k\cdot\Delta, \varphi)^4 - 2(\mathsf{T}\varphi)^3 + \frac{2}{7} C \cdot \varphi_2 + \frac{1}{5} D \cdot \varphi,$$

$$\Delta \cdot (\varphi k)^4 = (k\cdot\Delta, \varphi)^4 + 2(\mathsf{T}\varphi)^3 + \frac{2}{7} C \cdot \varphi_2 + \frac{1}{5} D \cdot \varphi$$

oder:

(1) $$k \cdot \varphi_\Delta - \Delta \cdot \varphi_k = 4(\varphi\mathsf{T})^3.$$

Ebenso folgen aus den Polarenentwickelungen:

$$k_x{}^4\Delta_y{}^3\Delta_x = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{3}{i}}{\binom{9-i}{i}} (k\Delta)^i{}_{y^{3-i}}(xy)^i,$$

$$\Delta_x{}^4 k_y{}^3 k_x = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{3}{i}}{\binom{9-i}{i}} (\Delta k)^i{}_{y^{3-i}}(xy)^i$$

die Relationen:

$$-k \cdot \varphi^{III} = (k\cdot\Delta, \varphi)^3 - \frac{3}{2}(\mathsf{T}\varphi)^2 + \frac{1}{7} C(k\varphi)_1,$$

$$-\Delta \cdot \varphi_3 = (k\cdot\Delta, \varphi)^3 + \frac{3}{2}(\mathsf{T}\varphi)^2 + \frac{1}{7} C(k\varphi)_1$$

das ist:

(2) $$3(\varphi\mathsf{T})_2 = k \cdot \varphi^{III} - \Delta \cdot \varphi_3.$$

Es zerfallen demnach alle zweiten und dritten Ueberschiebungen von T mit jeder beliebigen Form φ, deren Ordnung resp. höher als 4 oder 3 ist.

Aus den Formeln (2) und (5) des § 2. folgt

$$(\Delta \varphi_{\Delta})^1 = (\varphi_{\Delta,2} k)_1 - \frac{m-6}{m-4} \varphi_{\Delta,3} \cdot k$$

und

$$\varphi_{\Delta,2} = 2(\varphi \mathsf{T})^5 + \varphi_k^{II},$$

oder

$$(\Delta \varphi_{\Delta})^1 = 2[(\varphi \mathsf{T})^5 k]_1 + (\varphi_k'' \cdot k)_1 - \frac{m-6}{m-4} \varphi_{\Delta,3} \cdot k.$$

Ebenso findet man aber auch:

$$\varphi_k'' = -\frac{2}{3} (\varphi_{k,3} k)_1 + \frac{2}{3} \frac{m-7}{m-5} \varphi_{kk} \cdot k - \frac{1}{6} C \varphi_k,$$

und es wird mithin:

$$\text{(I)}\quad (\Delta \varphi_{\Delta})' = 2[(\varphi \mathsf{T})^5 k]_1 - \frac{2}{3} [(\varphi_{k,3} k)^1 k]^1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{m-7}{m-5} [(\varphi_{kk} \cdot k), k]_1 - \frac{1}{6} C(\varphi_k k)^1 - \frac{m-6}{m-4} \varphi_{\Delta,3} \cdot k.$$

Nach einer bekannten Formel (Clebsch: binäre Formen pag. 117) ist aber

$$((\varphi_{k,3} k)^1 k)^1 = \frac{m-10}{2(m-4)} k \cdot (\varphi_{k,3} k)^2 - \frac{1}{2} (\varphi_{k,3} \Delta - k \cdot (\varphi_{k,3} k)^2)$$
$$= \frac{m-7}{m-4} k \cdot \varphi_{k,3,2} - \frac{1}{2} \Delta \cdot \varphi_{k,3}.$$

Das hier auftretende $\varphi_{k,3,2}$ ist leicht auf einfachere Formen zu reduciren; man erhält aus:

$$\begin{pmatrix} k & \varphi_k & k \\ 4 & m-4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \varphi_{k,3,2} = -\varphi_k''' + \frac{m-8}{m-6} \varphi_{kk1}$$

und hiermit

$$\text{(II)}\quad ((\varphi_{k3} k)^1 k)^1 = \frac{m-7}{m-4} \cdot k \cdot \left(\frac{m-8}{m-6} \varphi_{kk1} - \varphi_k'''\right) - \frac{1}{2} \Delta \cdot \varphi_{k3}.$$

Das in (I) auftretende $[(\varphi_{kk} \cdot k)k]_1$ verschwindet, sobald $m = 8$ ist; ist aber $m > 8$ [m ist hier selbstredend $\overline{\overline{>}}\, 8$], so liefert die Polarenbildung:

$$\text{(III)}\quad \varphi_{kk\,x}{}^{m-8} \cdot k_y k_x{}^3 = \sum \frac{\binom{m-8}{i}\binom{1}{i}}{\binom{m-3-i}{i}} \cdot (\varphi_{kk} k)^i_{y^{1-i}} \cdot (xy)^i,$$

$$(\varphi_{kk} \cdot k, k)_1 = \frac{m-8}{m-4} \varphi_{kk1} \cdot k.$$

Endlich ersetzen wir noch $\varphi_{\Delta,3}$ in (I) durch

$$\text{(IV)}\qquad (\varphi \mathsf{T})_6 + \varphi_k'''$$

und erhalten nunmehr:

$$\text{(V)}\quad (\Delta\varphi_\Delta)' = 2[(\varphi \mathsf{T})^5 k]_1 - \frac{2}{3}\,\frac{(m-7)(m-8)}{(m-4)(m-5)(m-6)}\,k\cdot\varphi_{kk1}$$
$$-\frac{1}{3}\,k\cdot\varphi_k''' + \frac{1}{3}\,\Delta\cdot\varphi_{k3} - \frac{1}{6}\,C\cdot\varphi_{k1} - \frac{m-6}{m-4}\,(\varphi\mathsf{T})^6\cdot k.$$

Aus $\begin{pmatrix} \mathsf{T} & \varphi & k \\ 6 & m & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ erhält man ferner mit Berücksichtigung der Formeln (1) § 2.:*)

$$\text{(VI)}\quad -[(\varphi\mathsf{T})^5 k]_1 + \frac{m-5}{m-4}\,(\varphi\mathsf{T})^6\cdot k = \frac{1}{2}\,(\Delta^2\varphi)^5 - \frac{C}{12}\,(k^2\varphi)^5$$
$$-\frac{5}{14}\,C\cdot\varphi''' + \frac{5}{14}\,D\cdot\varphi_3.$$

Aus den Polarenentwickelungen $k_x^3 k_y k_y'^4$ und $\Delta_x^3\Delta_y\Delta_y'^4$ erhält man aber auch:

$$\text{(VII)}\quad \begin{cases} \varphi_{k1} = (\varphi k^2)^5 + \frac{6}{7}\,\varphi''', \\ \varphi_\Delta^I = (\varphi\Delta^2)^5 + \frac{6}{7}\left(-\frac{C}{6}\,\varphi''' + \frac{D}{3}\,\varphi_3\right), \end{cases}$$

und endlich:

$$+[(\varphi\mathsf{T})^5 k]_1 - \frac{m-5}{m-4}\,(\varphi\mathsf{T})^6\cdot k = \frac{1}{2}\,\varphi_\Delta' + \frac{1}{14}\,C\cdot\varphi''' - \frac{1}{7}\,D\cdot\varphi_3$$
$$-\frac{1}{12}\,C\cdot\varphi_{k1} + \frac{1}{14}\,C\varphi''' + \frac{5}{14}\,C\varphi''' - \frac{5}{14}\,D\varphi_3,$$

oder

$$\text{(VIII)}\quad \varphi_\Delta^I = 2[(\varphi\mathsf{T})^5 k]_1 - \frac{m-5}{m-4}\,(\varphi\mathsf{T})^6\cdot k - \frac{1}{2}\,C\varphi'''$$
$$+\frac{1}{2}\,D\varphi_3 + \frac{1}{12}\,C\cdot\varphi_{k1}.$$

Verbinden wir hiermit die umgestellte Gleichung (V), so erhalten wir

$$\text{(IX)}\quad 2\cdot\varphi_\Delta^I = -\frac{1}{m-4}\,k\cdot(\varphi\mathsf{T})^6 + \frac{2}{3}\,\frac{(m-7)(m-8)}{(m-4)(m-5)(m-6)}\cdot k\cdot\varphi_{kk1}$$
$$+\frac{1}{3}\,k\cdot\varphi_k''' - \frac{1}{3}\,\Delta\cdot\varphi_{k3} + \frac{1}{4}\,C\cdot\varphi_{k1} - \frac{1}{2}\,C\cdot\varphi''' + \frac{1}{2}\,D\varphi_3.$$

Es zerfallen daher alle Formen $(\varphi\Delta)^4\,(\varphi\Delta')^1\,\varphi_x^{m-5}\,\Delta_x'^3$; f_Δ^I liefert z. B. ein Aggregat von Gliedern:

$$k\cdot(f\mathsf{T})^6;\quad k\cdot f_k''';\quad \Delta\cdot f_{k3};\quad C\cdot f_{k1};\quad C\cdot f''';\quad D\cdot f_3.$$

*) Anmerkung: In dem Abdruck ist durch ein Versehen an angeführtem Ort der Ausdruck von $(\Delta\mathsf{T})_3$ mit dem von $(k\mathsf{T})_3$ vertauscht worden; es ist demgemäss zu corrigiren:

$$(k\mathsf{T})_3 = -\frac{1}{4}\,C\Delta + \frac{1}{4}\,Dk.$$

Ein Versuch auf demselben oder ähnlichem Wege ein Zerfallen von φ_Δ^{II} zu zeigen, scheitert, weil die analogen Endgleichungen für φ_Δ^{II} diese Form und das entsprechende $[(f\mathrm{T})^6 k]_1$ mit denselben Coefficienten besitzen.

§ 13.

Die Invariante D und das reducirte System.

Wir erhalten aus $\begin{pmatrix} f & f & i \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$:

$$(Hi)^8 + \frac{18}{11}(ii')^6 + \frac{5}{42}(ki)^4 = ((fi)^6 f)^4,$$

oder mit Benützung der Relationen für $(ii')^6$ und $(fi)^6$:

$$(Hi)^8 + \frac{18}{11}\left(\frac{3}{7} i_k + \frac{4}{49}\Delta - \frac{1}{30}Ak\right) + \frac{5}{42} i_k = \frac{3}{14}(f_k f)^4.$$

$(f_k f)_4$ findet man aus $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ in der Form:

$$(f_k f)_4 = i_k + \frac{12}{7}\Delta + \frac{1}{5}Ak$$

und damit auch:

$$(Hi)^8 = -\frac{20}{33} i_k + \frac{18}{77}\Delta + \frac{15}{154}Ak.$$

Schieben wir nun die Identität (7) des § 2. achtmal über i, so geht diese über in:

$$\frac{3}{4}(Hk)^4 (Hi)^8 = \frac{14}{11}(i_2 i')^8 + \frac{1}{8}(k^2 i)^8 + \frac{1}{12}A(ii')^8 - \frac{1}{12}B^2.$$

Es ist aber

$$(i_2 i')^8 = (ik)^2 (ii')^6 (i'k)^2 = [(ii')^6 k]^4 = \frac{3}{7} i_{kk} + \frac{4}{49}D - \frac{1}{30}AC$$

und

$$(Hk)^4 (Hi)^8 = -\frac{20}{33} i_{kk} + \frac{18}{77}D + \frac{15}{154}AC.$$

Mit Hinzunahme der Relation für $(ii')^8$ des § 6. erhalten wir nunmehr:

$$D = \frac{63}{4} i_{kk} - \frac{7}{4}AC + \frac{7}{180}A^3 - \frac{7}{6}B^2.$$

Wir erhalten also mit Sylvester nur die 9 Invarianten:

$$C_2^0 = A = (ff)^8,\quad C_3^0 = B = (fi)^8,\quad C_4^0 = C = (kk)^4,\quad C_5^0 = f_{kk},$$
$$C_6^0 = i_{kk},\quad C_7^0 = f_{k\Delta},\quad C_8^0 = i_{k\Delta};\quad C_9^0 = f_{\Delta\Delta};\quad C_{10}^0 = i_{\Delta\Delta},$$

wenn wir mit C_i^k eine Covariante $i$ten Grades in den Coefficienten von f_x^8 und $k$ter Ordnung in x, also mit C_i^0 eine Invariante $i$ten Grades bezeichnen wollen. Das vollständige System ist nunmehr in folgender Tafel zusammenzufassen:

Ordnung.

Grad	0	2	4	6	8	10	12	14	18	Bemerkung
1	—	—	—	—	f	—	—	—	—	Sylvester hat
2	$(ff)^4$	—	k	—	i	—	H	—	—	respective:
3	$(fi)^4$	—	f_k	f_3	f_2	f_1	p	Θ	$T=(Hf)_1$	—
4	$(kk)^4$	—	Δ, i_k	i_3	i_2	H_3, i_1	H_2	H_1	$S=(Hi)_1$	—
5	f_{kk}	f_{k3}	f_{k2}, f_Δ	f_{k1}, f'''	f''	Θ_k, p_3, f'	—	p_1	—	—
6	i_{kk}	i_{k3}	i_{k2}, i_Δ	i_{k1}, i''', T	i''	i'	—	—	—	—
7	$f_{k\Delta}$	$f_k''', (f\mathsf{T})^6$	$f_k'', (f\mathsf{T})^5$	$f_k', (f\mathsf{T})^4$	—	—	—	—	—	3 Formen C_7^6
8	$i_{k\Delta}$	$i_k''', (i\mathsf{T})^6$	$i_k'', (i\mathsf{T})^5$	$i_k', (i\mathsf{T})^4$	—	—	—	—	—	—
9	$f_{\Delta\Delta}$	$(f_k\mathsf{T})^4, f_\Delta'''$	f_Δ''	—	—	—	—	—	—	3 Formen C_9^2
10	$i_{\Delta\Delta}$	$(i_k\mathsf{T})^4, i_\Delta'''$	i_Δ''	—	—	—	—	—	—	keine Form C_{10}^4
11	—	$(f_\Delta\mathsf{T})^4$	—	—	—	—	—	—	—	2 Formen C_{11}^2
12	—	$(i_\Delta\mathsf{T})^1$	—	—	—	—	—	—	—	—

§ 14.

Die streitigen Formen.

Aus vorstehender Zusammenstellung ergiebt sich, dass Sylvester's Abzählung bis auf 4 Fälle mit dem aufgestellten Formensystem übereinstimmt. Sylvester behauptet die Existenz von 3 Formen C_7^6 gegenüber den zwei angeführten f_k' und $(f\mathsf{T})^4$, von 3 Formen C_9^2 gegenüber den obigen f_Δ''' und $(f_k\mathsf{T})^4$; er besitzt keine Form C_{10}^4, er hält also i_Δ'' für zurückführbar und nimmt endlich neben $(f_\Delta\mathsf{T})^4$ noch eine weitere Form C_{11}^2 an. Eine einfache Abzählung ergiebt aber, dass die möglichen Formen C_7^6 die folgenden sind:

$$\Theta_{kk},\ p_{k3},\ f_k',\ f_{\Delta 1} \text{ und } (f\mathsf{T})^4.$$

In Folge der analog § 2. zu findenden Relation

$$f_{\Delta 1} - f_k' = 3(f\mathsf{T})^4$$

ist $f_{\Delta 1}$ auszulassen. Es bleiben also nur noch weiter möglich:

$$\Theta_{kk} \text{ und } p_{k3}.$$

Nach § 6. ist aber p_k durch ein Aggregat von Formen f'', $f_k \cdot k$, Cf, Bi, Af_2, $A^2 f$ ersetzbar oder von der Form:

$$\Sigma(F + \text{Inv. } \Phi).$$

Dies ist in Uebereinstimmung mit Sylvester, der nur eine Form C_5^8 zulässt, also ebenfalls eine lineare Relation von der Form

$$p_k \equiv f'' + \Phi \cdot \Psi$$

behauptet. Eine Abzählung ergiebt aber, dass die Producte $\Phi \cdot \Psi$ nur die angeführten sein können und dass mithin die Gleichung

$$p_k \equiv \Sigma(F + \text{Inv. } \Phi)$$

richtig ist. Es sind daher alle Formen mit dem symbolischen Factor $(pk)^4$ ebenfalls zweifellos von der Form

$$\Sigma(F + \text{Inv. } \Phi).$$

Es bleibt daher nur Θ_{kk} als weitere Form C_7^6 übrig. Wir wollen demgemäss noch einmal kurz den etwas zerstreut in mehreren Paragraphen enthaltenen Beweis von der Ersetzbarkeit von Θ_{kk} recapituliren. Es liefert $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f & i & \Delta \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ die Relationen:

$$\Theta_k + 2p_3 + \frac{21}{13}[(fi)^3 k]_2 + \frac{7}{11}[(fi)^4 k]_1 + \frac{7}{66}(fi)^5 \cdot k = (f_k i)_1$$

$$\Theta_\Delta + 2p''' + \frac{21}{13}[(fi)^3 \Delta]_2 + \frac{7}{11}[(fi)^4 \Delta]_1 + \frac{7}{66}(fi)^5 \cdot \Delta = (f_\Delta i)_1,$$

oder symbolisch:

$$\Theta_k \equiv p_3 + (f_k i)_1 + \Sigma F,$$
$$\Theta_\Delta \equiv p''' + (f_\Delta i)_1 + \Sigma F.$$

Aus diesen erhält man sofort die weitere:

$$\Theta_{kk} \equiv p_{3,4} + [(f_k i)_1 k]_1 + \Sigma F.$$

Nun liefern die Entwickelungen

$$\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die Relation:

$$\frac{169}{7}((if_k)^4 k)_1 + \frac{51}{4}((if_k)^3 k)_2 + ((if_k)^2 k)_3 = -\frac{2}{21}(i_k f_k)_1$$

und $\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ die ergänzende:

$$\frac{1}{14}((if_k)^4 k)_1 + \frac{1}{2}((if_k)^3 k)_2 + \frac{6}{5}((if_k)^2 k)_3 + ((if_k)^1 k)_4 = (i_k f_k)_1,$$

aus welchen sofort die Identität sich ergiebt:

$$((if_k)^1 k)_4 + \frac{117}{10}((if_k)^2 k)_3 + \frac{1075}{8}((if_k)^3 k)_2$$
$$+ \frac{1775}{7}((if_k)^4 k)_1 = 0.$$

Bedenken wir nun, dass alle aus $(fi)^{3+k}$ durch Ueberschiebung mit Formen K entstehende Ableitungen wegen der Relationen des § 1. Formen $F +$ Inv. Φ geben, und benützen wir weiter die aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ fliessende Beziehung

$$(f_k i)^2 \equiv p_4 + \Sigma F,$$

so geht die vorstehende Identität über in:

$$((if_k)^1 k)_4 \equiv p_{k,3} + \Sigma F \equiv \Sigma F$$

und erhalten endlich

$$\Theta_{kk} \equiv p_{3,4} + \Sigma F \equiv \Sigma F,$$

da wie oben § 10. bewiesen $p_{3,4} = \frac{3}{5} p_{k,3}$ gesetzt werden darf. Es sind daher alle durch Ueberschiebung von Θ_{kk} mit Formen K resultirende Ableitungen ebenfalls durch Formen F ersetzbar. Es bleiben daher als Formen C_7^6 nur f_k' und $(f\mathrm{T})^4$ übrig. Da auch ganz analog

$$\Theta_{\Delta\Delta} = p_\Delta''' + \Sigma F$$

erhalten wird, so folgt im Anschluss an § 11. auch die Reducirbarkeit aller Formen $(\Theta_{\Delta\Delta} K)$.

Die möglichen Formen C_9^2 sind:

$$\Theta_{kkk},\quad p_{kk2},\quad f_\Delta''',\quad (f_k\mathsf{T})^4,$$

von denen aber nach dem Vorhergehenden die beiden ersten wegzulassen sind. Von Formen C_{11}^2 existiren:

$$\Theta_{kkk2},\quad p_{kk}''',\quad (p_k\mathsf{T})_6,\quad (f_\Delta\mathsf{T})^4,$$

die sich sofort auf die eine Form $(f_\Delta\mathsf{T})^4$ reduciren. Wie schon oben bemerkt, ist es mir nicht gelungen die Form $C_{10}^4 = i_\Delta''$ zurückzuführen.

Mainz im August 1880.

Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks.

Von

H. Schubert in Hamburg.

§ 1.

Definition der Lagebedingungen und der invarianten Bedingungen beim Dreieck.

Das im Folgenden behandelte Gebilde besteht aus drei in fester Ebene befindlichen Punkten a, b, c (Ecken) und deren Verbindungsstrahlen α, β, γ (Seiten), so dass α und a, β und b, γ und c einander gegenüberliegen. Wir nennen dieses Gebilde, dessen Constantenzahl 6 ist, kurz „*Dreieck*", fassen es aber zugleich als Dreiseit auf, d. h., wir rechnen zu seinen wesentlichen Bestandtheilen ebenso gut seine 3 Seiten, wie seine 3 Ecken, was natürlich nur dann von Bedeutung wird, wenn zwei Ecken oder alle drei Ecken zusammenfallen. Nach den Bezeichnungsregeln des Bedingungskalküls*) bedeuten die eingeführten Symbole a, b, c resp. α, β, γ zugleich die einfachen Bedingungen, dass die Ecke a oder b oder c auf einer gegebenen Geraden liege, resp., dass die Seite α, β, γ durch einen gegebenen Punkt gehe. Durch Zusammensetzung dieser Bedingungen erhält man eine grosse Menge von Lagebedingungen höherer Dimension. Jede solche, dem Dreieck auferlegte i-fache Bedingung bedeutet, gemäss den Grundsätzen des Kalküls, zugleich auch die *Zahl* der Dreiecke, welche einem vorliegenden i-stufigen Systeme angehörig, jene i-fache Bedingung erfüllen.

Da jede Ecke zweien Seiten *incident* ist, so gelten zunächst die folgenden 6 Gleichungen, welche aus der Incidenzformel für Punkt und Strahl (Kalkül, pag. 25) resultiren:

---

*) Man vergleiche wegen dieser Bezeichnungsregeln und wegen des *Rechnens* mit Bedingungssymbolen entweder meine Abhandlung in Bd. X der Math. Ann. (pag. 1 bis 116, Abschnitte I, II, III) oder meinen bei Teubner 1879 erschienenen „Kalkül der abzählenden Geometrie", ein Buch, das ich kurz mit „Kalkül" citiren werde.

$$a\beta = a^2 + \beta^2, \qquad a\gamma = a^2 + \gamma^2,$$
$$b\gamma = b^2 + \gamma^2, \qquad b\alpha = b^2 + \alpha^2,$$
$$c\alpha = c^2 + \alpha^2, \qquad c\beta = c^2 + \beta^2.$$

Hieraus erhält man durch Multiplication mit den Bedingungen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ viele andere Formeln, z. B.

$$a^2\beta = a\beta^2, \quad cb\alpha = cb^2 + c\alpha^2 = bc^2 + b\alpha^2,$$
$$b^2c^2 = bc\alpha^2, \quad a^2b^2c - a^2b^2\alpha = a^2bc^2 - a^2c^2\alpha,$$
$$a^2b^2\alpha + b^2c^2\beta + c^2a^2\gamma = a^2c^2\alpha + b^2a^2\beta + c^2b^2\gamma.$$

Umformungen, welche nur auf einer derartigen Benutzung der Incidenzformel für Punkt und Strahl beruhen, sollen im Folgenden immer ohne besondere Begründung angestellt werden.

Zu den eingeführten 6 einfachen Lagebedingungen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ gesellen sich 5 einfache *invariante* Bedingungen, das sind Bedingungen, welche verlangen, dass das Dreieck *ausgeartet* sei. Ausgeartet ist ein Dreieck, wenn es die allgemeine Definition des Dreiecks erfüllt, aber Ecken oder Seiten besitzt, die zu einander nicht allgemein, sondern unendlich nahe liegen. Man gewinnt die Beschreibung der Ausartungen des Dreiecks leicht durch homographische Abbildung aus dem allgemeinen Dreieck oder auch durch Specialisirung der einer Curve ein- oder umbeschriebenen Dreiecke. Betrachtet man z. B. das dreistufige System aller einer Curve einbeschriebenen Dreiecke, so erkennt man sofort, dass dieses System ein zweistufiges System von solchen Dreiecken enthält, bei denen die drei Ecken in gerader Linie liegen. Man gelangt daher zu folgender Definition:

I. *Die Ausartung ε besteht aus einem Strahle g, welcher zugleich als Seite α, Seite β und Seite γ aufzufassen ist, und auf welchem irgendwie die Ecken a, b, c liegen.*

Durch duale Uebertragung erhält man aus dieser Definition die folgende:

II. *Die Ausartung τ besteht aus einem Punkte s, welcher die Ecken a, b, c so in sich vereinigt, dass die 3 Seiten α, β, γ drei durch s hindurchgehende Strahlen sind.*

Zu einer dritten Ausartungsdefinition gelangt man, wenn man von drei auf einer Curve liegenden Punkten zwei unendlich nahe legt. Da der dritte Punkt dann noch jede beliebige Lage auf der Curve haben kann, so bilden alle möglichen Tripel von solchen Punkten ein zweistufiges System von ausgearteten, einbeschriebenen Dreiecken mit folgender Definition.

III. *Die Ausartung ϑ_a besteht aus einem Strahle g, in welchem die Seiten β und γ unendlich nahe liegen, und aus einem auf g liegenden*

Punkte s, in welchem die Ecken b und c unendlich nahe liegen; dabei liegt die Ecke a irgendwo auf g, und der Strahl α ist irgend ein Strahl durch s. Diese Dreiecksausartung geht durch duale Umwandlung in sich selbst über.

IV. und V. *Die Ausartungen ϑ_b und ϑ_c sind ϑ_a analog,**) d. h. sie gehen aus ϑ_a durch cyklische Vertauschung der Buchstaben $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ hervor.

Jede der eben aufgestellten 5 Ausartungsdefinitionen erniedrigt die Constantenzahl 6 des Dreiecks um 1, d. h. sie erzeugt eine *einstufige Ausartung* und eine *einfache* Ausartungsbedingung, oder, was dasselbe ist, von derartig ausgearteten Dreiecken giebt es in einem einstufigen Dreieckssysteme eine endliche Anzahl, in einem i-stufigen Systeme ∞^{i-1}.

Wir setzen nun fest, dass jedes der 5 eben eingeführten Ausartungssymbole

$$\varepsilon, \ \tau, \ \vartheta_a, \ \vartheta_b, \ \vartheta_c$$

zugleich auch die einfache *Bedingung* bedeute, dass ein Dreieck in der angegebenen Weise ausarten soll. Ferner sollen die bei der Beschreibung der Ausartungen benutzten Buchstaben für Punkte und Strahlen zugleich die zugehörigen einfachen Grundbedingungen bedeuten; und zwar haben s und g bei den verschiedenen Ausartungen auch verschiedene Bedeutung. Wir wollen nämlich immer mit s denjenigen Punkt einer Ausartung bezeichnen, in welchem zwei oder drei Ecken vereinigt liegen, und mit g denjenigen Strahl, in welchem zwei oder drei Seiten vereinigt liegen. Es ist also z. B.

$$\varepsilon g \text{ identisch mit } \varepsilon\alpha \text{ oder } \varepsilon\beta \text{ oder } \varepsilon\gamma,$$
$$\vartheta_a s \text{ identisch mit } \vartheta_a b \text{ oder } \vartheta_a c.$$

Ferner bedeuten z. B.

τs^2 die dreifache Bedingung, dass ein Dreieck seine drei Ecken in einem gegebenen Punkte vereinigen soll;

$\varepsilon a^2 g \equiv \varepsilon a g^2$ die vierfache Bedingung, dass die drei Ecken in einer gegebenen geraden Linie liegen sollen, und dabei die Ecke a in einen gegebenen Punkt fallen soll;

$\vartheta_a \alpha^2 g^2$ die fünffache Bedingung, dass das Dreieck die Definition von ϑ_a erfülle, und dass der Strahl α sowohl wie auch der Coincidenzstrahl g gegeben sei.

Die Zusammensetzung von *zwei* oder mehr Ausartungsbedingungen mit einander schliessen wir aus.

---

*) Ueberhaupt wollen wir hier einander „analog“ solche Definitionen, Bedingungen und Formeln nennen, welche aus einander durch cyklische Vertauschung von $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ hervorgehen.

Zweistufige Ausartungen, d. h. solche, welche seine Constantenzahl 6 um 2 zu erniedrigen vermögen, erhalten wir wieder sehr leicht durch Betrachtung des dreistufigen Systems aller einer Curve einbeschriebenen Dreiecke. Dieses System enthält ein einstufiges System von Dreiecken, deren jedes auf einer Tangente durch die beiden im Berührungspunkte unendlich nahen Curvenpunkte und einen der sonstigen Schnittpunkte gebildet wird. Daher können wir die folgenden Definitionen aussprechen.

VI. *Die Ausartung ω_a ist eine Ausartung ε, bei welcher die Ecken b und c in einem Punkte s unendlich nahe liegen. ω_a ist aber nicht bloss als eine specielle ε, sondern auch als eine specielle ϑ_a anzusehen.*

VII. und VIII. *Die Ausartungen ω_b und ω_c sind ω_a analog.*

IX., X., XI. *Die Ausartungen ω_α, ω_β, ω_γ gehen aus ω_a durch duale Umwandelung hervor.*

Eine siebente, zweistufige Ausartung erhalten wir durch Betrachtung aller derjenigen einer Curve einbeschriebenen Dreiecke, deren drei Ecken drei aufeinanderfolgende unendlich nahe Punkte sind. Auch solche Dreiecke bilden ein in dem dreistufigen Systeme liegendes, einstufiges System. Daher:

XII. *Die Ausartung ψ besteht aus einem einzigen Punkte s, dem die drei Ecken unendlich nahe liegen, und aus einem einzigen durch s gehenden Strahle g, dem die drei Seiten unendlich nahe liegen, jedoch so, dass die drei Ecken im Allgemeinen nicht in gerader Linie, sondern wie drei aufeinanderfolgende Punkte einer Curve liegen, und dass die drei Seiten sich im Allgemeinen nicht in demselben Punkte schneiden. Daher darf ψ als eine specielle ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c, nicht aber als eine specielle ε oder τ angesehen werden.* Ein Dreieck ψ ist also durch die Lage seines Strahls g und seines Punktes s noch nicht hinreichend bestimmt. Es muss zu seiner vollkommenen Bestimmung noch eine einfache Bedingung hinzutreten, welche ausspricht, mit welcher *Krümmung* a, b, c einander unendlich nahe liegen, also etwa die einfache Bedingung, dass die drei Ecken auf ψ drei consecutive Punkte eines der ∞^2 Kegelschnitte sein sollen, die durch 3 gegebene Punkte gelegt werden können, oder die metrische Bedingung, dass der Radius des durch die drei Ecken von ψ gehenden Kreises eine gegebene Länge habe. Ein zu der zweistufigen Ausartung ψ specialisirtes Dreieck wollen wir kurz *unendlich kleines* Dreieck nennen. Beim Viereck erhält man eine analoge, aber dreistufige Ausartung, beim n-Eck eine analoge, $(n-1)$-stufige Ausartung.

Eine *dreistufige* Ausartung des Dreiecks erkennt man bei dem dreistufigen Systeme der einer Curve einbeschriebenen Dreiecke in jedem Wendepunkte, wo drei aufeinanderfolgende, unendlich nahe Curvenpunkte in gerader Linie liegen. Also:

XIII. *Die dreistufige Ausartung* η *ist eine Ausartung* ε, *bei welcher alle drei Ecken* a, b, c *auf dem Strahle* g *in dem Punkte* s *unendlich nahe liegen.* η *ist specieller Fall von* ω_a, *von* ω_b, *von* ω_c *und von* ψ, *nicht aber von* ω_α, ω_β, ω_γ.

Durch duale Umwandlung erhält man aus η eine zweite, dreistufige Ausartung ζ mit folgender Definition.

XIV. *Die dreistufige Ausartung* ζ *ist eine Ausartung* τ, *bei welcher die drei sich in* s *schneidenden Seiten* α, β, γ *einander im Strahle* g *unendlich nahe liegen.* ζ *ist also specieller Fall von* ω_α, ω_β, ω_γ, ψ, *nicht aber von* ω_a, ω_b, ω_c. Ein Dreieck ζ bilden also z. B. die drei in einem Rückkehrpunkte berührenden, unendlich nahen Tangenten.

Die zweistufigen und die dreistufigen Ausartungsbedingungen setzen wir ebenso wie die einstufigen mit allen möglichen Lagebedingungen zusammen. Z. B. bedeutet ψg die dreifache Bedingung, dass ein Dreieck ein unendlich kleines werde, und dabei seinen Strahl g durch einen gegebenen Punkt schicke.

Bei einer analytischen Ableitung der Ausartungen des Dreiecks findet man ausser den oben definirten noch andere Ausartungsbedingungen, welche dadurch hervorgerufen werden, dass die oben nur als zweistufig erkannten Ausartungen auch bei gewissen, *einstufigen* Systemen in endlicher Anzahl vorkommen können, und dass überhaupt i-stufige Dreieckssysteme denkbar sind, welche von oben k-stufig genannten Ausartungen nicht ∞^{i-k}, sondern ∞^r enthalten, wo $r > i-k$ ist. Ein Beispiel bietet das zweistufige System aller Dreiecke, welche immer durch je zwei Punkte b und c einer festen Curve und den Schnittpunkt a der in b und in c berührenden Tangenten γ und β gebildet werden (§ 9.). Zu diesem Dreieckssysteme gehören nicht bloss die ∞^1 Dreiecke ε, welche durch einen ganz beliebigen Punkt a einer Doppeltangente und deren beide Berührungspunkte b und c erzeugt werden, sondern auch diejenigen ∞^1 Dreiecke, welche durch einen ganz beliebigen Punkt a einer Wendetangente und deren beide unendlich nahe gerückte Berührungspunkte gebildet werden. Solche Dreiecke erfüllen aber die oben für die zweistufige Ausartung ω_a aufgestellte Definition. Trotzdem müssen sie aber als einstufig betrachtet werden, weil von ihnen ∞^1 in einem zweistufigen Dreieckssysteme liegen. Ebenso ergeben die Rückkehrpunkte ein einstufiges System von Ausartungen, welche die Definition von ω_a erfüllen. Endlich ist auch in jedem Curvenpunkte eine die Definition von ψ erfüllende Ausartung erzeugt.

Derartige Ausartungen, welche die Definition einer oben k-stufig genannten Ausartung erfüllen, aber nicht k-stufig genannt werden dürfen, weil von ihnen ein i-stufiges Dreieckssystem nicht ∞^{i-k}, sondern ∞^r enthält, wo $r > i-k$ ist, wollen wir *Halphen'sche Aus-*

artungen nennen; ferner soll jedes System, welches irgend eine Halphen'sche Ausartung enthält, ein „*Halphen'sches System*“, und jedes System, welches von solchen Ausartungen ganz frei ist, ein „*gewöhnliches System*“ heissen. Die Wahl dieser Namen ist durch die Untersuchungen des Herrn Halphen über Kegelschnittcharakteristiken hervorgerufen. Herr Halphen war es nämlich, welcher zuerst (cf. Proc. of the London Math. Soc., vol. IX, Math. Ann. Bd. XIV) darauf aufmerksam gemacht hat, dass, um in unserer Terminologie zu reden, einstufige Kegelschnittsysteme denkbar sind, welche eine Ausartung enthalten, die scheinbar die Constantenzahl 3, nicht 4 hat, und in Wirklichkeit die letztere dadurch bekommt, dass die Differenz der Ordnungen der durch die Coincidenz hervorgerufenen unendlich kleinen Grössen jede beliebige Zahl sein kann. Diese von Halphen aufgefundene Kegelschnittausartung lässt sich nämlich so definiren. Ihre Punkte bilden zwei einer einzigen Geraden g unendlich nahe Geraden, ihre Tangenten zwei Strahlbüschel, deren Scheitel einem auf der Geraden g liegenden Punkte s unendlich nahe liegen. Das aus der Geraden g und dem Punkte s bestehende Gebilde, welches für sich ja die Constantenzahl 3 hat, bestimmt aber die Kegelschnittausartung noch nicht vollständig. Wenn man nämlich mit d die unendlich kleine Strecke bezeichnet, welche die Kegelschnittausartung auf einer beliebigen Geraden ausschneidet, und mit δ den unendlich kleinen Winkel bezeichnet, den zwei von einem beliebigen Punkte ausgehende Tangenten mit einander bilden, so giebt es immer eine rationale Zahl h, für welche der Bruch $\frac{d^h}{\delta}$ einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth hat. Betrachtet man dann die Kenntniss der Zahl h als für die Definition der Halphen'schen Kegelschnittausartung wesentlich, so gewinnt dieselbe die Constantenzahl 4. Wie Herr Halphen nachgewiesen hat, gilt der bekannte, von Clebsch in den Math. Ann. Bd. VI, von Lindemann in Clebsch's Vorl. p. 398 und vom Verfasser im Verein mit Hurwitz in den Gött. Nachr. von 1876 bewiesene Chasles'sche Satz $\alpha \cdot \mu + \beta \cdot \nu$ nur für solche einstufige Kegelschnittsysteme, welche die Halphen'sche Ausartung *nicht* enthalten. Diese Voraussetzung ist also jenen Beweisen hinzuzufügen.*) Herrn Halphen ist es, zunächst für den Fall des einstufigen und vierstufigen Systems, gelungen, die Zahl der gemeinsamen Kegelschnitte zweier Systeme auch in dem Falle zu bestimmen, wo die Systeme die erwähnte Ausartung enthalten. Dann ist man aber auf analytische Untersuchungen angewiesen, und opfert der Allgemeinheit der Systeme

*) Ich sprach dies schon im Bulletin de la Soc. math., tome VIII, p. 61 aus mit Rücksicht auf § 38. meines Kalküls, wo der Beweis aus den Gött. Nachr. wiederholt ist.

die Einfachheit der Ableitung und der Darstellung der gesuchten Zahl nach der Analogie des Bezout'schen Satzes von der Zahl der Schnittpunkte zweier Curven.

Ebenso ist es beim Dreieck. Die Nichtberücksichtigung von Halphen'schen Systemen macht es möglich, eine Reihe von Formeln zwischen Lagebedingungen und invarianten Bedingungen aufzustellen (§ 2.), und auch die Zahl der zwei Dreieckssystemen gemeinsamen Dreiecke als Summe von Producten je zweier den Systemen angehörigen Anzahlen auf einfachste Weise zu bestimmen (§ 3.). *Deshalb wird es gerechtfertigt erscheinen, wenn bei dieser ersten anzahlgeometrischen Behandlung des Dreiecks Halphen'sche Systeme ausgeschlossen werden. Den folgenden Betrachtungen ist daher, ausser, wenn das Gegentheil ausdrücklich gesagt ist*), stets die Voraussetzung hinzuzufügen, dass die Systeme, auf welche die Formeln bezogen werden, gewöhnliche Systeme sind.*

Damit ist nicht gesagt, dass nicht gewisse der folgenden Formeln für gewisse Halphen'sche Systeme doch richtig sind, oder wenigstens bei richtiger Deutung der Symbole auf solche Systeme anwendbar sind; nur wollen wir, der Einfachheit wegen, bei der Ableitung der Formeln auf solche Anwendbarkeit keine besondere Rücksicht nehmen.

§ 2.

Gleichungen zwischen den in § 1. definirten Bedingungen.

A. Gleichungen erster Dimension.

In § 1. sind für das Dreieck 6 einfache Lagebedingungen

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

und 5 einfache Ausartungsbedingungen

$$\varepsilon,\ \tau,\ \vartheta_a,\ \vartheta_b,\ \vartheta_c$$

definirt. Zwischen diesen 11 Bedingungen bestehen 4 von einander unabhängige Gleichungen, welche wir leicht durch die Coincidenzformel erster Dimension für Punktepaare erhalten können. Wir setzen nämlich ein beliebiges gewöhnliches, einstufiges System allgemeiner Dreiecke voraus, und fassen auf jedem Dreiecke dieses Systems die Ecke b und die Ecke c zu einem Punktepaar zusammen. Dann erhalten wir eine Coincidenz der beiden Ecken b und c auf jedem Dreieck des Systems, welches entweder nach der Definition von τ (§ 1., Nr. II) oder nach der Definition von ϑ_a (§ 1., Nr. III) ausgeartet ist. Daher kommt:

$$(1) \qquad b + c - \alpha = \tau + \vartheta_a .$$

---

*) Wie in § 9.

Der Formel (1) sind analog:

(2) $$c + a - \beta = \tau + \vartheta_b,$$

(3) $$a + b - \gamma = \tau + \vartheta_c.$$

Die dual entsprechende Betrachtung liefert:

(4) $$\beta + \gamma - a = \varepsilon + \vartheta_a,$$

(5) $$\gamma + \alpha - b = \varepsilon + \vartheta_b,$$

(6) $$\alpha + \beta - c = \varepsilon + \vartheta_c.$$

Subtrahirt man nun (4) von (1), (5) von (2), (6) von (3), so erhält man jedes Mal eine und dieselbe Gleichung, nämlich:

(7) $$a + b + c - \alpha - \beta - \gamma = \tau - \varepsilon.$$

Daraus geht hervor, dass diese Gleichungen nur 4 von einander unabhängige Gleichungen repräsentiren. Es ist überhaupt unmöglich, irgend eine der Bedingungen ε, τ, ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c durch a, b, c, α, β, γ allein auszudrücken (§ 4.).

Aus den obigen Gleichungen erhält man ferner die 3 Gleichungen:

(8) $$a + \alpha = \varepsilon + \tau + \vartheta_b + \vartheta_c,$$

(9) $$b + \beta = \varepsilon + \tau + \vartheta_c + \vartheta_a,$$

(10) $$c + \gamma = \varepsilon + \tau + \vartheta_a + \vartheta_b,$$

welche man auch geometrisch gewinnen kann, wenn man fragt, bei wieviel Dreiecken des zu Grunde gelegten einstufigen Systems eine Ecke auf die Gegenseite fällt (Kalkül, p. 83).

Aus den eben aufgestellten Gleichungen erster Dimension erhält man durch Multiplication mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, durch gelegentliche Benutzung der Incidenzformeln und durch zweckmässige Eliminationen eine grosse Reihe von Gleichungen höherer Dimension, welche wieder für alle gewöhnlichen Systeme gültig sind. Man kann viele derselben auch direct erkennen, wenn man die allgemeinen Punktepaar- und Strahlenpaarformeln benutzt, welche ich in den Math. Ann. Bd. X und im Kalkül (p. 44, 45, 62, 63) aufgestellt habe. Der Kürze wegen erwähnen wir nur diejenigen Gleichungen, welche im Folgenden vorzugsweise zur Anwendung gelangen. Ferner schreiben wir von solchen Gleichungen, die durch cyklische Vertauschung aus einander hervorgehen, immer nur eine. Zu den so abgeleiteten Gleichungen i-ter Dimension gesellen wir dann immer noch diejenigen, welche die in § 1. definirten, höheren Ausartungsbedingungen enthalten.

B. Gleichungen zweiter Dimension.

Aus den Gleichungen erster Dimension erhält man leicht:

(11) $$bc = a^2 + \tau s + \vartheta_a s,$$

(12) $$\beta\gamma = a^2 + \varepsilon g + \vartheta_a g,$$

(13) $\varepsilon a = a^2 + a\alpha - \tau s - \vartheta_b s - \vartheta_c s,$

(14) $\tau\alpha = \alpha^2 + a\alpha - \varepsilon g - \vartheta_b g - \vartheta_c g,$

(15) $\vartheta_a a = a(b + c - \alpha - \tau)$

$= \beta^2 + \gamma^2 - a\alpha + \vartheta_b s + \vartheta_c s + \tau s,$

(16) $\vartheta_a \alpha = b^2 + c^2 - a\alpha + \vartheta_b g + \vartheta_c g + \varepsilon g.$

Bei diesen Formeln erscheinen rechts nur die Bedingungen

$$a^2,\ b^2,\ c^2,\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2,\ a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ \tau s,\ \varepsilon g,$$
$$\vartheta_a s,\ \vartheta_a g,\ \vartheta_b s,\ \vartheta_b g,\ \vartheta_c s,\ \vartheta_c g.$$

Durch diese 17 Bedingungen lassen sich schliesslich auch die in § 1. definirten Bedingungen:

$$\omega_a,\ \omega_b,\ \omega_c,\ \omega_\alpha,\ \omega_\beta,\ \omega_\gamma,\ \psi$$

ausdrücken. Zu diesem Zweck beachten wir, dass die Ausartung ω_a sowohl eine Ausartung ε ist, bei welcher b und c coincidiren, wie auch eine Ausartung ϑ_a ist, bei welcher α und g coincidiren, und ferner, dass ψ eine Ausartung ϑ_a ist, bei welcher sowohl α und g, wie auch a und s unendlich nahe liegen. Demgemäss geben die Coincidenzformeln:

(17) $\omega_a = \varepsilon b + \varepsilon c - \varepsilon g,$

(18) $\omega_\alpha = \tau\beta + \tau\gamma - \tau s,$

(19) $\omega_a + \psi = \vartheta_a \alpha + \vartheta_a g - \vartheta_a s,$

(20) $\omega_\alpha + \psi = \vartheta_a a + \vartheta_a s - \vartheta_a' g.$

Nun substituiren wir für εb, εc, $\tau\beta$, $\tau\gamma$, $\vartheta_a\alpha$, $\vartheta_a a$ die aus den Formeln (13) bis (16) resultirenden Werthe. Dann erhalten wir schliesslich:

(21) $\omega_a = b^2 + c^2 + b\beta + c\gamma - 2\cdot\tau s - \varepsilon g - 2\cdot\vartheta_a s - \vartheta_b s - \vartheta_c s,$

(22) $\omega_\alpha = \beta^2 + \gamma^2 + b\beta + c\gamma - 2\cdot\varepsilon g - \tau s - 2\cdot\vartheta_a g - \vartheta_b g - \vartheta_c g,$

und mit Benutzung von (21) oder (22):

(23) $\psi = \vartheta_a g + \vartheta_b g + \vartheta_c g + \vartheta_a s + \vartheta_b s + \vartheta_c s$

$- a\alpha - b\beta - c\gamma + 2\cdot\tau s + 2\cdot\varepsilon g.$

Der Umstand, dass diese Formel für die sich selbst duale Bedingung ψ durch duale Umwandlung in sich selbst übergeht, liefert eine Controle der Rechnung.

C. Gleichungen dritter Dimension.

Aus den Gleichungen erster Dimension erhält man zunächst:

(24) $b^2 c = b^2 \alpha + \tau s^2 + \vartheta_a s^2,$

(25) $b c^2 = c^2 \alpha + \tau s^2 + \vartheta_a s^2,$

(26) $\beta^2 \gamma = a^2 \beta + \varepsilon g^2 + \vartheta_a g^2,$

(27) $\beta \gamma^2 = a^2 \gamma + \varepsilon g^2 + \vartheta_a g^2,$

(28) $a^2\alpha = \tau s^2 + \varepsilon a^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2,$

(29) $a\alpha^2 = \varepsilon g^2 + \tau\alpha^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2,$

(30) $\vartheta_a s a = abc - \varepsilon g^2 - \tau s^2 - \tau\alpha^2 - \vartheta_b g^2 - \vartheta_c g^2,$

(31) $\vartheta_a g\alpha = \alpha\beta\gamma - \tau s^2 - \varepsilon g^2 - \varepsilon a^2 - \vartheta_b s^2 - \vartheta_c s^2,$

(32) $\vartheta_a a^2 = a^2\beta + a^2\gamma - \varepsilon a^2,$

(33) $\vartheta_a\alpha^2 = b^2\alpha + c^2\alpha - \tau\alpha^2,$

(34) $\vartheta_a a\alpha = b^2\gamma + c^2\beta + \tau s^2 + \varepsilon g^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2.$

Dazu fügen wir noch zwei Formeln für ψs und für ψg, welche aus (23) hervorgehen, wenn man dafür sorgt, dass wieder nur die eben rechts erschienenen Symbole auftreten.

(35) $\psi s = abc - \tau\alpha^2 - \tau\beta^2 - \tau\gamma^2 - 2\cdot\tau s^2 - \varepsilon g^2 - \vartheta_a g^2 - \vartheta_b g^2 - \vartheta_c g^2,$

(36) $\psi g = \alpha\beta\gamma - \varepsilon a^2 - \varepsilon b^2 - \varepsilon c^2 - 2\cdot\varepsilon g^2 - \tau s^2 - \vartheta_a s^2 - \vartheta_b s^2 - \vartheta_c s^2.$

Um auf die in § 1. definirten, dreifachen Ausartungsbedingungen η und ζ zu kommen, beachten wir, dass η eine ω_a ist, bei welcher auch s und a unendlich nahe liegen, und dass ζ eine ω_a ist, bei welcher auch g und α unendlich nahe liegen. Wir erhalten dementsprechend:

(37) $$\eta = \omega_a s + \omega_a a - \omega_a g,$$

(38) $$\zeta = \omega_a g + \omega_a\alpha - \omega_a s,$$

woraus sich mit Benutzung von (21) und (22) und nach einigen aus (24) bis (34) folgenden Substitutionen, schliesslich ergiebt:

(39) $$\eta = a^2\beta + a^2\gamma + b^2\gamma + b^2\alpha + c^2\alpha + c^2\beta - 3.abc + 6\cdot\tau s^2 + 2\cdot\tau\alpha^2 + 2\cdot\tau\beta^2 + 2\cdot\tau\gamma^2 - \varepsilon a^2 - \varepsilon b^2 - \varepsilon c^2 + 3\cdot\varepsilon g^2 + 4\cdot\vartheta_a g^2 + 4\cdot\vartheta_b g^2 + 4\cdot\vartheta_c g^2 + \vartheta_a s^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2,$$

(40) $$\zeta = a^2\beta + a^2\gamma + b^2\gamma + b^2\alpha + c^2\alpha + c^2\beta - 3\cdot\alpha\beta\gamma + 6\cdot\varepsilon g^2 + 2\cdot\varepsilon a^2 + 2\varepsilon b^2 + 2\cdot\varepsilon c^2 - \tau\alpha^2 - \tau\beta^2 - \tau\gamma^2 + 3\cdot\tau s^2 + 4\cdot\vartheta_a s^2 + 4\cdot\vartheta_b s^2 + 4\cdot\vartheta_c s^2 + \vartheta_a g^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2.$$

Aus (35), (36), (39), (40) folgt, dass die 4 Bedingungen ψs, ψg, ζ, η durch eine Gleichung von einander abhängen. Subtrahirt man nämlich (40) von (39), so kommt:

$$\eta - \zeta = 3\cdot\alpha\beta\gamma - 3\cdot abc + 3\cdot\tau s^2 - 3\cdot\varepsilon g^2 + 3\cdot\tau\alpha^2 + 3\cdot\tau\beta^2 + 3\cdot\tau\gamma^2 - 3\cdot\varepsilon a^2 - 3\cdot\varepsilon b^2 - 3\cdot\varepsilon c^2 + 3\cdot\vartheta_a g^2 + 3\cdot\vartheta_b g^2 + 3\cdot\vartheta_c g^2 - 3\cdot\vartheta_a s^2 - 3\cdot\vartheta_b s^2 - 3\cdot\vartheta_c s^2.$$

Subtrahirt man andererseits (35) von (36), so kommt:

$$\psi g - \psi s = \alpha\beta\gamma - abc + \tau s^2 - \varepsilon g^2 + \tau\alpha^2 + \tau\beta^2 + \tau\gamma^2 - \varepsilon a^2 - \varepsilon b^2 - \varepsilon c^2 + \vartheta_a g^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2 - \vartheta_a s^2 - \vartheta_b s^2 - \vartheta_c s^2.$$

Durch Vergleichung der beiden so erhaltenen Differenzen ergiebt sich:

(41) $$3 \cdot \psi s + \eta = 3 \cdot \psi g + \zeta,$$

eine Formel, welche in § 7. bei der Behandlung der unendlich kleinen Dreiecke wieder auftreten wird. Da η und ζ specielle Ausartungen ψ sind, so kann die interessante Formel (41) in Worten so ausgesprochen werden:

Addirt man bei einem einstufigen Systeme von unendlich kleinen Dreiecken erstens die Zahl derjenigen, deren 3 Ecken in gerader Linie liegen, zu der dreifachen Ordnung der von den Ecken beschriebenen Curve, zweitens die Zahl derjenigen, deren 3 Seiten sich in einem und demselben Punkte schneiden, zu dem dreifachen Range der von den Seiten eingehüllten Curve, so erhält man beide Mal dieselbe Summe.

D. Gleichungen vierter Dimension.

Von den Gleichungen vierter Dimension heben wir folgende hervor:

(42) $a^2\alpha^2 = \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \alpha + \vartheta_b s^2 g + \vartheta_c s^2 g,$

(43) $\vartheta_a s^2 a = \vartheta_a s^2 g + \tau s^2 \beta + \tau s^2 \gamma + \psi s^2,$

(44) $\vartheta_a g a^2 = \beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a,$

(45) $\vartheta_a s a^2 = \beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \beta + \tau s^2 \gamma + \psi s^2,$

(46) $\tau s \alpha \gamma = \gamma^2 \alpha^2 - \varepsilon g^2 b + \tau s^2 \alpha + \tau s^2 \gamma + \vartheta_b s^2 g - \psi g^2,$

(47) $a^2 bc = \beta^2\gamma^2 + \vartheta_b s^2 g + \vartheta_c s^2 g + \tau s^2 \alpha + \tau s^2 \beta + \tau s^2 \gamma + \psi s^2,$

und die diesen Gleichungen dual entsprechenden.

E. Gleichungen fünfter Dimension.

(48) $ab^2c^2 = \varepsilon b^2 c^2 + \tau \alpha^2\gamma^2 + \tau \alpha^2 \beta^2 + 2 \cdot \psi s^2 g,$

(49) $\alpha\beta^2\gamma^2 = \tau\beta^2\gamma^2 + \varepsilon a^2 c^2 + \varepsilon a^2 b^2 + 2 \cdot \psi s^2 g,$

(50) $b^2c^2\beta = \varepsilon b^2 c^2 + \tau \alpha^2 \beta^2 + \psi s^2 g,$

(51) $\beta^2\gamma^2 b = a^2 b^2 \beta = \varepsilon a^2 b^2 + \tau \beta^2\gamma^2 + \psi s^2 g,$

(52) $\vartheta_b s^2 b^2 = \tau \alpha^2\gamma^2 + \psi s^2 g,$

(53) $\vartheta_b g^2 \beta^2 = \varepsilon a^2 c^2 + \psi s^2 g.$

F. Ueberblick.

Aus den unter (A) abgeleiteten Gleichungen *erster Dimension* geht hervor, dass alle auf die Ecken, Seiten und Ausartungen eines Dreiecks bezüglichen, einfachen Bedingungen durch die folgenden 7 *Bedingungen* ausdrückbar sind:

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \tau,$$

oder durch:

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon.$$

Die Gleichungen *zweiter Dimension* drücken alle derartigen zweifachen Bedingungen durch die folgenden 17 *Bedingungen* aus:

$$a^2,\ b^2,\ c^2,\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2,\ a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ \tau s,\ \varepsilon g,$$
$$\vartheta_a s,\ \vartheta_b s,\ \vartheta_c s,\ \vartheta_a g,\ \vartheta_b g,\ \vartheta_c g.$$

Die Gleichungen *dritter Dimension* zeigen, dass man alle derartigen, dreifachen Bedingungen als Functionen der folgenden 22 *Bedingungen* darstellen kann:

$$a^2\beta,\ a^2\gamma,\ b^2\alpha,\ b^2\gamma,\ c^2\alpha,\ c^2\beta,\ abc,\ \alpha\beta\gamma,$$
$$\varepsilon a^2,\ \varepsilon b^2,\ \varepsilon c^2,\ \tau\alpha^2,\ \tau\beta^2,\ \tau\gamma^2,\ \varepsilon g^2,\ \tau s^2,$$
$$\vartheta_a s^2,\ \vartheta_b s^2,\ \vartheta_c s^2,\ \vartheta_a g^2,\ \vartheta_b g^2,\ \vartheta_c g^2.$$

Ebenso überzeugt man sich leicht, dass man jede derartige *vierfache* Bedingung durch die folgenden 17 *Bedingungen* ausdrücken kann:

$$b^2c^2,\ c^2a^2,\ a^2b^2,\ \beta^2\gamma^2,\ \gamma^2\alpha^2,\ \alpha^2\beta^2,\ \tau s^2\alpha,\ \tau s^2\beta,\ \tau s^2\gamma,$$
$$\varepsilon g^2 a,\ \varepsilon g^2 b,\ \varepsilon g^2 c,\ \vartheta_a s^2 g,\ \vartheta_b s^2 g,\ \vartheta_c s^2 g,\ \psi s^2,\ \psi g^2.$$

Endlich kann man jede derartige, *fünffache* Bedingung durch die folgenden 7 *Bedingungen* darstellen:

$$\varepsilon b^2c^2,\ \varepsilon c^2a^2,\ \varepsilon a^2b^2,\ \tau\beta^2\gamma^2,\ \tau\gamma^2\alpha^2,\ \tau\alpha^2\beta^2,\ \psi s^2 g.$$

Durch die eben angeführten 7 einfachen, 17 zweifachen, 22 dreifachen, 17 vierfachen, 7 fünffachen Bedingungen wird in den Paragraphen 4. bis 6. *jede beliebige*, dem Dreiecke auferlegte i-fache Bedingung ausgedrückt werden, unter der *Beschränkung*, dass das zu Grunde gelegte i-stufige System und das durch die i-fache Bedingung definirte, $(6-i)$-stufige System *gewöhnliche* Systeme sind.

G. Beispiele zu den Formeln.

I. Um die Formel (41) zu controliren, betrachte man das einstufige System aller derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche auf einer gegebenen Curve durch alle möglichen drei consecutiven, unendlich nahen Punkte festgestellt werden. Man hat dann ψs gleich der Ordnung n der Curve, ψg gleich dem Range n' der Curve, η gleich der Zahl $\varkappa'$ der Wendepunkte, ζ gleich der Zahl $\varkappa$ der Rückkehrpunkte zu setzen. So erhält man aus Formel (41) die bekannte *Plücker'sche Formel:*

$$3\cdot n+\varkappa'=3\cdot n'+\varkappa.$$

Man beachte aber, dass Formel (41) *allgemeiner* ist, als diese Plücker'sche Formel, weil die Ecken der bei der Anwendung von (41) betrachteten unendlich kleinen Dreiecke nicht eine und dieselbe Curve zu bilden brauchen.

II. Um ein Beispiel für die Formeln dritter Dimension zu haben, betrachten wir das dreistufige System aller einer festen Curve n^{ter} Ordnung einbeschriebenen Dreiecke, indem wir jeden Punkt dieser Curve als Ecke a, jeden zweiten Punkt als Ecke b und jeden dritten als Ecke c eines Dreiecks auffassen. Für das so definirte System haben alle dreifachen Bedingungen, die sich nur durch die cyklische Vertauschung von a, b, c, α, β, γ unterscheiden, einen und denselben Werth. Desshalb erwähnen wir von solchen Bedingungen immer nur einen. Man findet leicht:

$$b^2c = 0,\ b^2\alpha = 0,\ a^2\alpha = 0,\ \beta^2\gamma = n(n-1)^2,\ a\alpha^2 = n^2(n-1),$$
$$abc = n^3 \text{ und } \varepsilon g^2 = n(n-1)(n-2),\ \vartheta_a s^2 = 0,\ \varepsilon a^2 = 0,\ \tau s^2 = 0,$$
$$\tau\alpha^2 = 0,\ \tau\alpha\beta = 0,\ \vartheta_a s a = n^2,\ \vartheta_a a^2 = 0,\ \vartheta_a\alpha^2 = 0,\ \vartheta_a g^2 = n(n-1).$$

Diese Werthe stehen mit den Formeln (24) bis (34) in Einklang. Aus (34) folgt $\vartheta_a a\alpha = n^2(n-1)$, und aus Formel (31):

$$\alpha\beta\gamma - \vartheta_a g\alpha = n(n-1)(n-2).$$

Um $\vartheta_a g\alpha$ zu bestimmen, multipliciren wir Formel (1) mit $\alpha\beta$. Dann kommt:

$$\tau\alpha\beta + \vartheta_a g\alpha = b\alpha\beta + c\alpha\beta - \alpha^2\beta,$$

oder:

$$\vartheta_a g\alpha = b^2\beta + c^2\beta + \alpha^2\beta = 0 + 0 + n(n-1)^2.$$

Demnach ist:

$$\alpha\beta\gamma = n(n-1)(n-2) + n(n-1)^2,$$

oder

$$\alpha\beta\gamma = n(n-1)(2n-3).$$

Einer Curve n^{ter} Ordnung lassen sich also

$$n(n-1)(2n-3)$$

Dreiecke einbeschreiben, deren 3 Seiten bezüglich durch 3 gegebene Punkte gehen. Die dual entsprechende Betrachtung ergiebt, dass unter den einer Curve n'^{ten} Ranges *umbeschriebenen* Dreiecken

$$n'(n'-1)(2n'-3)$$

Dreiecke existiren, welche jede ihrer drei Ecken auf einer zugehörigen Geraden haben.

Auch die Formeln (35) bis (41) lassen sich durch die oben angegebenen Werthe leicht controliren. Man beachte dabei, dass das in unserem, oben definirten, dreistufigen Systeme liegende einstufige System von Dreiecken ψ nicht identisch ist mit dem im Beispiel I. betrachteten Systeme, weil bei letzterem immer die drei unendlich nahen Ecken Punkte eines und desselben Curvenzweigs sein sollten. Demgemäss wurde die Bedingung η in einem Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt beim Beispiel I. nicht erfüllt, bei unserem Systeme aber

erfüllt, und zwar, gemäss den Plücker'schen Formeln, in einem Doppelpunkt 6 mal, in einem Rückkehrpunkt 8 mal.

III. Für das dreistufige System aller in Bezug auf einen festen Kegelschnitt sich selbst conjugirten Dreiecke erhält man:

$$a^2b = 1, \; a^2\beta = 1, \; a^2\alpha = 0, \; \vartheta_a sa = 2, \; \vartheta_a a^2 = 2, \; abc = 2, \; \psi s = 2,$$

und dieselben Werthe für die analogen und die dual entsprechenden Bedingungen. Für die übrigen, oben erwähnten, dreifachen Bedingungen ergiebt sich Null, was mit den abgeleiteten Formeln in Einklang steht.

IV. Für das vierstufige System aller einem Kegelschnittbüschel einbeschriebenen Dreiecke ergiebt sich:

$$a^2\alpha^2 = 2, \; \beta^2\gamma^2 = 1, \; a^2bc = 4, \; \varepsilon g^2 a = 0, \; \tau s^2\alpha = 0, \; \vartheta_b s^2 g = 1,$$
$$\vartheta_a s^2 a = 2, \; \vartheta_a g a^2 = 1, \; \vartheta_a s a^2 = 2, \; \tau s\alpha\beta = 0, \; \psi s^2 = 1,$$

aber

$$\psi g^2 = 2.$$

Diese Werthe stehen mit den Formeln (42) bis (47) im Einklang. Um auf die Ausartungen η und ζ zu kommen, leiten wir aus Formel (41) noch 2 neue Formeln ab, indem wir dieselbe mit s und mit g multipliciren. Dadurch kommt zunächst:

$$3 \cdot \psi s^2 + \eta s = 3 \cdot (\psi s^2 + \psi g^2) + \zeta s,$$

oder:

(54) $$\eta s = 3 \cdot \psi g^2 + \zeta s,$$

ebenso:

(55) $$\zeta g = 3 \cdot \psi s^2 + \eta g.$$

Nun ist für unser vierstufiges Dreieckssystem $\psi s^2 = 1$, $\psi g^2 = 2$, und ausserdem:

$$\eta s = 3 \cdot 2, \; \eta g = 0, \; \zeta s = 0, \; \zeta g = 3.$$

Diese 4 Werthe erhält man, wenn man beachtet, dass in dem Kegelschnittbüschel 3 mal ein Kegelschnitt existirt, dessen Punkte ein Geradenpaar bilden, dass in jedem Punkte einer der beiden Geraden ein Dreieck η liegt, und dass im Schnittpunkt der beiden Geraden unendlich viele Dreiecke ζ liegen, weil jeder durch den Schnittpunkt gehende Strahl als das g einer Ausartung ζ anzusehen ist. Setzt man die so erkannten 4 Werthe in die Formeln (54) und (55) ein, so erhält man Identitäten.

V. Bei metrischen Beispielen ist es wegen der speciellen Beziehung zum unendlich fernen, imaginären Kugelkreise nothwendig, denselben zuvor die projective Fassung zu geben. Für das fünfstufige System aller Dreiecke, bei denen die Ecken b und c einen gegebenen Abstand haben, erhält man dann:

$ab^2c^2 = 0$, $a^2bc^2 = 2$, $a^2b^2c = 2$, $\varepsilon b^2c^2 = 0$, $\varepsilon c^2a^2 = 2$, $\varepsilon a^2b^2 = 2$, $b^2c^2\beta = 0$, $a^2b^2\alpha = 2$, $\beta^2\gamma^2 b = a^2b^2\beta = 2$, $\vartheta_b g^2 \beta^2 = 2$, u. s. w.

Diese Werthe controliren die Formeln (48) bis (53) und ergeben ausserdem:

$$\alpha\beta^2\gamma^2 = 4,$$

d. h., es lässt sich durch jeden Punkt 4 mal ein Strahl ziehen, auf welchem zwei gegebene Strahlen eine gegebene Länge abschneiden, wie aus den Elementen der Planimetrie bekannt ist.

§ 3.

Ableitung der Stammformel für die Zahl der zwei gewöhnlichen Dreieckssystemen gemeinsamen Dreiecke.

Wir stehen jetzt vor der Frage, ob es, wie beim Punkte (Bezout's Satz) und beim Strahle, auch beim Dreieck möglich ist, jede beliebige, algebraisch ausdrückbare, geometrische Bedingung durch eine gewisse Anzahl i-facher Bedingungen auszudrücken, oder, was dasselbe ist*), ob sich die Zahl der Dreiecke, welche einem beliebigen, i-stufigen und einem davon unabhängigen, $(6-i)$-stufigen Systeme von Dreiecken gemeinsam sind, als algebraische Summe von Producten je zweier Anzahlen darstellen lässt, von denen immer die eine auf das i-stufige, die andere auf das $(6-i)$-stufige System Bezug nimmt. Für mehrere aus einzelnen Punkten, Strahlen und Ebenen zusammengesetzte Gebilde hat der Verfasser diese Darstellung in den Gött. Nachr. von 1877 und in seinem Kalkül geleistet. Für das Gebilde, welches aus n in gerader Linie befindlichen Punkten besteht, liess sich die gesuchte Darstellung unter der Beschränkung leisten**), dass die Coincidenz von i solchen Punkten als eine Bedingung auftritt, deren Dimension $i-1$ und nicht etwa kleiner ist. Aehnlich ist es beim Dreieck. Formeln, welche der Bezout'schen Formel vom Producte der Gradzahlen analog sind,

---

*) Man vergleiche die Formulirung des Charakteristikenproblems für ein beliebiges Gebilde Γ in meinem Kalkül, p. 274 bis 284, sowie in den Gött. Nachr. von 1877, p. 401.

**) Man vergleiche im Kalkül, p. 307 bis 319. Die eben angedeutete Beschränkung ist in meinem Buche an der betreffenden Stelle nicht ausdrücklich erwähnt, aber nach der Bedeutung der dort eingeführten Symbole selbstverständlich. Dies hob ich schon im Bull. de la Soc. math. tome VIII, p. 60 hervor, nachdem Herr Halphen kurz zuvor in derselben Zeitschrift (tome VIII, p. 31) ein Beispiel angeführt hatte, welches die Ungenauigkeit einer meiner Formeln beweisen sollte. Das Beispiel behandelte aber einen Fall, wo die Coincidenz von *drei* Punkten einer Geraden nicht eine zweifache, sondern eine *einfache* Bedingung ist, war also durch die in meinen Formeln auftretenden Symbole von selbst ausgeschlossen.

lassen sich auch für das Dreieck ableiten, vorausgesetzt, dass die gegebenen Systeme *gewöhnliche* sind, d. h. der am Schluss von § 1. ausgesprochenen Beschränkung unterliegen. Indem wir das Wort „Charakteristiken" für Untersuchungen im Sinne Halphen's aufsparen, wollen wir solche der Bezout'schen Formel analoge Formeln „*Productenformeln*" und die darauf bezüglichen Sätze „Productensätze"*) nennen.

Um zu einer Stammformel für die Productenformeln des Dreiecks zu gelangen, beginnen wir, der Einfachheit wegen, mit der Betrachtung eines i-stufigen Systems von Punkten b und eines $(2-i)$-stufigen Systems von Punkten b'. Beide Systeme haben b^2 oder bb' oder b'^2 Punkte gemein, jenachdem $i=2$, 1 oder 0 ist. Also giebt der Ausdruck

$$b^2 + b \cdot b' + b'^2$$

für die Zahl der vollen Coincidenzen eines zweistufigen Systems von Punktepaaren (b, b') zugleich auch durch seine 3 Glieder die Zahl der gemeinsamen Punkte eines i-stufigen und eines $(2-i)$-stufigen Punktsystems an, indem in jedem Falle zwei von den 3 Gliedern des Ausdrucks wegen der Stufen der Systeme Null werden. Nun fassen wir den Punkt b mit einem durch b gehenden Strahle α zu einem Gebilde zusammen, ebenso den Punkt b' mit dem durch b' gehenden Strahle α', und betrachten ein i-stufiges und ein $(3-i)$-stufiges System solcher Gebilde als gegeben. Es fragt sich, wieviel Gebilde den beiden Systemen gemeinsam sind. Wir wählen den Fall $i=2$. Dann bilden die Punkte b' eine Curve, während ein Punkt b in jedem Punkte der Ebene, also auch in jedem Punkte dieser Curve, liegt, und zwar, gemäss unserer Bezeichnung, b^2 mal. Von jedem Curvenpunkte geht nun ein Strahl α und ein Strahl α' aus. Ein den beiden Systemen gemeinsames Gebilde kann also nur dann entstehen, wenn die von einem Curvenpunkte ausgehenden Strahlen α und α' coincidiren. Um zu berechnen, wie oft dies vorkommt, haben wir die Strahlenpaarformel erster Dimension anzuwenden. Wir müssen dann zuerst bestimmen, wieviel Strahlen α durch einen beliebigen Punkt P gehen, und dabei solche Punkte b besitzen, die zugleich Punkte b' sind. Unserer Bezeichnung gemäss bilden die Punkte P, welche auf sämmtlichen, durch P gehenden Strahlen α liegen, eine Curve vom Grade αb. Diese schneidet also die Curve der Punkte b' in $\alpha b \cdot b'$ Punkten. Soviel Strahlen giebt es demnach auch, welche durch P

*) Diesen Ausdruck gebrauchte ich schon in den Math. Ann. Bd. X, p. 91, wo die Zahlen für die gemeinsamen Punkte zweier Punktsysteme und für die gemeinsamen Strahlen zweier Systeme von Strahlen abgeleitet sind.

gehen und einen Punkt besitzen, der zugleich b und b' ist. Zweitens haben wir zu bestimmen, wieviel Strahlen α' durch einen beliebigen Punkt P' so gehen, dass auf jedem ein Punkt liegt, der sowohl b wie b' ist. Es sind dies, nach unserer Bezeichnung, $\alpha' \cdot b^2$ Strahlen, weil in jedem auf einem Strahle α' liegenden Punkte b' b^2 mal ein Punkt b zu denken ist. Drittens haben wir zu bestimmen, wieviel Punkte auf einer beliebigen Geraden liegen, welche zugleich b und b' sind und dabei einen Strahl α und einen Strahl α' aussenden. Man erhält dafür die Zahl $b' \cdot b^2$. Demnach ergiebt sich für die Zahl z derjenigen Gebilde, welche einen Punkt enthalten, der zugleich b und b' ist, und dabei einen Strahl α enthalten, der mit α' coincidirt:

$$z = \alpha b \cdot b' + \alpha' \cdot b^2 - b' \cdot b^2.$$

In der Zahl z sind jedenfalls die gesuchten, den beiden Systemen gemeinsamen Gebilde enthalten. Ausserdem würde z auch Gebilde aus Σ mitzählen, welche Gebilden in Σ' bloss unendlich nahe liegen mit bestimmter Coincidenzrichtung der Punkte b und b' oder mit bestimmtem Coincidenzschnitt der Strahlen α und α'. Solche Fälle sind aber unmöglich, wenn, wie es hier geschieht, die beiden Systeme als von einander *unabhängig* vorausgesetzt werden. Ebenso wenig können ja die ∞^2 aus den Punkten zweier beliebiger Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung gebildeten Punktepaare noch andere Coincidenzen bilden, als die $m \cdot n$ vollen Coincidenzen. Demnach giebt der Ausdruck für z genau die Zahl der den beiden Systemen gemeinsamen Gebilde an. Ist ferner das System Σ der aus b und α zusammengesetzten Gebilde dreistufig, das andere System Σ' nullstufig, so ist natürlich $b^2\alpha$ die Zahl der gemeinsamen Gebilde. Ist Σ nullstufig, Σ' dreistufig, so ist für diese Zahl $b'^2\alpha'$ zu setzen. Ist endlich Σ einstufig, Σ' zweistufig, so ergiebt sich, analog wie oben,

$$\alpha' b' \cdot b + b'^2 \cdot \alpha - b'^2 \cdot b$$

für die Zahl der gemeinsamen Gebilde. Addirt man nun die in den 4 Fällen $i = 3, 2, 1, 0$ erhaltenen 4 Anzahlen, so erkennt man leicht, dass genau dasselbe herauskommt, als wenn wir den Ausdruck:

$$b^2 + bb' + b'^2$$

mit

$$\alpha + \alpha' - b$$

oder mit

$$\alpha + \alpha' - b'$$

multipliciren und dann in jedem Gliede die gestrichelten Symbole von den nichtgestrichelten durch ein Multiplicationszeichen trennen. Also liefert der Ausdruck

$$(b^2 + bb' + b'^2)\ (\alpha + \alpha' - b')$$

nach Ausführung der Multiplication immer die Zahl der gemeinsamen

Gebilde eines i-stufigen Systems Σ und eines $(3-i)$-stufigen Systems Σ', da ja dann nur diejenigen Glieder von null verschieden werden, welche ein i-faches, auf Σ bezügliches, und ein $(3-i)$-faches, auf Σ' bezügliches Symbol enthalten. Wir kommen also immer zu einem richtigen Resultat, wenn wir bei Aufsuchung der Zahl der Σ und Σ' gemeinsamen Gebilde jedes in Σ liegende Gebilde mit jedem in Σ' liegenden Gebilde zu einem Paare zusammenfassen, dann dem erhaltenen dreistufigen Systeme von Paaren die zweifache Bedingung auferlegen, dass ein Punkt b und ein Punkt b' eine volle Coincidenz bilden sollen (Kalkül, § 13), und endlich mit dieser zweifachen Bedingung die einfache Bedingung zusammensetzen, dass die a und a' Strahlen, welche sich in einem solchen sowohl b wie b' darstellenden Punkte schneiden, unendlich nahe liegen sollen.

Wir gehen nun so weiter zu einem Gebilde, welches aus zwei sich in einem Punkte b schneidenden Strahlen α und γ besteht. Dieses Gebilde erzeuge ein i-stufiges System Σ. Ausserdem sei ein $(4-i)$-stufiges System Σ' von ebensolchen Gebilden gegeben, bei denen der Punkt b' und die Strahlen α' und γ' heissen mögen. Beide Systeme haben dann gemeinsam

$$(56)\qquad w=(b^2+bb'+b'^2)(\alpha+\alpha'-b')(\gamma+\gamma'-b')\,^{*)}$$

Gebilde, wo nach Ausführung der Multiplication nur diejenigen Glieder von null verschieden werden, welche ein i-faches, auf Σ bezügliches, und ein $(4-i)$-faches, auf Σ' bezügliches Symbol enthalten, und wo immer die dem nichtgestrichelten Symbole zukommende Anzahl mit der dem gestrichelten Symbole angehörigen Anzahl multiplicirt werden muss.

Hierauf betrachten wir das Gebilde, welches aus zwei sich in einem Punkte b schneidenden Strahlen α, γ und einem auf α liegenden Punkte c besteht. Von diesem Gebilde sei ein i-stufiges System Σ und ein $(5-i)$-stufiges System Σ' gegeben, bei welchem letzteren die Buchstaben für die Punkte b und c und für die Strahlen α und γ gestrichelt sein mögen. Man erhält dann in ganz derselben Weise, wie oben,

$$(57)\quad v=(b^2+bb'+b'^2)(\alpha+\alpha'-b')(\gamma+\gamma'-b')(c+c'-\alpha')$$

für die Zahl der den beiden Systemen gemeinsamen Gebilde, *ausgenommen*, wenn Σ ein $(i-1)$-stufiges System, und auch Σ' ein $(5-i-1)$-stufiges System von derartig ausgearteten Gebilden enthielte, dass sowohl b und c, wie auch α und γ unendlich nahe läge.

*) Dieser Formel entspricht dual eine Formel, aus welcher ich schon in den Gött. Nachr. von 1877 die Productenformeln des Punktepaares abgeleitet habe. (Kalkül, § 42.)

Dann würde es nämlich vorkommen können, dass sowohl der Coincidenzpunkt eines b und eines c mit dem Coincidenzpunkte eines b' und eines c', wie auch der Coincidenzstrahl eines α und eines γ mit dem Coincidenzstrahl eines α' und eines γ' zusammenfiele. Ein solcher Fall wäre dann sicher durch den obigen Ausdruck für v mitgezählt. Man könnte jedoch nicht sicher wissen, ob ein solcher Fall auch ein den gegebenen Systemen Σ und Σ' *gemeinsames* Gebilde vorstellt. Wir müssen also, um richtige Productenformeln haben zu können, den gegebenen Systemen die oben angedeutete Beschränkung auferlegen.

Wir kommen endlich zum *Dreieck selbst*. Gegeben sei ein i-stufiges System Σ und ein davon unabhängiges $(6-i)$-stufiges System Σ' von Dreiecken. In Σ mögen die drei Ecken a, b, c, die drei Seiten α, β, γ, und in Σ' die drei Ecken a', b', c' und die drei Seiten α', β', γ' heissen. Wiederholen wir die eben angestellten Betrachtungen, indem wir nur noch auf dem Strahle γ einen Punkt a annehmen, der mit dem auf γ' liegenden Punkte a' zusammenfallen soll, so gelangen wir zu der Formel:

$$(58)\quad y = (b^2 + bb' + b'^2)(\alpha + \alpha' - b')(\gamma + \gamma' - b')(c + c' - \alpha')(a + a' - \gamma').$$

Es wäre jedoch falsch, anzunehmen, dass diese Zahl y immer die Zahl der den beiden Systemen gemeinsamen Dreiecke lieferte. Zunächst legen wir, nach der Analogie der schon bei Formel (57) nothwendig gewordenen Einschränkung, den beiden Dreieckssystemen die am Schluss von § 1. besprochene Beschränkung auf, *dass sie gewöhnliche Systeme seien*. Aber auch dann ist die Zahl y nicht gleich der Zahl der gemeinsamen Dreiecke. Denn y zählt, wie oft es vorkommt, dass b mit b', α mit α', γ mit γ', c mit c', a mit a' zusammenfällt, zählt also auch diejenigen Fälle mit, *wo ausserdem β und β' nicht zusammenfallen*. Dies kann natürlich nur bei ausgearteten Dreiecken eintreten, und zwar unter der Voraussetzung von gewöhnlichen Systemen, nur in zwei Fällen; nämlich erstens, wenn bei einer Σ angehörigen Ausartung τ und bei einer Σ' angehörigen Ausartung τ' die Seiten α und α', sowie γ und γ' zusammenfallen; zweitens, wenn bei einer Σ angehörigen Ausartung ϑ_b und bei einer Σ' angehörigen Ausartung ϑ_b' der Strahl g mit g', der Punkt s mit s' und der Punkt b mit b' zusammenfällt. Beide Fälle sind durch y mitgezählt, ergeben aber keine den Systemen gemeinsamen Dreiecke, weil die Seite β nicht auch mit β' zusammenfällt. Also muss man wegen des ersten dieser beiden Fälle gemäss der oben abgeleiteten Formel (56) den Ausdruck

$$\tau\tau'(s^2 + ss' + s'^2)(\alpha + \alpha' - s')(\gamma + \gamma' - s')$$

und wegen des zweiten Falles auch den Ausdruck

$$\vartheta_b \vartheta_b'(s^2 + ss' + s'^2)(g + g' - s')(b + b' - g')$$

von dem in Formel (58) gegebenen Ausdrucke für y subtrahiren, um *die Zahl x der gemeinsamen Dreiecke der beiden Systeme Σ und Σ' zu erhalten. Demnach ergiebt sich schliesslich die folgende Stammformel für alle Productenformeln des Dreiecks:*

$$\begin{aligned}(59)\quad X' = {} & (b^2+bb'+b'^2)(\alpha+\alpha'-b')(\gamma+\gamma'-b')(c+c'-\alpha')(a+a'-\gamma') \\ & - \tau\tau'(s^2 + ss' + s'^2)(\alpha + \alpha' - s')(\gamma + \gamma' - s') \\ & - \vartheta_b \vartheta_b'(s^2 + ss' + s'^2)(g + g' - s')(b + b' - g').\end{aligned}$$

Bei der Ableitung dieser Formel ist die Seite β in gewisser Weise bevorzugt. In derselben Weise könnte man auch α, γ, sowie a, b, c bevorzugen. Man erhielte dann im Ganzen 6 formell verschiedene Ausdrücke für x. Aus allen diesen 6 Ausdrücken kann man nach Ausführung der angedeuteten Multiplicationen, bei geschickter Benutzung der Incidenzformeln und der Formeln des § 2., *schliesslich einen und denselben Ausdruck erhalten, welcher sowohl den Anforderungen der Symmetrie entspricht, wie auch durch Vertauschung der gestrichelten Symbole mit den nichtgestrichelten in sich selbst übergeht.* Statt diesen Ausdruck hier hinzuschreiben, werden wir im Folgenden aus der rechten Seite der Stammformel (59) immer nur diejenigen Glieder herausschälen, welche bei dem jedesmal vorliegenden Werthe von i nicht verschwinden. Wir haben nämlich drei verschiedene Fälle zu behandeln:

I) Σ ist fünfstufig, Σ' einstufig,

II) Σ ist vierstufig, Σ' zweistufig,

III) Σ ist dreistufig, Σ' auch dreistufig.

Im ersten Falle sind von den Gliedern, welche die rechte Seite der Formel (59) ergiebt, nur diejenigen von Null verschieden, welche 5 nichtgestrichelte und 1 gestricheltes Symbol zu Factoren haben. Den Zahlenwerth eines solchen Gliedes erhält man dann, wenn man die Zahl derjenigen Dreiecke aus Σ, welche die durch das nichtgestrichelte Symbol dargestellte fünffache Bedingung erfüllen, mit der Zahl derjenigen Dreiecke multiplicirt, welche Σ' angehören, und zugleich die durch das gestrichelte Symbol bezeichnete einfache Bedingung erfüllen. Analog verfährt man in den beiden anderen Fällen.

§ 4.

Die Zahl der gemeinsamen Dreiecke eines einstufigen und eines fünfstufigen gewöhnlichen Systems.

Wir setzen hier ein einstufiges System Σ' und ein fünfstufiges System Σ von Dreiecken als gegeben voraus. Dann haben wir aus

der Stammformel alle diejenigen Glieder herauszuziehen, welche ein gestricheltes und fünf nichtgestrichelte Symbole enthalten. Wir erhalten so für die Zahl der Σ und Σ' gemeinsamen Dreiecke:

(60) $$\begin{aligned} x = a' \cdot (b^2\alpha\gamma c) + b' \cdot (b\alpha\gamma a c - b^2\gamma a c - b^2\alpha a c) \\ + c' \cdot (b^2\alpha\gamma a) + \alpha' \cdot (b^2\gamma a c - b^2\alpha\gamma a) \\ + \gamma' \cdot (b^2\alpha a c - b^2\alpha\gamma c) - \tau' \cdot \tau s^2\alpha\gamma - \vartheta_b' \cdot \vartheta_b s^2 g b. \end{aligned}$$

Hier bedeutet gemäss § 3. jedes gestrichelte Symbol die Zahl derjenigen Dreiecke in Σ', welche die durch das Symbol dargestellte, einfache Bedingung erfüllen, jedes aus 5 Factoren bestehende, nichtgestrichelte Symbol die Zahl derjenigen Dreiecke in Σ, welche die durch das Symbol dargestellte, zusammengesetzte, fünffache Bedingung erfüllen. *Die Punkte deuten an, dass die resultirenden Zahlen zu multipliciren sind.*

Um den in Formel (60) erhaltenen Ausdruck in eine symmetrische und übersichtliche Form zu bringen, setzen wir in demselben gemäss Formel (3)

$$\vartheta_b' = a' + c' - \beta' - \tau',$$

und formen ihn dann vermöge der Incidenzformeln und der in § 2. entwickelten Formeln zweckmässig um. Dann kommt:

$$\begin{aligned} x &= a' \cdot b^2c^2\gamma + b' \cdot (a^2\gamma a c - b^2\alpha a c) + c' \cdot a^2b^2\alpha \\ &\quad + \alpha' \cdot (a^2b^2c - a^2b^2\alpha) + \gamma' \cdot (a b^2 c^2 - b^2c^2\gamma) \\ &\quad - \tau' \cdot \tau s^2\alpha\gamma - (a' + c' - \beta' - \tau') \cdot \vartheta_b s^2 b^2 \\ &= a' \cdot (b^2c^2\gamma - \vartheta_b s^2 b^2) + b' \cdot \alpha a c(\alpha\gamma - b^2) + c' \cdot (a^2b^2\alpha - \vartheta_b s^2 b^2) \\ &\quad + \alpha' \cdot (a^2b^2c - a^2b^2\alpha) + \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + \gamma' \cdot (a b^2c^2 - b^2c^2\gamma) \\ &\quad + \tau' \cdot (\vartheta_b s^2 b^2 - \tau\alpha^2\gamma^2) \\ &= a' \cdot \varepsilon b^2c^2 + b' \cdot g a c(\varepsilon g + \vartheta_b g) + c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 \\ &\quad + \alpha' \cdot \vartheta_a s^2 a^2 + \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + \gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2 + \tau' \cdot \psi s^2 g, \end{aligned}$$

also schliesslich:

(61) $$\begin{aligned} x' = a' \cdot \varepsilon b^2c^2 + b' \cdot \varepsilon c^2a^2 + c' \cdot \varepsilon a^2b^2 \\ + \alpha' \cdot \vartheta_a s^2 a^2 + \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + \gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2 + \tau' \cdot \psi s^2 g. \end{aligned}$$

Diese Productenformel ist zwar symmetrisch, aber sie geht durch duale Umwandelung nicht in sich selbst über. Wir setzen desshalb noch gemäss Formel (52):

$$\vartheta_a s^2 a^2 = \tau\beta^2\gamma^2 + \psi s^2 g$$

und das Analoge für $\vartheta_b s^2 b^2$ und $\vartheta_c s^2 c^2$. Dann kommt:

(62) $$\begin{aligned} x = a' \cdot \varepsilon b^2c^2 + b' \cdot \varepsilon c^2a^2 + c' \cdot \varepsilon a^2b^2 \\ + \alpha' \cdot \tau\beta^2\gamma^2 + \beta' \cdot \tau\gamma^2\alpha^2 + \gamma' \cdot \tau\alpha^2\beta^2 \\ + (\tau' + \alpha' + \beta' + \gamma') \cdot \psi s^2 g. \end{aligned}$$

Da die duale Umwandelung dieser Formel nichts anderes verändert, als $\tau' + \alpha' + \beta' + \gamma'$ in $\varepsilon' + a' + b' + c'$, so müssen diese beiden Summen gleich sein, was durch Formel (7) bestätigt wird. Es gelingt auch, eine einzige Bedingung zu definiren, deren Anzahl statt jeder der beiden Summen gesetzt werden kann. Es ist dies *die einfache Bedingung, dass ein Dreieck einem der ∞^2 Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, welche durch drei gegebene Punkte gelegt werden können.* Für das durch diese Bedingung definirte, fünfstufige System sind nämlich $\varepsilon b^2 c^2$, $\varepsilon c^2 a^2$, $\varepsilon a^2 b^2$, $\tau \beta^2 \gamma^2$, $\tau \gamma^2 \alpha^2$, $\tau \alpha^2 \beta^2$ gleich Null zu setzen, dagegen ist $\psi s^2 g = 1$. Demnach erhält man bei Anwendung der Productenformel (62) die Zahl derjenigen Dreiecke, welche Σ' angehörig sind, und die eben definirte Bedingung erfüllen, gleich

$$(\tau' + \alpha' + \beta' + \gamma') \cdot 1.$$

Bezeichnet man also jene Bedingung, insofern sie auf Σ' bezogen wird, mit d', so ergiebt sich schliesslich die *Productenformel*:

$$\begin{aligned}(63)\qquad x' = {} & a' \cdot \varepsilon b^2 c^2 + b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 \\ & + \alpha' \cdot \tau \beta^2 \gamma^2 + \beta' \cdot \tau \gamma^2 \alpha^2 + \gamma' \cdot \tau \alpha^2 \beta^2 + d' \cdot \psi s^2 g.\end{aligned}$$

Abgeleitete Productenformeln entstehen hieraus, wenn man mit gestrichelten Symbolen von Lagebedingungen multiplicirt. Dies ist erlaubt, weil man sich das als gewöhnlich vorausgesetzte einstufige System Σ' durch eine fünffache Bedingung definirt denken kann, welche die betreffende Lagebedingung als Factor enthält. Multipliciren wir Formel (63) z. B. mit a', so kommt:

$$\begin{aligned}x a' = {} & a'^2 \cdot \varepsilon b^2 c^2 + a' b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + a' c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 \\ & + a' \alpha' \cdot \tau \beta^2 \gamma^2 + a' \beta' \cdot \tau \gamma^2 \alpha^2 + a' \gamma' \cdot \tau \alpha^2 \beta^2 + a' d' \cdot \psi s^2 g.\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(64)\qquad x a' = {} & a'^2 \cdot (\varepsilon b^2 c^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 + \tau \alpha^2 \beta^2) + \beta'^2 \cdot (\tau \gamma^2 \alpha^2 + \varepsilon a^2 b^2) \\ & + \gamma'^2 \cdot (\tau \alpha^2 \beta^2 + \varepsilon c^2 a^2) \\ & + \vartheta_b' s' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + \vartheta_c' s' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + \tau' s' \cdot (\varepsilon c^2 a^2 + \varepsilon a^2 b^2) \\ & + a' \alpha' \cdot \tau \beta^2 \gamma^2 + a' d' \cdot \psi s^2 g.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für $x a'$ giebt die Ordnung der Curve, die von der Ecke a aller derjenigen ∞^1 Dreiecke beschrieben wird, welche einem gegebenen zweistufigen Systeme Σ' und einem gegebenen fünfstufigen Systeme Σ gemeinsam sind.

Multiplicirt man ferner Formel (61) mit a'^2, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(65)\qquad x a'^2 = {} & a'^2 b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + a'^2 c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + a'^2 \alpha' \cdot \vartheta_a s^2 a^2 \\ & + a'^2 \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + a'^2 \gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2 + \tau' s'^2 \cdot \psi s^2 g.\end{aligned}$$

Multipliciren wir Formel (61) mit einer vierfachen Bedingung, z. B. mit $b'^2 c'^2$, so können wir, weil wir dann zwei fünfstufige Systeme

zu Grunde legen, verlangen, dass der Ausdruck durch Vertauschung der gestrichelten Symbole mit den nichtgestrichelten Symbolen in sich selbst übergeht. In der That erhält man:

$$x'b'^2c'^2 = a'b'^2c'^2 \cdot \varepsilon b^2c^2 + b'^2c'^2\beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + b'^2c^2\gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2.$$

Benutzt man dann die Formeln des § 2., so kann man zu folgender Form gelangen:

$$x'b'^2c'^2 = a'b'^2c'^2 \cdot ab^2c^2 - \vartheta_b' s'^2 b'^2 \cdot \vartheta_b s^2 b^2 - \vartheta_c s'^2 c'^2 \cdot \vartheta_c s^2 c^2.$$

Dieses Resultat kann man auch direct durch folgende Ueberlegung erhalten. Wenn die Ecken b und c feste Punkte sind, so beschreibt in dem fünfstufigen Systeme Σ die Ecke a eine Curve vom Grade ab^2c^2, und in dem fünfstufigen Systeme Σ' die Ecke a' eine Curve vom Grade $a'b'^2c'^2$. Beide Curven schneiden sich in $ab^2c^2 \cdot a'b'^2c'^2$ Punkten. Zu diesen Schnittpunkten gehören erstens die Ecken a derjenigen den beiden Systemen gemeinsamen Dreiecke, welche ihre Ecken b und c in den festen Punkten haben. Ausserdem aber hat man zu beachten, dass jedes nach der Definition von ϑ_b oder ϑ_c ausgeartetes Dreieck, welches Σ angehört, und seinen Punkt b resp. c in dem einen, seinen Punkt s in dem andern festen Punkte hat, zusammen mit jedem ebenso beschaffenen, aber Σ' angehörigen Dreieck ein Paar von Dreiecken liefert, welche zwar dieselbe Ecke a haben, aber keineswegs den beiden Systemen gemeinsam sind, weil die Seiten β resp. γ in beiden Dreiecken verschieden sind. Demnach fallen von den $ab^2c^2 \cdot a'b'^2c'^2$ Schnittpunkten $\vartheta_b s^2 b^2 \cdot \vartheta_b' s'^2 b'^2$ in den einen, und $\vartheta_c s^2 c^2 \cdot \vartheta_c' s'^2 c'^2$ in den andern der beiden festen Punkte.

Multipliciren wir endlich Formel (61) mit fünffachen Bedingungen, so gelangen wir zu Formeln, welche zu den in § 2. entwickelten gehören. Z. B. ergiebt die Multiplication mit $a'b'^2c'^2$:

$$xa'b'^2c'^2 = 1 \cdot \varepsilon b^2c^2 + 1 \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + 1 \cdot \vartheta_c s^2 c^2,$$

dies heisst aber:

$$ab^2c^2 = \varepsilon b^2c^2 + \vartheta_b s^2 b^2 + \vartheta_c s^2 c^2.$$

Die oben neu eingeführte Bedingung d, dass ein Dreieck einem der ∞^2 Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, welche durch drei gegebene Punkte gelegt werden können, giebt mit den 6 Bedingungen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ eine Gruppe von 7 einfachen Bedingungen, durch welche, bei Zugrundelegung eines gewöhnlichen einstufigen Systems jede der 5 Ausartungsbedingungen ausgedrückt werden kann. Wir erhielten schon oben:

$$\tau = d - \alpha - \beta - \gamma,$$

und daraus, mit Benutzung der Formeln des § 2.,

$$\vartheta_a = b + c + \beta + \gamma - d,$$
$$\vartheta_b = c + a + \gamma + \alpha - d,$$

$$\vartheta_c = a + b + \alpha + \beta - d,$$
$$\varepsilon = d - a - b - c.$$

Hieraus folgt aber, dass die oben entwickelte Productenformel (63) auch mit τ', ϑ_a', ϑ_b', ϑ_c', ε' symbolisch multiplicirt werden darf. Ist nämlich Σ' ein zweistufiges, Σ ein fünfstufiges System, Σ'' das ihnen gemeinsame einstufige System von Dreiecken, so erhält man die Zahl der Dreiecke, welche Σ'' angehören, und eine der Bedingungen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, d$ erfüllen, indem man zu jedem der gestrichelten Symbole der Formel (63) eines der Symbole a', b', c', α', β', γ', d' als Factor hinzusetzt. Thut man dies z. B. mit b', c', β', γ', d', addirt die ersten 4 der erhaltenen Gleichungen und subtrahirt von der Summe die letzte, so ist dies wegen der Formel

$$\vartheta_a' = b' + c' + \beta' + \gamma' - d'$$

ganz dasselbe, als setzte man ohne Weiteres zu jedem gestrichelten Symbol ϑ_a' als Factor.

§ 5.

Die Zahl der gemeinsamen Dreiecke eines zweistufigen und eines vierstufigen gewöhnlichen Systems.

Wir setzen hier ein zweistufiges System Σ' und ein vierstufiges System Σ von Dreiecken als gegeben voraus. In diesem Falle haben wir also aus der Stammformel (59) alle diejenigen Glieder herauszuziehen, welche zwei gestrichelte und vier nichtgestrichelte Bedingungsfactoren enthalten. Demgemäss ergiebt sich für die Zahl x der den beiden Systemen gemeinsamen Dreiecke zunächst:

$$\begin{aligned}
(66)\quad x = {} & b'^2 \cdot (\alpha\gamma c a - b\gamma c a - b\alpha c a + b^2 a c) \\
& + b'\alpha' \cdot (b\gamma c a - b\alpha\gamma a - b^2 c a + b^2\gamma a + b^2\alpha a) \\
& + b'\gamma' \cdot (b\alpha c a - b\alpha\gamma c - b^2 c a + b^2\gamma c + b^2\alpha c) \\
& + b'c' \cdot (b\alpha\gamma a - b^2\gamma a - b^2\alpha a) + b'a' \cdot (b\alpha\gamma c - b^2\gamma c - b^2\alpha c) \\
& + \alpha'\gamma' \cdot (b^2 c a - b^2\gamma c - b^2\alpha a + b^2\alpha\gamma) + c'a' \cdot (b^2\gamma\alpha) + a'\gamma \cdot (b^2\alpha c) \\
& - \alpha'^2 \cdot (b^2\gamma a) - \gamma'^2 \cdot (b^2\alpha c) + a'\alpha' \cdot (b^2\gamma c - b^2\alpha\gamma) \\
& + \gamma'c' \cdot (b^2\alpha a - b^2\alpha\gamma) + a'c' \cdot (b^2\alpha\gamma) \\
& - \tau's' \cdot (\tau s\alpha\gamma - \tau s^2\alpha - \tau s^2\gamma) - \tau'\alpha' \cdot (\tau s^2\gamma) - \tau'\gamma' \cdot (\tau s^2\alpha) \\
& - \vartheta_b's' \cdot (\vartheta_b s g b - \vartheta_b s^2 b) - \vartheta_b'g' \cdot (\vartheta_b s^2 b - \vartheta_b s^2 g) \\
& - \vartheta_b'b' \cdot (\vartheta_b s^2 g).
\end{aligned}$$

Es handelt sich nun darum, diese Productenformel vermittelst der Incidenzformeln und der Formeln des § 2. so umzugestalten, dass sie eine möglichst kurze, und dabei symmetrische und sich selbst duale

Form erhält. Diesen Forderungen genügt am besten diejenige Form, in welcher von zweifachen Bedingungen nur auftreten:

$$a'^2,\ b'^2,\ c'^2,\ \alpha'^2,\ \beta'^2,\ \gamma'^2,\ a'\alpha',\ b'\beta',\ c'\gamma',$$
$$\vartheta_a's',\ \vartheta_b's',\ \vartheta_c's',\ \vartheta_a'g',\ \vartheta_b'g',\ \vartheta_c'g',\ \varepsilon'g',\ \tau's'.$$

Man hat also z. B. zu ersetzen:

$b'\alpha'$ durch $b'^2 + \alpha'^2$,

$b'c'$ durch $\alpha'^2 + \tau's' + \vartheta_a's'$ gemäss Formel (11),

$\alpha'\gamma'$ durch $b'^2 + \varepsilon'g' + \vartheta_b'g'$ gemäss Formel (12),

$\tau'\alpha'$ durch $\alpha'^2 + a'\alpha' - \varepsilon'g' - \vartheta_b'g - \vartheta_c'g'$ gemäss Formel (14).

$\vartheta_b'b'$ durch $\gamma'^2 + \alpha'^2 - b'\beta' + \vartheta_c's' + \vartheta_a's' + \tau's'$ gemäss Formel (15).

Bringt man dann auch noch die nichtgestrichelten Coefficienten der zweifachen Symbole vermittelst der Formeln (42) bis (47) auf die kürzeste Form, so gelangt man schliesslich zu der folgenden *Productenformel für die Zahl x der Dreiecke, welche einem zweistufigen und einem vierstufigen, gewöhnlichen Systeme gemeinsam sind.*

$$\begin{aligned}(67)\qquad x = {} & a'^2 \cdot b^2c^2 + b'^2 \cdot c^2a^2 + c'^2 \cdot a^2b^2 \\ & + \alpha'^2 \cdot \beta^2\gamma^2 + \beta'^2 \cdot \gamma^2\alpha^2 + \gamma'^2 \cdot \alpha^2\beta^2 \\ & + a'\alpha' \cdot \vartheta_a s^2 g + b'\beta' \cdot \vartheta_b s^2 g + c'\gamma' \cdot \vartheta_c s^2 g \\ & + \vartheta_a's' \cdot \varepsilon g^2 a + \vartheta_b's' \cdot \varepsilon g^2 b + \vartheta_c's' \cdot \varepsilon g^2 c \\ & + \vartheta_a'g' \cdot \tau s^2\alpha + \vartheta_b'g' \cdot \tau s^2\beta + \vartheta_c'g' \cdot \tau s^2\gamma \\ & + \varepsilon'g' \cdot (\tau s^2\alpha + \tau s^2\beta + \tau s^2\gamma + \psi s^2) \\ & + \tau's' \cdot (\varepsilon g^2 a + \varepsilon g^2 b + \varepsilon g^2 c + \psi g^2).\end{aligned}$$

Aus dieser Formel erhält man durch Multiplication abgeleitete Productenformeln für die Fälle, wo die Stufensumme der gegebenen, gewöhnlichen Systeme grösser als 6 ist. Wir multipliciren die Formel (67) z. B. mit a. Dann kommt:

$$\begin{aligned}xa = {} & a'^2 \cdot b^2c^2a + \beta'^2 \cdot \gamma^2\alpha^2 a + \gamma'^2 \cdot \alpha^2\beta^2 a \\ & + a'\alpha' \cdot \vartheta_a s^2 g a + \vartheta_b's' \cdot \varepsilon g^2 ab + \vartheta_c's' \,.\, \varepsilon g^2 ca \\ & + \tau's' \cdot (\varepsilon g^2 ab + \varepsilon g^2 ac + \psi g^2 s).\end{aligned}$$

Nun ist aber xa ganz dasselbe, wie das xa' der Formel (64). Also muss die rechte Seite der vorstehenden Formel sich so umgestalten lassen, dass die rechte Seite der Formel (64) zum Vorschein kommt. Zu diesem Zwecke benutzen wir die Formeln (48) bis (53) und die Formel:

$$\tau's' = a'd' - a'\alpha' - a'\beta' - a'\gamma',$$

welche aus der oben bei Formel (62) abgeleiteten Formel für die neu eingeführte Bedingung d' folgt. Wir erhalten so:

$$xa = a'^2 \cdot (\varepsilon b^2 c^2 + \tau\alpha^2\gamma^2 + \tau\alpha^2\beta^2 + 2\cdot\psi s^2 g)$$
$$+ \beta'^2 \cdot (\varepsilon a^2 b^2 + \tau\gamma^2\alpha^2 + \psi s^2 g) + \gamma'^2 \cdot (\varepsilon a^2 c^2 + \tau\beta^2\alpha^2 + \psi s^2 g)$$
$$+ a'\alpha' \cdot (\tau\beta^2\gamma^2 + \psi s^2 g) + \vartheta_b' s' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + \vartheta_c' s' \cdot \varepsilon c^2 a^2$$
$$+ \tau' s' \cdot (\varepsilon a^2 b^2 + \varepsilon c^2 a^2) + (a'd' - a'\alpha' - 2\cdot a'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\cdot \psi s^2 g,$$

oder:

$$xa = a'^2 \cdot (\varepsilon b^2 c^2 + \tau\gamma^2\alpha^2 + \tau\alpha^2\beta^2) + \beta'^2 \cdot (\tau\gamma^2\alpha^2 + \varepsilon a^2 b^2)$$
$$+ \gamma'^2 \cdot (\tau\alpha^2\beta^2 + \varepsilon c^2 a^2) + \vartheta_c' s' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + \vartheta_b' s' \cdot \varepsilon a^2 b^2$$
$$+ \tau' s' \cdot (\varepsilon c^2 a^2 + \varepsilon a^2 b^2) + a'\alpha' \cdot \tau\beta^2\gamma^2 + a'd' \cdot \psi s^2 g.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formel mit der Formel (62) giebt eine interessante Controle der Rechnung.

Die Formel (67) enthält 17 zweifache Bedingungen, und ebensoviel vierfache Bedingungen. Man erkennt aber leicht, dass nur 15 von einander unabhängige zweifache Bedingungen aufstellbar sind, welche a', b', c', α', β', γ' allein enthalten, nämlich:

$$a'^2,\ b'^2,\ c'^2,\ \alpha'^2,\ \beta'^2,\ \gamma'^2,\ a'\alpha',\ b'\beta',\ c'\gamma',$$
$$b'c',\ c'a',\ a'b',\ \beta'\gamma',\ \gamma'\alpha',\ \alpha'\beta'.$$

Führt man diese 15 Bedingungen in die Formel (67) ein, so bleiben ausserdem noch die beiden Ausartungsbedingungen $\tau' s'$ und $\varepsilon' g'$ darin. Um auch diese herauszuschaffen, definiren wir für das Dreieck zwei neue zweifache Bedingungen, *nämlich e', welche aussprechen soll, dass das Dreieck einem der ∞^1 Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, die beziehungsweise durch 4 gegebene Punkte gehen, und die zu e' duale Bedingung f'.* Um e' auszudrücken, wenden wir die Formel (67) an, indem wir Σ das gewöhnliche, vierstufige System aller die Bedingung e' erfüllenden Dreiecke sein lassen. Für dieses ergiebt sich leicht:

$$b^2c^2 = c^2a^2 = a^2b^2 = 0,\quad \beta^2\gamma^2 = \gamma^2\alpha^2 = \alpha^2\beta^2 = 1,$$
$$\vartheta_a s^2 g = \vartheta_b s^2 g = \vartheta_c' s^2 g = 1,\quad \varepsilon g^2 a = \varepsilon g^2 b = \varepsilon g^2 c = 0,$$
$$\tau s^2\alpha = \tau s^2\beta = \tau s^2\gamma = 0,\quad \psi s^2 = 1,\quad \psi g^2 = 2,$$

letzteres, weil es 2 Kegelschnitte giebt, welche durch 4 gegebene Punkte gehen und 1 gegebene Gerade berühren. Durch Einsetzung dieser Werthe erhält man die eben definirte, zweifache Bedingung e' ausgedrückt, wie folgt:

(68) $e' = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \varepsilon' g' + 2\cdot\tau' s',$

und dual entsprechend:

(69) $f' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'\alpha' + b\beta' + c'\gamma' + 2\cdot\varepsilon' g' + \tau' s'.$

Hiernach lässt sich jede der beiden Bedingungen $\tau' s'$ und $\varepsilon' g'$ durch:

$$a'^2,\ b'^2,\ c'^2,\ \alpha'^2,\ \beta'^2,\ \gamma'^2,\ a'\alpha',\ b'\beta',\ c'\gamma',\ e',\ f'$$

ausdrücken. Führen wir demgemäss e' und f' statt $\varepsilon'g'$ und $\tau's'$ in die Formel (67) ein, nachdem wir durch die Formeln (11) und (12) $\vartheta_a's'$, $\vartheta_b's'$, $\vartheta_c's'$, $\vartheta_a'g'$, $\vartheta_b'g'$, $\vartheta_c'g'$ herausgeschafft haben, so gelangen wir zu einer Productenformel, welche von zweifachen Ausartungsbedingungen ganz frei ist, nämlich zu:

$$\begin{aligned}
(70) \quad x = {} & a'^2 \cdot (b^2c^2 - \tau s^2\alpha) + b'^2 \cdot (c^2a^2 - \tau s^2\beta) + c'^2(a^2b^2 - \tau s^2\gamma) \\
& + \alpha'^2 \cdot (\beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a) + \beta'^2 \cdot (\gamma^2\alpha^2 - \varepsilon g^2 b) + \gamma'^2 \cdot (\alpha^2\beta^2 - \varepsilon g^2 c) \\
& + a'\alpha' \cdot \vartheta_a s^2 g + b'\beta' \cdot \vartheta_b s^2 g + c'\gamma' \cdot \vartheta_c s^2 g \\
& + b'c' \cdot \varepsilon g^2 a + c'a' \cdot \varepsilon g^2 b + a'b' \cdot \varepsilon g^2 c \\
& + \beta'\gamma' \cdot \tau s^2 \alpha + \gamma'\alpha' \cdot \tau s^2\beta + \alpha'\beta' \cdot \tau s^2\gamma \\
& + \tfrac{1}{3}(2f' - e' - 2a'^2 - 2b'^2 - 2c'^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 - a'\alpha' - b'\beta' \\
& \qquad - c'\gamma') \cdot \psi s^2 \\
& + \tfrac{1}{3}(2e' - f' - 2\alpha'^2 - 2\beta'^2 - 2\gamma'^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'\alpha' - b'\beta' \\
& \qquad - c'\gamma') \cdot \psi g^2.
\end{aligned}$$

Durch die hier auftretenden 17 zweifachen Bedingungen lässt sich auch vermöge der Formeln des § 2. jede zweifache Ausartungsbedingung ausdrücken. Es ergiebt sich z. B. aus Formel (23) zunächst:

$$\begin{aligned}
(71\,\mathrm{a}) \qquad \psi' = {} & \beta'\gamma' - a'^2 + \gamma'\alpha' - b'^2 + \alpha'\beta' - c'^2 \\
& + b'c' - \alpha'^2 + a'c' - \beta'^2 + a'b' - \gamma'^2 \\
& - a'\alpha' - b'\beta' - c'\gamma' - \tau's' - \varepsilon'g',
\end{aligned}$$

und daraus, mit Benutzung von (68) und (69):

$$\begin{aligned}
(71\,\mathrm{b}) \quad \psi' = {} & \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta' + b'c' + c'a' + a'b' \\
& - \tfrac{2}{3}a'^2 - \tfrac{2}{3}b'^2 - \tfrac{2}{3}c'^2 - \tfrac{2}{3}\alpha'^2 - \tfrac{2}{3}\beta'^2 - \tfrac{2}{3}\gamma'^2 \\
& - \tfrac{1}{3}a'\alpha' - \tfrac{1}{3}b'\beta' - \tfrac{1}{3}c'\gamma' - \tfrac{1}{3}e' - \tfrac{1}{3}f'.
\end{aligned}$$

Diese Formel bezieht sich auf den Fall, wo eine *Correspondenz* zwischen drei Punkten einer Ebene so stattfindet, dass immer ein Punkt die Lage der beiden übrigen bestimmt, und ergiebt dann die Zahl derjenigen Stellen der Ebene, wo drei durch die Correspondenz zusammengehörige Punkte unendlich nahe liegen. Aus der Formel (71) ersieht man, dass es erlaubt ist, die Productenformeln mit der Ausartungsbedingung ψ' zu multipliciren, vorausgesetzt, dass keins der zu multiplicirenden Symbole selbst eine Ausartungsbedingung ist. Wir thun dies zuerst mit der Formel (63). Dann kommt:

$$\begin{aligned}
(72) \qquad \psi x = {} & \psi's' \cdot (\varepsilon b^2c^2 + \varepsilon c^2a^2 + \varepsilon a^2b^2) \\
& + \psi'g' \cdot (\tau\beta^2\gamma^2 + \tau\gamma^2\alpha^2 + \tau\alpha^2\beta^2) \\
& + \psi'd' \cdot (\psi s^2 g).
\end{aligned}$$

Dann multipliciren wir auch Formel (70) mit ψ', wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned}\psi x = \psi' s'^2 \cdot (b^2c^2 - \tau s^2\alpha + \varepsilon g^2 a + c^2a^2 - \tau s^2\beta + \varepsilon g^2 b + a^2b^2 \\ - \tau s^2\gamma + \varepsilon g^2 c) \\ + \psi' g'^2 \cdot (\beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2\alpha + \gamma^2\alpha^2 - \varepsilon g^2 b + \tau s^2\beta + \alpha^2\beta^2 \\ - \varepsilon g^2 c + \tau s^2\gamma) \\ + \psi' s' g' \cdot (\vartheta_a s^2 g + \vartheta_b s^2 g + \vartheta_c s^2 g) \\ + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \psi' f' - \psi' e' - 6 \cdot \psi' s'^2 + 3 \cdot \psi' g'^2 - 3 \cdot \psi' s' g') \cdot \psi s^2 \\ + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \psi' e' - \psi' f' - 6 \cdot \psi' g'^2 + 3 \cdot \psi' s'^2 - 3 \cdot \psi' s' g') \cdot \psi g^2,\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(73) \quad \psi x = \psi' s'^2 \cdot (b^2c^2 - \tau s^2\alpha + \varepsilon g^2 a + \vartheta_a s^2 g + c^2a^2 - \tau s^2\beta \\ + \varepsilon g^2 b + \vartheta_b s^2 g + a^2b^2 - \tau s^2\gamma + \varepsilon g^2 c + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi s^2) \\ + \psi' g'^2 \cdot (\beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2\alpha + \vartheta_a s^2 g + \gamma^2\alpha^2 - \varepsilon g^2 b \\ + \tau s^2\beta + \vartheta_b s^2 g + \alpha^2\beta^2 - \varepsilon g^2 c + \tau s^2\gamma + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi g^2) \\ + \frac{2}{3} \psi' f' \cdot \psi s^2 - \frac{1}{3} \psi' e' \cdot \psi s^2 \\ + \frac{2}{3} \psi' e' \cdot \psi g^2 - \frac{1}{3} \psi' f' \cdot \psi g^2.\end{aligned}$$

Aus den beiden abgeleiteten Productenformeln (72) und (73) werden wir in § 7. weitere Schlüsse ziehen.

§ 6.

Die Zahl der gemeinsamen Dreiecke zweier dreistufiger gewöhnlicher Systeme.

Wir haben hier aus der Stammformel (59) alle diejenigen Glieder herauszuziehen, welche drei gestrichelte und drei nichtgestrichelte Bedingungsfactoren enthalten. Die so resultirende Productenformel haben wir dann vermittelst der Incidenzformeln und der Formeln des § 2. in eine Gestalt zu bringen, welche folgenden Ansprüchen genügt. Die umgestaltete Productenformel muss in sich selbst übergehen, erstens, wenn man zwei der Buchstaben a, b, c und zugleich die entsprechenden griechischen Buchstaben mit einander vertauscht, zweitens, wenn man die lateinischen Buchstaben a, b, c mit den entsprechenden griechischen Buchstaben sowie τ mit ε und s mit g vertauscht, drittens aber auch, wenn man die gestrichelten mit den nichtgestrichelten Symbolen vertauscht. Von allen Formen, welche diesen Ansprüchen genügen, scheint dem Verfasser am kürzesten die folgende zu sein. Die Zahl x der Dreiecke, welche einem dreistufigen Systeme Σ und einem

andern dreistufigen Systeme Σ' gemeinsam sind, ergiebt sich durch die Productenformel:

$$
\begin{aligned}
(74)\quad x = {} & a'^2\beta'\cdot b^2\alpha + a'^2\gamma'\cdot c^2\alpha + b'^2\alpha'\cdot a^2\beta \\
& + b'^2\gamma'\cdot c^2\beta + c'^2\alpha'\cdot a^2\gamma + c'^2\beta'\cdot b^2\gamma \\
& + \vartheta'_a s'^2\cdot \varepsilon a^2 + \vartheta'_b s'^2\cdot \varepsilon b^2 + \vartheta'_c s'^2\cdot \varepsilon c^2 \\
& + \vartheta'_a g'^2\cdot \tau\alpha^2 + \vartheta'_b g'^2\cdot \tau\beta^2 + \vartheta'_c g'^2\cdot \tau\gamma^2 \\
& + \varepsilon' a'^2\cdot \vartheta_a s^2 + \varepsilon' b'^2\cdot \vartheta_b s^2 + \varepsilon' c'^2\cdot \vartheta_c s^2 \\
& + \tau'\alpha'^2\cdot \vartheta_a g^2 + \tau'\beta'^2\cdot \vartheta_b g^2 + \tau'\gamma'^2\cdot \vartheta_c g^2 \\
& + \vartheta'_a g'^2\cdot \vartheta_b g^2 + \vartheta'_a g'^2\cdot \vartheta_c g^2 + \vartheta'_b g'^2\cdot \vartheta_c g^2 \\
& + \vartheta'_b g'^2\cdot \vartheta_a g^2 + \vartheta'_c g'^2\cdot \vartheta_a g^2 + \vartheta'_c g'^2\cdot \vartheta_b g^2 \\
& + \vartheta'_a s'^2\cdot \vartheta_b s^2 + \vartheta'_a s'^2\cdot \vartheta_c s^2 + \vartheta'_b s'^2\cdot \vartheta_c s^2 \\
& + \vartheta'_b s'^2\cdot \vartheta_a s^2 + \vartheta'_c s'^2\cdot \vartheta_a s^2 + \vartheta'_c s'^2\cdot \vartheta_b s^2 \\
& + a'b'c'\cdot \varepsilon g^2 + \alpha'\beta'\gamma'\cdot \tau s^2 + \varepsilon' g'^2\cdot abc + \tau' s'^2\cdot \alpha\beta\gamma \\
& - \varepsilon' g'^2\cdot \varepsilon g^2 - \tau' s'^2\cdot \tau s^2 - 2\cdot \varepsilon' g'^2\cdot \tau s^2 - 2\cdot \tau' s'^2\cdot \varepsilon g^2 .
\end{aligned}
$$

Man überzeugt sich leicht, dass, wie hier, so auch bei jeder Darstellung der gesuchten Zahl x die Kenntniss von mindestens 22 Anzahlen für jedes System gefordert wird.

Beispiele.

I) Will man eine dreifache, auf a, b, c, α, β, γ bezügliche Lagebedingung durch die eingeführten 22 Bedingungen ausdrücken, so gelangt man durch Anwendung der Formel (74) oft schneller zum Ziel, als durch Anwendung der Formeln des § 2. Handelt es sich z. B. darum, die Bedingung $a^2\alpha$ auszudrücken, so denkt man sich jedes der 22 gestrichelten Symbole mit $a'^2\alpha'$ multiplicirt. Dann erhält man sechsfache gestrichelte Symbole, deren Zahlenwerthe leicht erkennbar sind. Es ist nämlich $\vartheta'_a s'^2 a'^2\alpha' = 1$, $\alpha'\beta'\gamma' a'^2\alpha' = 1$, und die übrigen 20 Symbole ergeben Null. Setzt man diese Werthe ein, so kommt:

$$(75)\qquad a^2\alpha = \varepsilon a^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2 + \tau s^2,$$

eine Formel, die man auch erhält, wenn man Formel (8) mit a^2 multiplicirt. Die dual entsprechende Betrachtung giebt:

$$(76)\qquad a\alpha^2 = \tau\alpha^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2 + \varepsilon g^2.$$

II) Um die dreifache Bedingung v auszudrücken, dass ein Dreieck einer Curve $n$ter Ordnung einbeschrieben sein soll, betrachten wir das dreistufige System Σ' aller diese Bedingung erfüllenden Dreiecke, und erkennen für dieses System:

$$\vartheta'_a g'^2 = \vartheta'_b g'^2 = \vartheta'_c g'^2 = n(n-1), \quad a'b'c' = n^3,$$
$$\alpha'\beta'\gamma' = n(n-1)(2n-3),$$

wie schon in § 2. bei Beispiel II) abgeleitet ist,

$$\varepsilon' g'^2 = n(n-1)(n-2);$$

die übrigen 16 Symbole haben den Werth Null. Also kommt:

$$v = n(n-1)(\tau\alpha^2 + \tau\beta^2 + \tau\gamma^2) + 2\cdot n(n-1)\cdot(\vartheta_a g^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2)$$
$$+ n^3 \cdot \varepsilon g^2 + n(n-1)(2n-3)\cdot \tau s^2 + n(n-1)(n-2).abc$$
$$- n(n-1)(n-2)\cdot \varepsilon g^2 - 2\cdot n(n-1)(n-2)\cdot \tau s^2.$$

Vereinfacht man den erhaltenen Ausdruck und führt man dann gemäss Formel (76) die Symbole $a\alpha^2$, $b\beta^2$, $c\gamma^2$ ein, so kommt:

(77) $$v = n(n-1)\cdot(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \tau s^2)$$
$$+ n(n-1)(n-2)\cdot abc + n \cdot \varepsilon g^2.$$

Hiernach kann man bei jedem gewöhnlichen dreistufigen Dreieckssysteme leicht berechnen, wie gross die Zahl der einer Curve einbeschriebenen Dreiecke des Systems ist, wenn man für dieses System die Zahlen $a\alpha^2$, $b\beta^2$, $c\gamma^2$, abc, τs^2, εg^2 angeben kann.

Die dual entsprechende Betrachtung ergiebt für die dreifache Bedingung u, dass ein Dreieck einer Curve $r$ten Ranges umbeschrieben sein soll:

(78) $$u = r(r-1)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + \varepsilon g^2)$$
$$+ r(r-1)(r-2)\cdot \alpha\beta\gamma + r\cdot \tau s^2.$$

Will man nach Formel (77) die Zahl x derjenigen Dreiecke berechnen, welche einer Curve $n$ter Ordnung und zugleich einer Curve $m$ter Ordnung einbeschrieben sind, so hat man für das System aller der letztgenannten Curve einbeschriebenen Dreiecke die in Formel (77) erschienenen Symbole zu berechnen. Dann ergiebt sich

$$a\alpha^2 = b\beta^2 = c\gamma^2 = m(m-1)\cdot m, \quad \tau s^2 = 0,$$
$$abc = m^3, \quad \varepsilon g^2 = m(m-1)(m-2).$$

Setzt man diese Werthe in Formel (77) ein, so erhält man für die gesuchte Zahl

$$x = n(n-1)\cdot 3\cdot m^2(m-1)$$
$$+ n(n-1)(n-2)\cdot m^3 + n\cdot m(m-1)(m-2),$$

oder vereinfacht:

$$x = mn(mn-1)(mn-2),$$

was man von vornherein wissen konnte, weil eine Curve $n$ter Ordnung eine Curve $m$ter Ordnung in $m\cdot n$ Punkten schneidet. Will man die Unterscheidung der Ecken a, b, c fallen lassen, so hat man das Resultat durch die Zahl 6 der Permutationen von 3 Elementen zu dividiren.

Will man zweitens nach Formel (78) die Zahl y derjenigen Dreiecke berechnen, welche einer Curve $r$ten Ranges umbeschrieben und

zugleich einer Curve $n$ter Ordnung einbeschrieben sind, so hat man in dieser Formel zu setzen:

$$a^2\alpha = b^2\beta = c^2\gamma = 0, \quad \varepsilon g^2 = n(n-1)(n-2),$$
$$\alpha\beta\gamma = n(n-1)(2n-3), \quad \tau s^2 = 0.$$

Dann kommt für die gesuchte Zahl y:

$$y = r(r-1)\cdot n(n-1)(n-2) + r(r-1)(r-2)\cdot n(n-1)\cdot(2n-3)$$

oder:

(79) $$y = r(r-1).n(n-1)\cdot(2\cdot nr - 3\cdot n - 3\cdot r + 4).$$

Dieser Ausdruck verschwindet ausser in den Fällen $n=1$ und $r=1$ nur noch in dem Falle, wo $n=2$ und $r=2$ ist. *Die Zahl der einer Curve einbeschriebenen und zugleich einer andern Curve umbeschriebenen Dreiecke ist also nur dann gleich Null, wenn beide Curven Kegelschnitte sind.*

III) Für die Bedingung j, dass ein Dreieck in Bezug auf einen festen Kegelschnitt sich selbst conjugirt sei, ergiebt sich aus der Productenformel (74):

(80) $$j = b^2\alpha + c^2\alpha + a^2\beta + c^2\beta + a^2\gamma + b^2\gamma + 2\cdot\varepsilon g^2 + 2\cdot\tau s^2,$$

weil $a'^2\beta'$ und die analogen Symbole gleich 1, $a'b'c' = 2$, $\alpha'\beta'\gamma = 2$ und die übrigen Symbole gleich Null zu setzen sind. Aus Formel (80) erhält man also für die Zahl der in Bezug auf 2 feste Kegelschnitte sich selbst conjugirten Dreiecke den Werth 6, also den Werth 1, wenn die Ecken nicht unterschieden werden.

§ 7.

Productenformeln für das unendlich kleine Dreieck.

Das unendlich kleine Dreieck ψ (§ 1.) ist dadurch charakterisirt, dass seine drei Ecken, wie drei aufeinanderfolgende Punkte einer Curve, unendlich nahe liegen. Es hat die Constantenzahl 4, besitzt einen besonderen Punkt, den wir auch hier s nennen wollen, und einen besonderen Strahl, der auch hier g heissen soll. Die oben mit η und ζ bezeichneten dreistufigen Ausartungen des allgemeinen Dreiecks sind als einstufige Ausartungen des unendlich kleinen Dreiecks ψ zu betrachten, und sollen auch in dieser Hinsicht η und ζ genannt werden. Zwischen den 4 einfachen Bedingungen des Dreiecks ψ

$$s, g, \eta, \zeta$$

besteht eine Gleichung, welche schon oben (Nr. 41.) abgeleitet ist, und hier, wie folgt, zu schreiben ist:

$$3\cdot s + \eta = 3\cdot g + \zeta.$$

Die Productenformeln des Dreiecks ψ ergeben sich aus den Formeln

(72) und (73), wenn man noch die nichtgestrichelten Coefficienten der gestrichelten Symbole so umformt, dass auch sie sämmtlich ψ oder η oder ζ als Factor erhalten. Dies gelingt auf folgende Weise. Es ist:

$$\varepsilon a^2 b^2 + \varepsilon b^2 c^2 + \varepsilon c^2 a^2 = \varepsilon g^2 (ab + bc + ca)$$
$$= \varepsilon g^2 (a+b-g)(a+c-g) = \eta g^2,$$

ebenso:

$$\tau \alpha^2 \beta^2 + \tau \beta^2 \gamma^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 = \zeta s^2$$

Demnach folgt aus (72):

$$(81) \qquad x = s' \cdot \eta g^2 + g' \cdot \zeta s^2 + d' \cdot s^2 g$$

als die Zahl x derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche einem gegebenen einstufigen Systeme Σ' und einem davon unabhängigen, dreistufigen Systeme Σ gemeinsam sind. Hier bedeutet d' die einfache Bedingung, dass ein Σ' angehöriges unendlich kleines Dreieck einem der ∞^2 Kegelschnitte einbeschrieben ist, welche durch 3 gegebene Punkte gehen.

Um analog bei Formel (73) zu verfahren, wenden wir Formel (46) an, und erhalten:

$$\beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \alpha + \vartheta_a s^2 g + \gamma^2 \alpha^2 - \varepsilon g^2 b + \tau s^2 \beta + \vartheta_b s^2 g$$
$$+ \alpha^2 \beta^2 - \varepsilon g^2 c + \tau s^2 \gamma + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi g^2$$
$$= \tau s \beta \gamma + \tau s \gamma \alpha + \tau s \alpha \beta - \tau s^2 \alpha - \tau s^2 \beta - \tau s^2 \gamma$$
$$= \tau s (\alpha + \beta - s)(\alpha + \gamma - s) = \zeta s;$$

und dual entsprechend:

$$b^2 c^2 - \tau s^2 \alpha + \varepsilon g^2 a + \vartheta_a s^2 g + c^2 a^2 - \tau s^2 \beta + \varepsilon g^2 b + \vartheta_b s^2 g$$
$$+ a^2 b^2 - \tau s^2 \gamma + \varepsilon g^2 c + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi s^2 = \eta g.$$

Demnach folgt aus (73)

$$(82) \qquad y = s'^2 \cdot \eta g + g'^2 \cdot \zeta s + f' \cdot \frac{2s^2 - g^2}{3} + e' \cdot \frac{2g^2 - s^2}{3}$$

als die Zahl y derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche zweien von einander unabhängigen, zweistufigen Systemen Σ' und Σ gemeinsam sind. Hier bedeutet e' die zweifache Bedingung, dass ein Σ' angehöriges Dreieck einem der ∞^1 Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, welche durch 4 gegebene Punkte gehen, und f' die dual entsprechende Bedingung.

Es liegt nahe, die Productenformeln (81) und (82) so umzugestalten, dass sie nur die auf s', g', η', ζ' bezüglichen Symbole enthalten. Um zunächst d' zu entfernen, gehen wir auf die oben für das allgemeine Dreieck entwickelten Formeln zurück. In § 4. ergab sich:

$$d' - a' - b' - c' = \varepsilon'.$$

Ferner folgt aus (71a):

$$\psi' + \tau' s' + \varepsilon' g' = \beta' \gamma' + \gamma' \alpha' + \alpha' \beta' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2$$
$$+ b'c' + c'a' + a'b' - a'^2 - b'^2 - c'^2 - a'\alpha' - b'\beta' - c'\gamma'.$$

Multiplicirt man die linken Seiten dieser beiden Formeln mit einander, ebenso die rechten Seiten, und setzt dann die erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man:

$$\psi' d' - 3 \cdot \psi' s' + \tau' s' d' + \varepsilon' g' d' - 3 \cdot \tau' s'^2 - \varepsilon' g' a' - \varepsilon' g' b' - \varepsilon' g' c'$$
$$= \varepsilon' b' c' + \varepsilon' c' a' + \varepsilon' a' b' - \varepsilon' a'^2 - \varepsilon' b'^2 - \varepsilon' c'^2 - \varepsilon' g' a' - \varepsilon' g' b' - \varepsilon' g' c'$$

oder:

$$(83) \qquad \psi' d' = 3 \cdot \psi' s' - \tau' s' d' - \varepsilon' g' d' + 3 \cdot \tau' s'^2 + 3 \cdot \varepsilon' g'^2$$
$$+ \varepsilon'(a' + b' - g')(a' + c' - g').$$

Nun ist $\varepsilon'(a'+b'-g')(a'+c'-g') = \eta'$. Um auch $\varepsilon' g' d'$ und $\tau' s' d'$ zu bestimmen, beachten wir, dass ein die Definition von ε erfüllendes Dreieck nur dann einem Kegelschnitte einbeschrieben sein kann, wenn derselbe ausgeartet ist, dass also bei einem $\varepsilon' g' d'$ erfüllenden Dreiecke die drei Ecken a, b, c nothwendig irgendwo auf einer der drei Geraden liegen müssen, welche den Punkt der Bedingung g' mit einem der drei Punkte verbinden, die von der Bedingung d' als gegeben vorausgesetzt werden; dann besteht nämlich der durch die 3 Punkte von d' gehende Kegelschnitt aus der erwähnten Geraden und der die beiden übrigen Punkte von d' verbindenden Geraden. Folglich ist:

$$\varepsilon' g' d' = 3 \cdot \varepsilon g'^2 \quad \text{und ebenso:} \quad \tau' s' d' = 3 \cdot \tau' s'^2.$$

Folglich ergiebt sich aus (83) die Formel:

$$(84) \qquad \psi' d' = 3 \cdot \psi' s' + \eta'.$$

Ebenso oder auch durch Formel (41) erhält man:

$$(85) \qquad \psi' d' = 3 \cdot \psi' g' + \zeta'.$$

Aus (84) und (85) ergeben sich durch Multiplication mit s', g', s'^2, g'^2 und Benutzung der Incidenzformeln:

$$(86) \qquad \psi' d' s' = 3 \cdot \psi' s'^2 + \eta' s' = 3 \cdot \psi' s'^2 + 3 \cdot \psi' g'^2 + \zeta' s',$$
$$(87) \qquad \psi' d' g' = 3 \cdot \psi' s'^2 + 3 \cdot \psi' g'^2 + \eta' g' = 3 \cdot \psi' g'^2 + \zeta' g',$$
$$(88) \qquad \psi' d' s'^2 = \eta' s'^2 = 3 \cdot \psi' s'^2 g' + \zeta' s'^2,$$
$$(89) \qquad \psi' d' g'^2 = 3 \cdot \psi' s'^2 g' + \eta' g'^2 = \zeta' g'^2.$$

Um zweitens auch $\psi' e'$ auszudrücken, schreiben wir die Formel (68), wie folgt:

$$e' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 - a'\alpha' - b'\beta' - c'\gamma' = \varepsilon' g' + 2 \cdot \tau' s',$$

und die Formel (71a) folgendermassen:

$$\psi' + \tau' s' + \varepsilon' g' = \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2$$
$$+ b'c' + c'a' + a'b' - a'^2 - b'^2 - c'^2 - a'\alpha' - b'\beta' - c'\gamma'.$$

Dann multipliciren wir sowohl die linken Seiten, wie auch die rechten Seiten mit einander, und erhalten:

$$\begin{aligned}\psi'e' &- 6\cdot\psi'g'^2 - 3\cdot\psi's'^2 + \tau's'e' + \varepsilon'g'e' \\ &- 2\cdot\tau's'^2\alpha' - 2\cdot\tau's'^2\beta' - 2\cdot\tau's'^2\gamma' - \varepsilon'g'^2a' - \varepsilon'g'^2b' - \varepsilon'g'^2c' \\ &= \varepsilon'g'b'c' + \varepsilon'g'c'a' + \varepsilon'g'a'b' - 2\cdot\varepsilon'g'^2a' - 2\cdot\varepsilon'g'^2b' - 2\cdot\varepsilon'g'^2c' \\ &+ 2\cdot\tau's'\beta'\gamma' + 2\cdot\tau's'\gamma'\alpha' + 2\cdot\tau's'\alpha'\beta' - 4\cdot\tau's'^2\alpha' - 4\cdot\tau's'^2\beta' - 4\cdot\tau's'^2\gamma',\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\psi'e' &= 6\cdot\psi'g'^2 + 3\cdot\psi's'^2 - \tau's'e' - \varepsilon'g'e' \\ &+ \varepsilon g'(a'+b'-g')(a'+c'-g') \\ &+ 2\cdot\tau's'(\alpha'+\beta'-s')(\alpha'+\gamma'-s').\end{aligned} \tag{90}$$

Von den 6 Gliedern auf der rechten Seite dieser Gleichung sind das fünfte und sechste bezüglich $\eta'g'$ und $2\cdot\zeta's'$. Es handelt sich also nur noch darum, $\tau's'e'$ und $\varepsilon'g'e'$ zu bestimmen. Ein durch die 4 Punkte der Bedingung e' gehender Kegelschnitt kann nur dann ein einbeschriebenes Dreieck von der Definition τ' oder ε' enthalten, wenn er zu einem der drei durch die 4 Punkte bestimmten Geradenpaare wird. Dann muss aber der Punkt s' des Dreiecks τ' in den Schnittpunkt des Geradenpaares fallen, und die Gerade g' des Dreiecks ε' in eine der beiden Geraden. Folglich kann keine der beiden dreifachen Bedingungen $\tau's'e'$ und $\varepsilon'g'e'$ jemals erfüllt werden. Deshalb ergiebt sich aus (90):

$$\psi'e' = 6\cdot\psi'g'^2 + 3\cdot\psi's'^2 + \eta'g' + 2\cdot\zeta's'. \tag{91}$$

Die dual entsprechende Betrachtung liefert:

$$\psi'f' = 6\cdot\psi's'^2 + 3\cdot\psi'g'^2 + \zeta's' + 2\cdot\eta'g'. \tag{92}$$

Die in den eben abgeleiteten Gleichungen (84), (85), (91), (92) gefundenen Ausdrücke für $\psi'd'$, $\psi'e'$, $\psi'f'$ setzen wir nun in die beiden Productenformeln (81) und (82) ein. Dadurch erhalten wir die folgenden Resultate:

I) *Die Zahl x_{13} der unendlich kleinen Dreiecke, welche einem einstufigen Systeme Σ' und einem davon unabhängigen, dreistufigen Systeme Σ gemeinsam sind, ergiebt sich aus:*

$$\begin{aligned}x_{13} &= s'\cdot\eta g^2 + g'\cdot\zeta s^2 + (3\cdot s'+\eta')\cdot s^2g \\ &= s'\cdot\eta g^2 + g'\cdot\zeta s^2 + (3\cdot g'+\zeta')\cdot s^2g.\end{aligned} \tag{93}$$

II) *Die Zahl x_{22} der unendlich kleinen Dreiecke, welche zweien von einander unabhängigen, zweistufigen Systemen Σ' und Σ von unendlich kleinen Dreiecken gemeinsam sind, ergiebt sich aus:*

$$x_{22} = s'^2\cdot\eta g + g'^2\cdot\zeta s + \eta'g'\cdot s^2 + \zeta's'\cdot g^2 + 3\cdot s'^2\cdot s^2 + 3\cdot g'^2\cdot g^2. \tag{94}$$

Wegen der durch die Formeln (86) bis (89) ausgedrückten Beziehungen kann man diese Productenformeln noch in vielen anderen Formen schreiben, z. B. Formel (93) in den beiden Formen:

(95) $$x_{13} = s' \cdot g^2\eta + g' \cdot s^2\eta + \zeta' \cdot s^2 g,$$

(96) $$x_{13} = s' \cdot g^2\zeta + g' \cdot s^2\zeta + \eta' \cdot s^2 g.$$

Von den abgeleiteten Productenformeln erwähnen wir diejenigen, welche auf die Fälle Bezug nehmen, wo das eine gegebene System zweistufig, das andere dreistufig ist und wo beide Systeme dreistufig sind. Multiplicirt man (93) mit s' oder (94) mit s, so ergiebt sich beide Mal nach Benutzung der Formeln (86) bis (89) ein und derselbe Ausdruck für *die Zahl* sx_{23} *derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche einem zweistufigen Systeme* Σ' *und einem dreistufigen Systeme* Σ *gemeinsam sind, und welche dabei ihren Punkt* s *auf einer gegebenen Geraden haben. Diese Zahl erhält man nämlich aus:*

(97) $$sx_{23} = s'^2 \cdot \eta g^2 + (s'^2 + g'^2) \cdot \zeta s^2 + (3 \cdot s'^2 + 3 \cdot g'^2 + \zeta' s') \cdot s^2 g.$$

Die dual entsprechende Zahl gx_{23} *ergiebt sich aus:*

(98) $$gx_{23} = g'^2 \cdot \zeta s^2 + (s'^2 + g'^2) \cdot \eta g^2 + (3 \cdot s'^2 + 3 \cdot g'^2 + \eta' g') \cdot s^2 g.$$

Multiplicirt man ferner (93) mit s'^2 oder (94) mit $s's$, so erhält man beide Mal einen und denselben Ausdruck *für die Zahl* $s^2 x_{33}$ *derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche zwei dreistufigen Systemen* Σ *und* Σ' *gemeinsam sind, und welche dabei ihren Punkt* s *in einem gegebenen Punkte haben. Für diese Zahl ergiebt sich nämlich:*

(99) $$s^2 x_{33} = s'^2 g' \cdot \zeta s^2 + \zeta' s'^2 \cdot s^2 g + 3 \cdot s'^2 g' \cdot s^2 g.$$

Für die dual entsprechende Zahl $g^2 x_{33}$ erhält man:

(100) $$g^2 x_{33} = s'^2 g' \cdot \eta g^2 + \eta' g'^2 \cdot s^2 g + 3 \cdot s'^2 g' \cdot s^2 g.$$

Es gelingt auch, in dem Falle, wo das eine System zweistufig, das andere dreistufig ist, die Zahl ηx_{23} auszudrücken, welche angeben soll, wie oft es bei den ∞^1 gemeinsamen, unendlich kleinen Dreiecken vorkommt, dass die drei unendlich nahen gemeinsamen Punkte in gerader Linie liegen. Zu diesem Zwecke gehen wir auf die Formel (81) zurück, weil bei dieser keins der gestrichelten Symbole ein Ausartungssymbol ist, und multipliciren dieselbe mit η'. Dann kommt:

$$\eta x_{23} = \eta' s' \cdot \eta g^2 + \eta' g' \cdot \zeta s^2 + \eta' d' \cdot s^2 g.$$

Dann ersetzen wir gemäss Formel (86) $\eta' s'$ durch $3g'^2 + \zeta' s'$ und $\eta' d'$ durch $3 \cdot \eta' g'$. Dass $\eta' d' = 3 \cdot \eta' g'$ ist, ergiebt sich direct geometrisch aus dem Umstande, dass die Erfüllung der Bedingung $\eta' d'$ nur durch einen in ein Geradenpaar zerfallenen Kegelschnitt ermöglicht wird. Daher kommt:

(101) $$\eta x_{23} = \zeta' s' \cdot \eta g^2 + \eta' g' \cdot \zeta s^2 + 3 \cdot g'^2 \cdot \eta g^2 + 3 \cdot \eta' g' \cdot s^2 g,$$

und dual entsprechend:

(102) $$\zeta x_{23} = \eta' g' \cdot \zeta s^2 + \zeta' s' \cdot \eta g^2 + 3 \cdot s'^2 \cdot \zeta s^2 + 3 \cdot \zeta' s' \cdot s^2 g.$$

Multiplicirt man dann (101) mit g', so gelangt man zu der Zahl $\eta g x_{33}$, welche angiebt, wie oft es bei den ∞^2 gemeinsamen unendlich kleinen Dreiecken von zwei dreistufigen Systemen vorkommt, dass die drei unendlich nahen, gemeinsamen Punkte in einer geraden Linie liegen, welche einen gegebenen Punkt trifft. Man erhält:

$$(103) \quad \eta g x_{33} = \eta g^2 \cdot \eta' g'^2 + \zeta s^2 \cdot \eta' g'^2 + \eta g^2 \cdot \zeta' s'^2 + 3 \cdot s^2 g \cdot \eta' g'^2 + 3 \cdot \eta g^2 \cdot s'^2 g',$$

und dual entsprechend:

$$(104) \quad \zeta s x_{33} = \zeta s^2 \cdot \zeta' s'^2 + \eta g^2 \cdot \zeta' s'^2 + \zeta s^2 \cdot \eta' g'^2 + 3 \cdot s^2 g \cdot \zeta' s'^2 + 3 \cdot \zeta s^2 \cdot s'^2 g'.$$

§ 8.

Lösung der Anzahlprobleme der dreipunktigen Berührung durch die Formeln des § 7.*)

Fasst man auf einer Plancurve immer je 3 consecutive Punkte oder Tangenten zu einem unendlich kleinen Dreieck zusammen, so erhält man ein einstufiges System solcher Dreiecke, dessen Punkte s die Curve selbst beschreiben, dessen Strahlen g dieselbe einhüllen, dessen Ausartungen von der Definition η in den Wendetangenten liegen, und dessen Ausartungen ζ durch die Spitzen der Curve erzeugt werden. Demnach ist für ein solches einstufiges System zu setzen:

$$s = n, \quad g = n', \quad \eta = \varkappa', \quad \zeta = \varkappa$$

wo n die Ordnung der Curve bezeichnet, n' ihren Rang, $\varkappa'$ die Zahl ihrer Wendetangenten, $\varkappa$ die Zahl ihrer Spitzen. Die zwischen s, g, η, ζ bestehende Gleichung liefert für das durch die Curve erzeugte, specielle System eine Plücker'sche Formel, wie schon in dem ersten Beispiele zu § 2. erkannt ist.

Hat man nun ein einstufiges Curvensystem, so erhält man ein zweistufiges System von unendlich kleinen Dreiecken, wenn man in derselben Weise auf jeder der ∞^1 Curven je drei consecutive Punkte zu einem unendlich kleinen Dreieck zusammenfasst. Für ein so definirtes zweistufiges System von Dreiecken ψ bekommen die Symbole des § 7. die folgenden Werthe:

$$s^2 = \mu, \quad g^2 = \mu', \quad \eta g = k', \quad \zeta s = k,$$

wo μ angiebt, wieviel Curven des Curvensystems durch einen gegebenen Punkt gehen, μ', wieviel eine gegebene Gerade berühren, wo ferner k' den Rang der von den Wendetangenten eingehüllten Curve und k die Ordnung der von den Spitzen beschriebenen Curve bezeichnen.

*) Diese Anwendung habe ich inzwischen schon durch die Gött. Nachr. (Juniheft 1880) publicirt.

In derselben Weise erhält man aus einem zweistufigen Curvensysteme ein dreistufiges System von unendlich kleinen Dreiecken, für welches man zu setzen hat:

$$s^2 g = M, \quad \eta g^2 = K', \quad \zeta s^2 = K,$$

wo M angiebt, wieviel Curven des zweistufigen Systems eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, wo K' angiebt, wieviel Curven eine gegebene Wendetangente haben, und wo K angiebt, wieviel Curven eine gegebene Spitze haben. Man bemerke noch, dass andere auf η und ζ bezügliche Symbole, als die angeführten ηg, ζs, ηg^2, ζs^2 auch von Ausartungen erfüllt werden können. Beispielsweise würde die Bedingung ηs^2 erstens von jeder Curve erfüllt werden, von welcher ein Wendepunkt in den durch die Bedingung s^2 gegebenen Punkt fällt, zweitens aber auch von jeder ausgearteten Curve, welche eine einfache oder mehrfache Ordnungsgerade durch den gegebenen Punkt der Bedingung s^2 schickt.

Wenn nun die von zwei Curven in der erörterten Weise erzeugten Systeme von unendlich kleinen Dreiecken *ein unendlich kleines Dreieck gemeinsam haben*, so heisst dies nichts anderes, als dass die beiden Curven *sich dreipunktig berühren.* Deshalb erhält man aus den Formeln (93), (94) und (97) bis (104) unmittelbar die auf dreipunktige Berührung bezüglichen Anzahlen, sobald man nur die soeben für die Symbole s, g, η, ζ, s^2, g^2, ηg, ζs, $s^2 g$, ηg^2, ζs^2 erkannten Werthe n, n', $\varkappa'$, $\varkappa$, μ, μ', k', k, M, K', K einsetzt. Die letztgenannten Buchstaben sollen dabei immer den Index i bekommen, wenn sie sich auf eine Curve oder ein Curvensystem beziehen, welches schon mit Σ_i bezeichnet ist. Aus Formel (93) ergiebt sich also das Resultat:

93a) *Ein gegebenes, zweistufiges Curvensystem Σ_2 enthält immer*

$$n_1 \cdot K_2' + n_1' \cdot K_2 + (3 \cdot n_1 + \varkappa_1') \cdot M_2$$

*Curven, welche eine gegebene Curve Σ_1 dreipunktig berühren.**)

Ebenso folgt aus (94) unmittelbar der Satz:

(94a) *Wenn zwei einstufige Curvensysteme Σ_1 und Σ_2 gegeben sind, so kommt es*

$$\mu_1 \cdot k_2' + \mu_1' \cdot k_2 + k_1' \cdot \mu_2 + k_1 \cdot \mu_2' + 3 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 + 3 \cdot \mu_1' \cdot \mu_2'$$

*Male vor, dass eine Curve des einen Systems eine Curve des andern Systems dreipunktig berührt.***)

---

*) Diese Anzahl bestimmte zuerst Halphen im Bull. de la Soc. math., tome 5, p. 14, durch Correspondenzbetrachtungen, dann auch Zeuthen in. d. Comptes rendus, tome 89, p. 901 durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl.

**) Diese Anzahl bestimmte Zeuthen durch dieselbe Methode, wie die vorhergehende in den Comptes rendus, tome 89, p. 947.

Aus (97) und (98) folgt:

(97a) *Sind ein einstufiges Curvensystem* Σ_1 *und ein zweistufiges* Σ_2 *gegeben, so kommt es* ∞^1 *Male vor, dass zwei den beiden Systemen angehörige Curven sich in denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren. Die dadurch hervorgerufenen* ∞^1 *Berührungspunkte bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$\mu_1 \cdot (K_2 + K_2' + 3 \cdot M_2) + \mu_1' \cdot (K_2 + 3 \cdot M_2) + k_1 \cdot M_2, ^{*)}$$

und die Tangenten in den Berührungspunkten hüllen eine Curve ein vom Range:

$$\mu_1 \cdot (K_2' + 3 \cdot M_2) + \mu_1' \cdot (K_2 + K_2' + 3 \cdot M_2) + k_1' \cdot M_2.$$

Aus (99) und (100) folgt:

(99a) und (100a) *Sind zwei zweistufige Curvensysteme* Σ_1 *und* Σ_2 *gegeben, so kommt es* ∞^2 *Male vor, dass zwei den beiden Systemen angehörige Curven sich in denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren, und zwar geschieht dies in jedem Punkte der Ebene so oft, wie die folgende Anzahl angiebt:*

$$M_1 \cdot K_2 + K_1 \cdot M_2 + 3 \cdot M_1 \cdot M_2.$$

Ferner tritt dabei jeder Strahl der Ebene so oft als Berührungstangente auf, wie die folgende Zahl angiebt:

$$M_1 \cdot K_2' + K_1' \cdot M_2 + 3 \cdot M_1 \cdot M_2.$$

Endlich liefern die Formeln (101) bis (104) die folgenden Sätze.

(101a) und (102a). *Bei den* ∞^1 *dreipunktigen Berührungen zwischen einer Curve eines gegebenen einstufigen Curvensystems* Σ_1 *und einer Curve eines gegebenen zweistufigen Curvensystems* Σ_2 *kommt es eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei unendlich nahen Schnittpunkte in gerader Linie liegen, und zwar so oft, wie die folgende Zahl angiebt:*

$$k_1 \cdot K_2' + k_1' \cdot K_2 + 3\mu_1' \cdot K_2' + 3 \cdot k_1' \cdot M_2.$$

Es kommt ferner auch eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei an einer Berührungsstelle unendlich nahen gemeinsamen Tangenten sich in demselben Punkte schneiden, und zwar so oft, wie die folgende Zahl angiebt:

$$k_1' \cdot K_2 + k_1 \cdot K_2' + 3\mu_1 \cdot K_2 + 3 \cdot k_1 \cdot M_2.$$

(103a) u. (104a). *Bei den* ∞^2 *dreipunktigen Berührungen zwischen zwei Curven zweier zweistufiger Curvensysteme* Σ_1 *und* Σ_2 *kommt es* ∞^1 *mal vor, dass die drei unendlich nahen Schnittpunkte in einer geraden Linie liegen. Die so erzeugten* ∞^1 *geraden Linien hüllen eine Curve ein vom Range:*

---

*) Diese Anzahl, sowie alle folgenden Anzahlen dieses Paragraphen dürften neu sein. Die Formeln (97a) und (99a) theilte ich Herrn Zeuthen brieflich mit, er fand dieselben dann auch durch seine Methode.

$$K_1'\cdot K_2' + K_1\cdot K_2' + K_1'\cdot K_2 + 3\cdot M_1\cdot K_2' + 3\cdot K_1'\cdot M_2.$$

Es kommt ferner auch ∞^1 mal vor, dass die drei an einer Berührungsstelle unendlich nahen gemeinsamen Tangenten sich in demselben Punkte schneiden. Die so erzeugten ∞^1 Punkte bilden eine Curve von der Ordnung

$$K_1\cdot K_2 + K_1'\cdot K_2 + K_1\cdot K_2' + 3\cdot M_1\cdot K_2 + 3\cdot K_1\cdot M_2.$$

Aus den Formeln des § 7. resultiren unmittelbar auch alle diejenigen Zahlen, welche sich auf die gemeinsamen unendlich kleinen Dreiecke von *mehr als zwei* Systemen beziehen. Der Kürze wegen haben wir diese Zahlen selbst nicht angeführt. Statt dessen wollen wir aber hier diejenigen Zahlen schreiben, welche sich aus ihnen für die dreipunktige Berührung zwischen Curven ergeben. Wenn zunächst ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und zwei zweistufige Curvensysteme Σ_2 und Σ_3 als gegeben vorliegen, so kann man durch Formel (94) die Zahl aller unendlich kleinen Dreiecke finden, die sowohl in dem durch Σ_1 erzeugten zweistufigen Systeme, wie auch in demjenigen zweistufigen Systeme liegen, welches den durch Σ_2 und Σ_3 erzeugten Systemen gemeinsam ist. Man hat also in Formel (94) statt der gestrichelten Symbole s'^2, g'^2, $\xi' s'$, $\eta' g'$ die Zahlen μ_1, μ_1', k_1, k_1' einzusetzen, und die Werthe der nicht-gestrichelten Symbole aus (99a), (100a), (103a), (104a) zu entnehmen. So gelangt man zu folgendem Satze:

(105) *Sind ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und zwei zweistufige Curvensysteme Σ_2 und Σ_3 gegeben, so kommt es eine endliche Anzahl mal vor, dass sich drei den drei Systemen angehörige Curven in denselben drei unendlich nahen Punkten berühren*, und zwar ist diese Anzahl gleich:

$$\begin{aligned}
&\mu_1\cdot(K_2K_3' + K_2'K_3 + K_2'K_3' + 3M_2K_3 + 3M_2K_3' + 3K_2M_3 \\
&\qquad + 3K_2'M_3 + 9M_2M_3) \\
&+ \mu_1'\cdot(K_2'K_3 + K_2K_3' + K_2K_3 + 3M_2K_3' + 3M_2K_3 + 3K_2'M_3 \\
&\qquad + 3K_2M_3 + 9M_2M_3) \\
&+ k_1\cdot(M_2K_3' + K_2'M_3 + 3M_2M_3) \\
&+ k_1'\cdot(M_2K_3 + K_2M_3 + 3M_2M_3).
\end{aligned}$$

Zu ganz demselben Ausdrucke gelangt man auch, wenn man die Curvensysteme Σ_1 und Σ_2 zusammenfasst, und dann mit Σ_3 durch die Formel (93) verbindet.

Sind drei zweistufige Curvensysteme Σ_1, Σ_2, Σ_3 gegeben, so benutzt man zunächst (99a), (100a), (103a), (104a), und darauf (97), (98), (101), (102). Dadurch kommt man zu folgendem Satze:

(106) *Bei drei gegebenen zweistufigen Systemen Σ_1, Σ_2, Σ_3 kommt es ∞^1 mal vor, dass sich drei den drei Systemen angehörige Curven in*

denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren. Die ∞^1 *Berührungspunkte bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$M_1\cdot(K_2K_3+K_2K_3'+K_2'K_3)+M_2\cdot(K_3K_1+K_3K_1'+K_3'K_1)$$
$$+M_3\cdot(K_1K_2+K_1K_2'+K_1'K_2)+3M_2M_3\cdot(2K_1+K_1')$$
$$+3M_3M_1(2K_2+K_2')$$
$$+3M_1M_2(2K_3+K_3')+18M_1M_2M_3.$$

Die ∞^1 *Berührungstangenten hüllen eine Curve ein, deren Rang sich ergiebt, wenn man in diesem Ausdruck immer* K *mit* K' *vertauscht.*

Ferner kommt es bei den ∞^1 *Berührungen eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei unendlich nahen Schnittpunkte in gerader Linie liegen, und zwar ist diese Anzahl gleich*

$$K_1'K_2K_3+K_1K_2'K_3+K_1K_2K_3'+K_1K_2'K_3'+K_1'K_2K_3'+K_1'K_2'K_3$$
$$+3M_1\cdot(K_2K_3'+K_2'K_3+K_2'K_3')+3M_2\cdot(K_3K_1'+K_3'K_1+K_3'K_1')$$
$$+3M_3(K_1K_2'+K_1'K_2+K_1'K_2')+9M_2M_3K_1'+9M_3M_1K_2'+9M_1M_2K_3'.$$

Ebenso kommt es eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei an einer Berührungsstelle unendlich nahen Tangenten sich in demselben Punkte schneiden, und zwar erhält man diese Anzahl, wenn man in dem vorstehenden Ausdruck immer K *mit* K' *vertauscht.*

(107) *Sind endlich vier zweistufige Curvensysteme* Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 *gegeben, so gelangt man auf mehreren Wegen zu dem folgenden Ausdruck für die Zahl, welche angiebt, wie oft sich vier den vier Systemen angehörige Curven in denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren:*

$$M_1\cdot(K_2'K_3K_4+K_2K_3'K_4+K_2K_3K_4'+K_2K_3'K_4'+K_2'K_3K_4'$$
$$+K_2'K_3'K_4)$$
$$+M_2\cdot(\cdots\cdots)+M_3\cdot(\cdots\cdots)+M_4\cdot(\cdots\cdots)$$
$$+3M_1M_2\cdot(K_3K_4+K_3'K_4'+2K_3K_4'+2K_3'K_4)+3M_1M_3\cdot(\cdots)$$
$$+3M_1M_4\cdot(\cdots)+3M_2M_3\cdot(\cdots)+3M_2M_4\cdot(\cdots)+3M_3M_4\cdot(\cdots)$$
$$+18M_2M_3M_4\cdot(K_1+K_1')+18M_1M_3M_4\cdot(K_2+K_2')$$
$$+18M_1M_2M_4\cdot(K_3+K_3')+18M_1M_2M_3\cdot(K_4+K_4')+54M_1M_2M_3M_4,$$

wo, der Kürze wegen, einige Male Punkte für Ausdrücke gesetzt sind, welche sich durch Analogie leicht bilden lassen. Der Umstand, dass die Ausdrücke in (106) und (107) durch Vertauschung der Indices in sich selbst übergehen, liefert eine Controle der Berechnung.

§ 9.

Vermuthete Formeln für die zweimalzweipunktige Berührung.

Nach Ableitung der Anzahlen für die dreipunktige Berührung aus den Formeln des § 7. liegt es nahe, daran zu denken, ob man nicht

auch zu den Anzahlen für die zweimalzweipunktige Berührung auf folgendem Wege gelangen kann. Man fasst auf einer Plancurve je 2 Punkte b und c und den Schnittpunkt a ihrer beiden Tangenten β und γ zu einem Dreieck zusammen. Dadurch ordnet man jeder Plancurve ein zweistufiges Dreieckssystem, jedem i-stufigen Curvensystem ein $(2+i)$-stufiges Dreieckssystem zu, und man erkennt, dass, wenn zwei Curven sich zweimalzweipunktig berühren, ihre so erzeugten Dreieckssysteme ein gemeinsames Dreieck besitzen, dessen Ecken b und c die Berührungspunkte, und dessen Seiten γ und β die Berührungstangenten sind. Gegen die Anwendbarkeit der Formeln der §§ 4., 5., 6. auf solche Dreieckssysteme spricht aber der Umstand, dass wir bei der Ableitung jener Formeln den Systemen die am Schluss von § 1. besprochene Beschränkung auferlegt haben, *gewöhnliche* Systeme zu sein, und dass das durch eine Curve in angegebener Weise erzeugte zweistufige Dreieckssystem kein gewöhnliches ist, weil es nicht eine endliche Anzahl, sondern ∞^1 Dreiecke enthält, welche die in § 1. für ψ, ω_a, ω_α ausgesprochenen Definitionen erfüllen. Ein Dreieck von der Definition ψ wird nämlich durch je zwei unendlich nahe Punkte erzeugt, ferner ein Dreieck ω_a auf jeder Wendetangente durch die beiden unendlich nahen Berührungspunkte b und c und jeden beliebigen Punkt a auf der Wendetangente, endlich ein Dreieck ω_α in jedem Rückkehrpunkte durch die beiden unendlich nahen Tangenten β und γ und jeden beliebigen Strahl α, der durch den Rückkehrpunkt geht. Wenn nun aber auch die Formeln der §§ 2. bis 6. auf solche Systeme von uns nicht angewendet werden dürfen, so kann man doch speciell für solche Systeme alle die Betrachtungen anstellen, welche den in § 6. angestellten analog sind. Analog den Formeln zweiter Dimension des § 2. erhält man dann mit vielen Bestätigungen die Plücker'schen Formeln für eine feste Curve, und man erkennt, dass die Anwendung der Formeln des § 2. auf die Dreieckssysteme, welche in der angegebenen Weise durch je 2 Tangenten einer Plancurve hervorgerufen werden, richtige Resultate liefert, sobald man die Formeln, welche zweistufige Ausartungssymbole enthalten, ausschliesst, und bei der Deutung der einstufigen Ausartungssymbole die folgenden, einleuchtenden Annahmen macht:

1) Die Ausartungsbedingung ϑ_b oder ϑ_c wird durch jedes aus drei consecutiven Punkten der Curve bestehende Dreieck erfüllt, und ausserdem durch jedes Dreieck, welches aus einer Tangente und einer von ihrem Berührungspunkte ausgehenden, anderswo berührenden Tangente besteht, wobei der Berührungspunkt zum Punkte s, die zweitgenannte Tangente zum Strahle g, ihr Berührungspunkt zum Punkte b resp. c, und die erstgenannte Tangente zum Strahle β resp. γ wird.

2) Die Ausartungsbedingung ϑ_a wird in drei Fällen erfüllt, erstens

durch jedes aus drei consecutiven Punkten bestehende Gebilde, zweitens durch jedes Dreieck, bei welchem a ein beliebiger Punkt einer Wendetangente ist und b und c auf ihr im Berührungspunkte unendlich nahe liegen, drittens durch jedes Dreieck, bei welchem α ein beliebiger Strahl durch einen Rückkehrpunkt ist, β und γ in der zugehörigen Rückkehrtangente unendlich nahe liegen.

3) Die Ausartungsbedingung ε wird zweimal durch jedes Dreieck erfüllt, bei welchem a ein beliebiger Punkt einer Doppeltangente oder einer Wendetangente ist, b und c die zugehörigen, getrennten resp. unendlich nahen Berührungspunkte sind.

4) Die Ausartungsbedingung τ wird zweimal durch jedes Dreieck erfüllt, bei welchem α ein beliebiger Strahl durch einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt ist, β und γ die zugehörigen, getrennten resp. unendlich nahen Tangenten sind.

Hiernach erhält man für die in § 2. auftretenden, zweifachen Symbole die folgenden Werthe, wenn n die Ordnung der vorliegenden Curve bedeutet, n' ihren Rang, δ die Zahl ihrer Doppelpunkte, $\varkappa$ die Zahl ihrer Spitzen, δ' die Zahl ihrer Doppeltangenten, $\varkappa'$ die Zahl ihrer Wendetangenten.

$$a^2 = n'(n'-1),\quad b^2 = c^2 = 0,\quad \alpha^2 = n(n-1),\quad \beta^2 = \gamma^2 = 0,$$
$$b\beta = c\gamma = nn',\quad ab = ac = n(n'-1),\quad bc = n^2,$$
$$a\beta = a\gamma = n'(n-1),\quad \beta\gamma = n'^2,\quad \varepsilon g = 0,\quad \varepsilon b = \varepsilon c = 0,\quad \tau s = 0,$$
$$\tau\beta = \tau\gamma = 0,$$

aber

$$\varepsilon a = 2\cdot(\delta' + \varkappa'),\quad \tau\alpha = 2\cdot(\delta + \varkappa),\quad \vartheta_a a = n + \varkappa',\quad \vartheta_a\alpha = n' + \varkappa,$$

ferner

$$\vartheta_a s = n,\quad \vartheta_a g = n',$$
$$\vartheta_b s = \vartheta_c s = n + n(n'-2),\quad \vartheta_b g = \vartheta_c g = n' + n'(n-2),$$
$$\vartheta_b b = \vartheta_c c = n + n(n-2),\quad \vartheta_b\beta = \vartheta_b\gamma = n' + n'(n'-2).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formeln zweiter Dimension des § 2. erhält man entweder Identitäten oder Plücker'sche Formeln, und ausserdem das Resultat:

$$(108)\qquad a\alpha = 2nn' - (3n+\varkappa') = 2nn' - (3n'+\varkappa).$$

Zu diesem Werthe für $a\alpha$ kann man auch direct durch das Correspondenzprincip auf folgendem Wege gelangen. Man nehme eine feste Gerade und einen festen Punkt P, ziehe dann von irgend einem Punkt A der festen Geraden die n' Tangenten, verbinde jeden ihrer n' Berührungspunkte mit P, bestimme auf jeder Verbindungsgeraden die $n-1$ sonstigen Schnittpunkte, ziehe in jedem Schnittpunkte die Tangente, und bestimme den Schnittpunkt B der festen Geraden mit jeder der so entstandenen $n'(n-1)$ Tangenten. Dann erhält man,

dass dem Punkte A $n'(n-1)$ Punkte B entsprechen. Ebenso erhält man umgekehrt, dass dem Punkte B $n'(n-1)$ Punkte A entsprechen. Zu einer Coincidenz von A und B geben Veranlassung erstens die n' von P ausgehenden Tangenten, zweitens die $\varkappa$ Rückkehrtangenten der Curve, drittens jedes Dreieck, welches dem oben betrachteten, zweistufigen Systeme angehört, dabei seine Ecke a auf der festen Geraden hat, und seine Seite α durch den Punkt P schickt. Also ist:

$$2n'(n-1) = n' + \varkappa + a\alpha,$$

oder

$$a\alpha = 2nn' - (3n' + \varkappa).$$

Will man auf die Unterscheidung der Ecken b und c, sowie der Seiten β und γ keine Rücksicht nehmen, so hat man das Resultat durch 2 zu dividiren. Man kann also den Satz aussprechen:

Wenn man aus einem Punkte P in der Ebene einer Curve $n$ter Ordnung, n'ten Ranges mit $\varkappa$ Spitzen einen Strahl zieht, in den n Schnittpunkten dieses Strahls mit der Curve Tangenten zieht, und die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte solcher Tangenten bestimmt, so beschreiben diese Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung $nn' - \frac{1}{2}(3n' + \varkappa)$, während jener Strahl sich um P dreht.

Ueberträgt man die oben erwähnten 4 Annahmen über die Deutung der Symbole ε, τ, ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c auf ein einstufiges Curvensystem, so kommt man zu folgenden Werthen für die in § 2. auftretenden dreifachen Symbole. Es bezeichne n die Ordnung jeder Curve des Systems, n' ihren Rang, μ die Zahl der durch einen gegebenen Punkt gehenden Curven des Systems, μ' die Zahl der eine gegebene Gerade berührenden Curven, d die Ordnung der von den Doppelpunkten gebildeten Curve, k die Ordnung der von den Spitzen gebildeten Curve, d' und k' die dual entsprechenden Zahlen. Dann ist:

$$a^2\beta = a^2\gamma = \mu'(n'-1),\ b^2\gamma = c^2\beta = 0,\ b^2\alpha = c^2\alpha = \mu\cdot(n-1),$$
$$\vartheta_a s^2 = \mu,\ \vartheta_b s^2 = \vartheta_c s^2 = \mu\cdot(n'-1),\ \vartheta_a g^2 = \mu',\ \vartheta_b g^2 = \vartheta_c g^2 = \mu'(n-1),$$
$$\varepsilon a^2 = 2d' + 2k',\ \varepsilon b^2 = \varepsilon c^2 = 0,\ \tau\alpha^2 = 2d + 2k,\ \tau\beta^2 = \tau\gamma^2 = 0,$$
$$\varepsilon g^2 = 0,\ \tau s^2 = 0,\ abc = \mu\cdot(2n-1) + 2\cdot\mu'\cdot n,\ \alpha\beta\gamma = \mu'\cdot(2n'-1) + 2\mu\cdot n';$$

ferner erwähnen wir noch:

$$b^2c = bc^2 = \mu\cdot n,\quad \beta^2\gamma = \beta\gamma^2 = \mu'\cdot n',$$

und

$$\vartheta_a\alpha^2 = \mu' + k + X,$$

wo X die Zahl aller derjenigen hinlänglich oft gerechneten ausgearteten Curven des Systems bedeutet, welche einen vielfachen Curvenzweig besitzen. Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formeln des § 2. erhält man theils Identitäten, theils aber auch Formeln, welche,

den Plücker'schen analog, sich auf einstufige Systeme beziehen, aber dann immer Ausartungszahlen mit enthalten*).

Bei zweistufigen Curvensystemen erhält man, gemäss den obigen 4 Annahmen, die folgenden Werthe für die vierfachen Symbole des § 2., wenn n die Ordnung jeder Curve des Systems bezeichnet, μ^2 die Zahl der durch zwei gegebene Punkte gehenden Curven, $\mu\mu'$ die Zahl der einen gegebenen Punkt treffenden und eine gegebene Gerade berührenden Curven, M die Zahl der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührenden Curven, D die Zahl derjenigen Curven, welche einen gegebenen Punkt als Doppelpunkt haben, K die Zahl derjenigen, welche einen gegebenen Punkt als Spitze haben:

$$b^2c^2 = \mu^2,\ a^2b^2 = a^2c^2 = M\cdot(n'-1),$$
$$\beta^2\gamma^2 = \mu'^2,\ \alpha^2\beta^2 = \alpha^2\gamma^2 = M\cdot(n-1),$$
$$\vartheta_a s^2 g = M,\ \vartheta_b s^2 g = \vartheta_c s^2 g = \mu\mu' - M,$$
$$\varepsilon g^2 a = 2D' + 2K',\ \varepsilon g^2 b = \varepsilon g^2 c = 0,$$
$$\tau s^2 \alpha = 2D + 2K,\ \tau s^2\beta = \tau s^2\gamma = 0,$$

ψs^2 und ψg^2 sind Symbole, welche wir ausschliessen müssen, statt ihrer wählen wir a^2bc und $\alpha^2\beta\gamma$, für welche sich leicht direct ergiebt:

$$a^2bc = \mu^2 + 2\mu\mu' + \mu'^2 - M,\quad \alpha^2\beta\gamma = \mu^2 + 2\mu\mu' + \mu'^2 - M.$$

Ausserdem erwähnen wir $b^2\beta^2 = c^2\gamma^2 = \mu\mu'$, wodurch die der Formel (42) analoge Formel verificirt wird.

Obwohl in den Entwickelungen der §§ 3. bis 6. die Anwendbarkeit der dort aufgestellten Productenformeln auf solche Systeme, wie sie eben besprochen sind, *nicht bewiesen* ist, so wollen wir dennoch die eben aufgestellten Werthe der zweifachen, dreifachen und vierfachen Symbole in die Formel (67) des § 5. und in die Formel (74) des § 6. einsetzen, und die erhaltenen Resultate prüfen. Dabei bezeichnen wir wieder die gegebene Curve oder die gegebenen Curvensysteme durch Σ_1 und Σ_2, ferner die auf solche Systeme bezüglichen Anzahlen durch die oben eingeführten, aber mit dem Index 1 resp. 2 versehenen Buchstaben. Man erhält so bei einer gegebenen festen Curve Σ_1 und einem gegebenen, zweistufigen Curvensysteme Σ_2 für die Anzahl der ihnen gemeinsamen, aus je zwei Tangenten mit Berührungspunkten gebildeten Dreiecke, nach einiger Umformung:

$$[n_1'(n_1'-1)\cdot\mu_2{}^2 + 2n_1n_1'\cdot(\mu\mu')_2 + n_1(n_1-1)\cdot\mu_2'^2 + 2n_1\cdot D_2' + 2n_1'\cdot D_2'$$
$$-3\cdot(3n_1+\varkappa_1')\cdot M_2] + [2\cdot(3n_1+\varkappa_1')\cdot M_2 + 2n_1\cdot K_2' + 2n_1'\cdot K_2].$$

Die zweite eckige Klammer enthält nun aber das Doppelte der in Formel (93a) berechneten Anzahl derjenigen Curven von Σ_2, welche

*) Solche Formeln gab Zeuthen in den Almind. Egensk. ved Systemer af plane Kurver (Kopenh. Acad. 1873).

die feste Curve Σ_1 dreipunktig berühren. Dagegen enthält die erste eckige Klammer das Doppelte der von Zeuthen in den Comptes rendus, tome 89, p. 900 bewiesenen *Anzahl für diejenigen Curven in Σ_2, welche die feste Curve Σ_1 zweimal zweipunktig berühren.* Der Coefficient 2 bei der letztgenannten Anzahl rechtfertigt sich dadurch, dass bei einer Doppelberührung zwischen 2 Curven jeder der beiden Berührungspunkte als Punkt b resp. c eines gemeinsamen Dreiecks aufzufassen ist. Dass der obige Ausdruck auch die auf die dreipunktige Berührung bezügliche Anzahl enthält, erklärt sich dadurch, dass auch zwei sich *dreipunktig* berührende Curven ein aus zwei Punkten und dem Schnittpunkt ihrer Tangenten bestehendes Dreieck gemeinsam haben. Wir können daher das folgende Ergebniss constatiren:

Wenn man die oben besprochenen Werthe für die zweifachen und vierfachen Bedingungssymbole in die Formel (67) *des* § 5. *substituirt, und von dem erhaltenen Ausdruck das Doppelte der auf die dreipunktige Berührung bezüglichen Anzahl subtrahirt* (93a), *so erhält man das Doppelte der Zeuthen'schen Anzahl derjenigen Curven eines zweistufigen Systems, welche eine feste Curve zweimal zweipunktig berühren.*

Nach diesem Ergebniss darf man vermuthen, dass man in ähnlicher Weise durch Einsetzung der Werthe der dreifachen Symbole in die Formel (74) des § 6. zu der Zahl gelangt, welche angiebt, wie oft es vorkommt, dass *zwei Curven, die zwei gegebenen einstufigen Systemen Σ_1 und Σ_2 angehören, sich zweimal zweipunktig berühren.* Man erhält aus Formel (74) nach einiger Umformung:

$$\begin{aligned}&[2\cdot(n_1'n_2'-4)\mu_1\cdot\mu_2+2\cdot(n_1-1)(n_1'-1)\mu_1\cdot\mu_2'+2\cdot(n_1'-1)(n_2-1)\mu_1'\cdot\mu_2\\&\quad+2\cdot(n_1n_2-4)\mu_1'\cdot\mu_2'+2d_1\cdot\mu_2'+2d_1'\cdot\mu_2+2\mu_1'\cdot d_2+2\mu_1d_2']\\&\quad+[2\mu_1\cdot k_2'+2\mu_1'\cdot k_2+2k_1\cdot\mu_2'+2k_1'\mu_2+6\mu_1\cdot\mu_2+6\mu_1'\cdot\mu_2'].\end{aligned}$$

Subtrahirt man dann das Doppelte der in Formel (94a) berechneten, auf die dreipunktige Berührung bezüglichen Anzahl, und dividirt durch 2, so erhält man in der That die von Zeuthen in den Comptes rendus, tome 89, p. 947 berechnete Anzahl.

Diese Uebereinstimmung legt den Gedanken nahe, in ähnlicher Weise zu den Anzahlen zu gelangen, welche sich auf die ∞^1 doppelten Berührungen zwischen den Curven eines gegebenen einstufigen und eines gegebenen zweistufigen Systems beziehen. Hierzu brauchen wir aber die Formeln für die Anzahlen, welche sich auf die ∞^1 gemeinsamen Dreiecke eines dreistufigen und eines vierstufigen Dreieckssystems beziehen. Diese erhalten wir, wenn wir entweder Formel (67) mit a', b', c', α', β', γ' oder Formel (74) mit a, b, c, α, β, γ multipliciren. Der Analogie und des Dualismus wegen brauchen wir nur mit a' resp. mit a zu multipliciren. Auf beiden Wegen erhält man nach geschickter Benutzung der Formeln des § 2:

$$
\begin{aligned}
(109)\quad xa = {} & b'^2\gamma'^2\cdot c^2a^2 + c'^2\beta'\cdot a^2b^2 + a'^2\beta'\cdot\alpha^2\gamma^2 + a'^2\gamma'\cdot\alpha^2\beta^2 \\
& + \vartheta'_b s'^2\cdot a^2b^2 + \vartheta'_c s'^2\cdot a^2c^2 + \vartheta'_b g'^2\cdot\beta^2\gamma^2 + \vartheta'_c g'^2\cdot\beta^2\gamma^2 \\
& + a'^2\gamma'\cdot\vartheta_b s^2 g + a'^2\beta'\cdot\vartheta_c s^2 g + \tau' s'^2\cdot c^2a^2 + \tau' s'^2\cdot a^2b^2 \\
& + \tau'\alpha'^2\cdot\beta^2\gamma^2 + \varepsilon' g'^2\cdot\beta^2\gamma^2 + a'b'c'\cdot\varepsilon g^2 a + a'^2\beta'\cdot\tau s^2\alpha + a'^2\gamma'\cdot\tau s^2\alpha \\
& + \tau' s'^2\cdot\vartheta_a s^2 g + \varepsilon' a'^2\cdot\vartheta_a s^2 g + \vartheta'_b s'^2\cdot\vartheta_a s^2 g + \vartheta'_c s'^2\cdot\vartheta_a s^2 g \\
& + \vartheta'_c s'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \vartheta'_b s'^2\cdot\vartheta_c s^2 g + \tau'\beta'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \tau'\gamma'^2\cdot\vartheta_c s^2 g \\
& + \vartheta'_a g'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \vartheta'_a g'^2\cdot\vartheta_c s^2 g + \vartheta'_c g'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \vartheta'_b g'^2\cdot\vartheta_c s^2 g \\
& + \tau' s'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \tau' s'^2\cdot\vartheta_c s^2 g + \varepsilon' g'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \varepsilon' g'^2\cdot\vartheta_c s^2 g \\
& + \vartheta'_b s'^2\cdot\varepsilon g^2 b + \vartheta'_c s'^2\cdot\varepsilon g^2 c + \vartheta'_b s'^2\cdot\tau s^2\beta + \vartheta'_c s'^2\cdot\tau s^2\gamma \\
& + \vartheta'_b g'^2\cdot\tau s^2\beta + \vartheta'_c g'^2\cdot\tau s^2\gamma + \vartheta'_a g'^2\cdot\tau s^2\alpha + \varepsilon' a'^2\cdot\tau s^2\beta + \varepsilon' a'^2\cdot\tau s^2\gamma \\
& + \varepsilon' g'^2\cdot\tau s^2\alpha + \varepsilon' g'^2\cdot\tau s^2\beta + \varepsilon' g'^2\cdot\tau s^2\gamma + \tau' s'^2\cdot\varepsilon g^2 b + \tau' s'^2\cdot\varepsilon g^2 c \\
& + \varepsilon' a'^2\cdot\psi s^2 + \varepsilon' g'^2\cdot\psi s^2 + \tau' s'^2\cdot\psi g^2 - \tau'\alpha'^2\cdot\varepsilon g^2 a \\
& + \vartheta'_b g'^2\cdot\varepsilon g^2 a - \vartheta'_c g'^2\cdot\varepsilon g^2 a - \varepsilon' g'^2\cdot\varepsilon g^2 a.
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck giebt also in den Symbolen des § 5. *und* § 6. *die Ordnung der Curve der Punkte a aller derjenigen ∞^1 Dreiecke an, welche einem gegebenen, dreistufigen Systeme Σ' und einem gegebenen, vierstufigen Systeme Σ gemeinsam sind.* Wenn man dann aus diesem Ausdruck die nicht deutbaren Symbole ψs^2 und ψg^2 durch die Formel (47) und die ihr dual entsprechende Formel herausschafft, und darauf für die auftretenden Symbole die oben angegebenen Werthe einsetzt, so gelangt man zu einem Ausdruck, aus welchem man nach Abzug der analogen Zahl für dreipunktige Berührung (97a) und Division durch 2 einen Satz erhält, *den wir zwar nicht als von uns bewiesen, aber als sehr wahrscheinlich hinstellen können.*

(110) *Wenn ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und ein zweistufiges Curvensystem Σ_2 gegeben ist, so kommt es ∞^1 mal vor, dass sich zwei den beiden Systemen angehörige Curven zweimal zweipunktig berühren. Wenn man dann bei jeder solchen Doppelberührung den Schnittpunkt der Tangenten in den beiden Berührungspunkten bestimmt, so erhält man ∞^1 solcher Tangentenschnittpunkte. Dieselben bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$
\begin{aligned}
& \mu_1\cdot[M_2\cdot(n_1'n_2' - n_1' - n_2' - 2) + (\mu\mu')_2\cdot(n_1' - 1) + D_2'\cdot(2n_1 - 1) \\
& \qquad + 2K_2'\cdot(n_1 - 1) - K_2] \\
& + \mu_1'\cdot[M_2\cdot(n_1'n_2 - 2n_1' - n_1 - n_2 - 1) + \mu_2'^2\cdot(n_1 - 1) + (\mu\mu')_2\cdot(n_1 + n_1' - 1) \\
& \qquad + 2D_2' + 2K_2' + D_2\cdot(2n_1' - 1) + 2\cdot K_2\cdot(n_1' - 1)] \\
& + d_1\cdot[\mu_2'^2 - 2D_2' - 2K_2'] + k_1\cdot[\mu_2'^2 - 2D_2' - 2K_2' - M_2] \\
& + d_1'\cdot[\mu_2^2 + 2M_2 - 2D_2 - 2K_2] + k_1'\cdot[\mu_2^2 + 2M_2 - 2D_2 - 2K_2].
\end{aligned}
$$

Wenn man ferner die obigen Werthe an die Stelle der Symbole der Formel für xb setzt, welche aus der für xa entwickelten durch

cyklische Vertauschung hervorgeht, und wenn man dann das Doppelte*) des Ausdrucks in (97a) subtrahirt, so gelangt man zu der folgenden Anzahl:

(111) *Wenn ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und ein zweistufiges Σ_2 gegeben sind, so kommt es ∞^1 mal vor, dass sich zwei den beiden Systemen angehörige Curven zweimal zweipunktig berühren. Dabei bilden die Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung:*

$$\mu_1\cdot[\mu_2^2\cdot(n_1'-1)+\mu_2'^2\cdot(n_1-1)+(\mu\mu')_2\cdot(n_1+n_1')+M_2\cdot(n_1n_2'-2n_1-7)$$
$$+2D_2+2D_2']$$
$$+\mu_1'\cdot[\mu_2^2\cdot(n_1'-1)+(\mu\mu')_2\cdot n_1+M_2\cdot(n_1n_2-8)+2D_2]$$
$$+2d_1\cdot M_2.$$

Um auch die entsprechenden Zahlen für zwei gegebene, zweistufige Curvensysteme zu bestimmen, hat man aus den Formeln des § 5. und und § 6. die Zahlen b^2, bc u. s. w. für die ∞^2 Dreiecke abzuleiten, welche zwei gegebenen, vierstufigen Dreieckssystemen gemeinsam sind, und darauf wieder für die erhaltenen, vierstufigen Symbole die oben besprochenen Werthe einzusetzen. Auf diesem Wege kommt man zu folgendem, als sehr wahrscheinlich hinzustellenden Resultate:

(112) und (113) *Wenn zwei zweistufige Curvensysteme Σ_1 und Σ_2 gegeben sind, so kommt es ∞^2 mal vor, dass sich zwei den beiden Systemen angehörige Curven zweimal zweipunktig berühren, und zwar ist jeder Punkt der Ebene so oft einer der beiden Berührungspunkte von zwei solchen Curven, wie die folgende Zahl angiebt:*

$$M_1\cdot[\mu_2^2\cdot(n_1'-1)+(\mu\mu')_2\cdot n_1+2D_2]$$
$$+[\mu_1^2\cdot(n_2'-1)+(\mu\mu')_1\cdot n_2+2D_1]\cdot M_2$$
$$-8M_1\cdot M_2.$$

Wenn ferner der eine der beiden Berührungspunkte sich auf einer Geraden bewegt, so beschreibt der andere eine Curve von der Ordnung:

$$\mu_1^2\cdot\mu_2^2+\mu_1^2\cdot\mu_2'^2+\mu_1'^2\cdot\mu_2^2$$
$$+2\mu_1^2\cdot(\mu\mu')_2+2\cdot(\mu\mu')_1\cdot\mu_2^2+2(\mu\mu')_1\cdot(\mu\mu')_2-\mu_1^2\cdot M_2-M_1\cdot\mu_2^2$$
$$+2M_1\cdot D_2+2D_1\cdot M_2+2M_1M_2\cdot(n_1n_2-4).$$

*) Dass das Doppelte, und nicht der in (97a) gegebene Ausdruck selbst zu subtrahiren ist, ersah ich erst aus einem Briefe des Herrn Zeuthen, welcher, auf Verabredung gleichzeitig mit mir, die in (111) und (112) angegebenen beiden Anzahlen durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl bestimmt hat. Die Formeln (110) und (113) aber sind bis jetzt nur durch die obige Methode gefunden.

§ 10.

Correspondenzen zwischen 3 Punkten einer Curve.

In § 18. meines Kalküls habe ich aus den Coincidenzformeln für Punktepaare die Cayley-Brill'sche Correspondenzformel für Plancurven abgeleitet. Die oben entwickelten Formeln für Punkttripel ermöglichen es, auch eine Correspondenzformel für den Fall aufzustellen, wo immer zwei beliebig gewählten Punkten einer Plancurve eine endliche Anzahl dritter Punkte entspricht, und wo man danach fragt, wie oft es auf der Plancurve vorkommt, dass drei durch die Correspondenz zusammengehörige Punkte zugleich drei consecutive, unendlich nahe Punkte der Curve sind. Diese Frage können wir auch aussprechen, wie folgt:

Gegeben ist in fester Ebene eine Plancurve, und ausserdem ein fünfstufiges Dreieckssystem. In letzterem liegt ein dreistufiges System Σ unendlich kleiner Dreiecke, die Plancurve dagegen erzeugt durch alle möglichen Tripel consecutiver Punkte (§ 7. *und* § 8.) *ein einstufiges System Σ' unendlich kleiner Dreiecke. Wie lässt sich die Zahl der Σ und Σ' gemeinsamen unendlich kleinen Dreiecke als Function von Anzahlen darstellen, welche sich auf die Correspondenz beziehen, die durch das fünfstufige Dreieckssystem auf der Plancurve hervorgerufen wird?*

Die auf das fünfstufige Dreieckssystem bezüglichen Punkte, Strahlen, Ausartungen und Bedingungen bezeichnen wir mit den § 1. eingeführten Symbolen. Nimmt man nun auf der festen Curve irgend zwei Punkte als Punkte b und c an, so liegen die zugehörigen Punkte a auf einer Curve, welche nach unserer Bezeichnung den Grad ab^2c^2 hat, und deshalb die feste Curve in $n \cdot (ab^2c^2)$ Punkten schneidet. Zu diesen Punkten gehören erstens *die μ_a Punkte, welche den angenommenen Punkten b und c auf der Plancurve entsprechen*, zweitens aber auch der Punkt b so oft, wie das Symbol $\vartheta_c s^2 c^2$ angiebt, und drittens der Punkt c $\vartheta_b s^2 b^2$ mal. Wir bezeichnen diese durch $\vartheta_c s^2 c^2$ und $\vartheta_b s^2 b^2$ dargestellten Zahlen, welche der von Herrn Brill „Werthigkeit" genannten Zahl analog sind, mit w_c resp. w_b. Also erhalten wir:

(114) $$n \cdot (ab^2c^2) = \mu_a + w_b + w_c,$$

und analog:

(114a) $$n \cdot (a^2bc^2) = \mu_b + w_c + w_a,$$
$$n \cdot (a^2b^2c) = \mu_c + w_a + w_b.$$

Hier bezeichnet w_a, wie oft man von zwei auf der Plancurve beliebig gewählten Punkten den einen als Punkt a ansehen kann, und von dem andern annehmen darf, dass ihm die zugehörigen Punkte b und c unendlich nahe liegen jedoch ohne im Allgemeinen eine Verbin-

dungslinie zu haben, die mit der Tangente übereinstimmt. Ferner bedeuten μ_b und μ_c die μ_a analogen Zahlen, w_b und w_c die w_a analogen Werthigkeitszahlen.

Zu den eingeführten 6 Zahlen:

$$\mu_a,\ \mu_b,\ \mu_c,\ w_a,\ w_b,\ w_c$$

müssen wir noch eine siebente hinzufügen, um die gesuchte Zahl der Coincidenzen ausdrücken zu können, weil die Productenformel zwischen einem einstufigen und einem fünfstufigen Dreieckssysteme 7 Bedingungen aus jedem Systeme enthält. Wir wählen die Zahl w, welche angeben soll, wie oft es in einem beliebigen Punkte der Plancurve vorkommt, dass drei durch die Correspondenz zusammengehörige Punkte jenem Curvenpunkte derartig unendlich nahe liegen, dass eine beliebige durch die 3 Correspondenzpunkte gelegte Curve die feste Curve in jenem Curvenpunkte zweipunktig berührt. Nur in einer endlichen Anzahl von Curvenpunkten wird es im Allgemeinen vorkommen können, dass die eben erwähnte Berührung eine *dreipunktige* wird, und die Anzahl x solcher Curvenpunkte wollen wir gerade bestimmen. Man sieht sofort, dass die vierte Werthigkeitszahl w nichts anderes ist, als der Werth unseres Symbols $\psi s^2 g$.

Um nun die gesuchte Zahl x durch μ_a, μ_b, μ_c, w_a, w_b, w_c, w darzustellen, wenden wir die Formel (93) an. Wir erhalten aus derselben, wenn wir die Ordnung der festen Curve mit n, ihren Rang mit n', die Zahl ihrer Spitzen mit $\varkappa$ bezeichnen:

$$x = n \cdot \eta g^2 + n' \cdot \zeta s^2 + (3n' + \varkappa) \cdot \psi s^2 g.$$

Nun ist aber nach unseren Formeln in § 2.:

$$\begin{aligned}\eta g^2 &= \varepsilon b^2 c^2 + \varepsilon c^2 a^2 + \varepsilon a^2 b^2\\ &= (a b^2 c^2 - \vartheta_b s^2 b^2 - \vartheta_c s^2 c^2) + (a^2 b c^2 - \vartheta_c s^2 c^2 - \vartheta_a s^2 a^2)\\ &\qquad + (a^2 b^2 c - \vartheta_a s^2 a^2 - \vartheta_b s^2 b^2),\\ \zeta s^2 &= \tau \beta^2 \gamma^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 + \tau \alpha^2 \beta^2 = \vartheta_a s^2 a^2 - \psi s^2 g + \vartheta_b s^2 b^2 - \psi s^2 g\\ &\qquad + \vartheta_c s^2 c^2 - \psi s^2 g,\end{aligned}$$

oder, nach Einführung der Zahlen μ und w:

$$\begin{aligned} n \cdot \eta g^2 &= \mu_a + \mu_b + \mu_c - 2 \cdot (n-1)(w_a + w_b + w_c),\\ \zeta s^2 &= w_a + w_b + w_c - 3 \cdot w.\end{aligned}$$

Folglich ergiebt sich die Correspondenzformel:

(115) $x = \mu_a + \mu_b + \mu_c + (w_a + w_b + w_c) \cdot (n' - 2n + 2) + w \cdot \varkappa.$

Setzt man dann noch $n' - 2n + 2 + \varkappa$ gleich dem doppelten Geschlechte $2p$ der Curve, so kommt:

(116) $x = \mu_a + \mu_b + \mu_c + 2p \cdot (w_a + w_b + w_c) - \varkappa \cdot (w_a + w_b + w_c - w),$

Man bemerke, dass bei unserer Auffassung die Zahl x nur solche Coincidenzen zählt, bei denen die durch die drei unendlich nahen Punkte der Correspondenz dargestellte Krümmung mit der durch die drei unendlich nahen Punkte der Curve hervorgerufenen Krümmung übereinstimmt. Man vergleiche die Bemerkung bei der Ableitung der Brill'schen Correspondenzformel im „Kalkül" (p. 88).

Es liegt nahe, die Formel (115) zur Auffindung der Zahl aller derjenigen Curven zu verwenden, welche, einem zweistufigen Curvensysteme angehörig, die feste Curve dreipunktig berühren. Will man jedoch diese schon in Formel (93a) allgemein berechnete Anzahl durch die Correspondenz zwischen je drei Schnittpunkten auf der festen Curve erzielen, so ist man genöthigt, Anzahlen mit einzuführen, welche sich auf ausgeartete Curven des Systems beziehen. Nehmen wir der Einfachheit halber das zweistufige Curvensystem als aus lauter Kegelschnitten bestehend an, so ist zu setzen:

$$\mu_a = \mu_b = \mu_c = \mu^2 \cdot (2n-2), \quad w_a = w_b = w_c = \mu^2, \quad w = M,$$

wo μ^2 angiebt, wieviel Kegelschnitte durch zwei gegebene Punkte gehen, M angiebt, wieviel eine gegebene Gerade in einem Punkte berühren. Durch Einsetzung dieser Werthe ergiebt sich aus (116):

$$x = \mu^2 \cdot 3n' + M \cdot \varkappa.$$

Formel (93a) aber ergiebt für die Zahl der die feste Curve dreipunktig berührenden Kegelschnitte:

$$M \cdot (3n' + \varkappa),$$

also eine um $3(\mu^2 - M) \cdot n'$ kleinere Zahl. Dies kann sich nur daraus erklären, dass das zweistufige Kegelschnittsystem $\mu^2 - M$ in eine Doppelgerade ausgeartete Kegelschnitte besitzt, welche diese Doppelgerade durch einen gegebenen Punkt schicken, dass also die feste Curve $(\mu^2 - M) \cdot n'$ Tangenten besitzt, welche Doppelgeraden des Kegelschnittsystems sind, und dass jede dieser Tangenten bei der Zahl x dreifach mitgerechnet ist.

Liegen drei von einander unabhängige Tripelcorrespondenzen auf der Curve, d. h. sind ihr 3 zweistufige Dreieckssysteme einbeschrieben, so kann man nach der Zahl y *derjenigen Punkttripel fragen, welche gleichzeitig den drei Correspondenzen angehören.* Um die Zahl y für den Fall zu finden, dass die Curve keine Doppel- und Rückkehrpunkte habe, müssen wir den Zahlenwerth der sechsfachen Bedingung

$$D\, Z_1\, Z_2\, Z_3$$

berechnen, wo D die dreifache Bedingung bedeutet, dass ein Dreieck einer Curve $n$ter Ordnung einbeschrieben sei, und Z_1, Z_2, Z_3 beziehungsweise die einfachen Bedingungen bezeichnen, dass das Dreieck einem

der drei fünfstufigen Systeme angehöre, durch welche die 3 Correspondenzen auf der Curve hervorgerufen werden. Wir bezeichnen die auf jede der 3 Correspondenzen bezüglichen 7 Zahlen, wie oben, durch

$$\mu_a,\ \mu_b,\ \mu_c,\ w_a,\ w_b,\ w_c,\ w$$

und unterscheiden dieselben durch die Indices 1, 2, 3. Ausserdem setzen wir, der Kürze wegen:

$$Z_i a b^2 c^2 = x_{ia},\quad Z_i a^2 b c^2 = x_{ib},\quad Z_i a^2 b^2 c = x_{ic}.$$

Die Bedingung D ist schon durch Formel (77) ausgedrückt, und zwar in der Form:

$$\begin{aligned} D = n \cdot (n-1) \cdot (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \tau s^2) \\ + n(n-1)(n-2) \cdot abc + n \cdot \varepsilon g^2. \end{aligned}$$

Um auf y zu kommen, haben wir also zunächst die Zahlen

$$a\alpha^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ b\beta^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ c\gamma^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ \tau s^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ abc Z_1 Z_2 Z_3,$$
$$\varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3$$

zu berechnen. Um jede der 3 Bedingungen Z auszudrücken, entnehmen wir der Formel (61) die für unser Ziel bequemere Formel:

$$\begin{aligned} Z = a \cdot x_a + b \cdot x_b + c \cdot x_c - w_a \cdot (b+c-\alpha) - w_b \cdot (c+a-\beta) \\ - w_c \cdot (a+b-\gamma) + \tau \cdot w. \end{aligned}$$

Hiernach ist:

$$\begin{aligned} a\alpha^2 Z_1 Z_2 Z_3 = {} & \tau s^2 \alpha Z_1 Z_2 \cdot w_3 + a^2\alpha^2 Z_1 Z_2 \cdot x_{3a} + a b^2 \alpha Z_1 Z_2 \cdot x_{3b} \\ & + a c^2 \alpha Z_1 Z_2 \cdot x_{3c} - (a b^2 \alpha + a c^2 \alpha) Z_1 Z_2 \cdot w_{3a} \\ & - (a c^2 \alpha - \alpha^2 \beta^2) Z_1 Z_2\, w_{3b} - (a b^2 \alpha - \alpha^2 \gamma^2) Z_1 Z_2 \cdot w_{3c} \\ = {} & \tau s^2 \alpha Z_1 Z_2 \cdot w_3 + x_{3a} \cdot [a^2 \alpha b^2 Z_1 . x_{2b} + a^2 \alpha c^2 Z_1 \cdot x_{2c} \\ & \qquad - (a^2 \alpha b^2 + a^2 \alpha c^2) Z_1 \cdot w_{2a}] \\ & + x_{3b} \cdot [a^2 b^2 \alpha Z_1 \cdot x_{2a} + a b^2 c^2 Z_1 \cdot x_{2c} - a b^2 c^2 Z_1 \cdot w_{2a} \\ & \qquad - (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \beta) \cdot w_{2b}] \\ & + x_{3c} \cdot [a^2 c^2 \alpha Z_1 \cdot x_{2a} + a b^2 c^2 Z_1 \cdot x_{2b} - a b^2 c^2 Z_1 \cdot w_{2a} \\ & \qquad - (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \gamma) \cdot w_{2c}] \\ & - w_{3a} \cdot [(a^2 b^2 \alpha + a^2 c^2 \alpha) Z_1 \cdot x_{2a} + a b^2 c^2 Z_1 \cdot x_{2b} + a b^2 c^2 Z_1 \cdot x_{2c} \\ & \qquad - 2 \cdot a b^2 c^2 Z_1 \cdot w_{2a} \\ & \qquad - (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \beta) Z_1 \cdot w_{2b} - (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \gamma) Z_1 \cdot w_{2c}] \\ & - w_{3b} \cdot [(a b^2 c^2 - b^2 c^2 \beta) Z_1 \cdot x_{2b} - (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \beta) Z_1 \cdot w_{2a} + a^2 c^2 \alpha Z_1 \cdot w_{2b} \\ & \qquad - w_1 \cdot w_{2c} - \tau s^2 \alpha \beta Z_1 \cdot w_2] \\ & - w_{3c} \cdot [a b^2 c^2 - b^2 c^2 \gamma) Z_1 \cdot x_{2c} - (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \gamma) Z_1 \cdot w_{2a} + a^2 b^2 \alpha Z_1 \cdot w_{2c} \\ & \qquad - w_1 \cdot w_{2b} - \tau s^2 \alpha \gamma Z_1 \cdot w_2] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= w_3 \cdot & [(w_{1c} - w_1)(w_{2b} - w_2) + (w_{1b} - w_1)(w_{2c} - w_2)] \\
& + x_{\;a} \cdot [x_{2b} \cdot (x_{1c} - w_{1a}) + x_{2c} \cdot (x_{1b} - w_{1a}) + w_{2a} \cdot (x_{1b} + x_{1c} - 2 \cdot w_{1a})] \\
& + x_{3b} \cdot [x_{2a} \cdot (x_{1c} - w_{1a}) + x_{2c} \cdot x_{1a} - w_{2a} \cdot x_{1a} - w_{2b} \cdot w_{1b}] \\
& + x_{3c} \cdot [x_{2a} \cdot (x_{1b} - w_{1a}) + x_{2b} \cdot x_{1a} - w_{2a} \cdot x_{1a} - w_{2c} \cdot w_{1c}] \\
& - w_{3a} \cdot [x_{2a} \cdot (x_{1b} + x_{1c} - 2 w_{1a}) + x_{2b} \cdot x_{1a} + x_{2c} \cdot x_{1a} - 2 \cdot w_{2a} \cdot x_{1a} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - w_{2b} \cdot w_{1b} - w_{2c} \cdot w_{1c}] \\
& - w_{3b} \cdot [x_{2b} \cdot w_{1b} - w_{2a} \cdot w_{1b} + w_{2b} \cdot (x_{1b} - w_{1a}) - w_{2c} \cdot w_1 - w_2 \cdot (w_{1c} - w_1)] \\
& - w_{3c} \cdot [x_{2c} \cdot w_{1c} - w_{2a} \cdot w_{1c} + w_{2c} \cdot (x_{1c} - w_{1a}) - w_{2b} \cdot w_1 - w_2 (w_{1b} - w_1)].
\end{aligned}
$$

Einen analogen Ausdruck ergeben die Bedingungen $b\,\beta^2 Z_1 Z_2 Z_3$ und $c\,\gamma^2 Z_1 Z_2 Z_3$. Ebenso ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
abc Z_1 Z_2 Z_3 = & \; x_{3a} \cdot x_{2b} \cdot x_{1c} + x_{3a} \cdot x_{2c} \cdot x_{1b} + x_{3b} \cdot x_{2c} \cdot x_{1a} \\
& + x_{3b} \cdot x_{2a} \cdot x_{1c} + x_{3c} \cdot x_{2a} \cdot x_{1b} + x_{3c} \cdot x_{2b} \cdot x_{1a} \\
& - x_{1a} \cdot w_{2a} \cdot w_{3a} - x_{1b} \cdot w_{2b} \cdot w_{3b} - x_{1c} \cdot w_{2c} \cdot w_{3c} \\
& - x_{2a} \cdot w_{1a} \cdot w_{3a} - x_{2b} \cdot w_{1b} \cdot w_{3b} - x_{2c} \cdot w_{1c} \cdot w_{3c} \\
& - x_{3a} \cdot w_{1a} \cdot w_{2a} - x_{3b} \cdot w_{1b} \cdot w_{2b} - x_{3c} \cdot w_{1c} \cdot w_{2c}.
\end{aligned}
$$

Die Werthe von $\tau s^2 Z_1 Z_2 Z_3$ und $\varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3$ findet man am kürzesten direct durch Correspondenzen im Strahlbüschel resp. auf einer Geraden, nämlich:

$$
\begin{aligned}
\tau s^2 Z_1 Z_2 Z_3 = & \; (w_{3a} - w_3) \cdot [(w_{2b} - w_2)(w_{1c} - w_1) + (w_{2c} - w_2)(w_{1b} - w_1)] \\
& + (w_{3b} - w_3) \cdot [(w_{2c} - w_2)(w_{1a} - w_1) + (w_{2a} - w_2)(w_{1c} - w_1)] \\
& + (w_{3c} - w_3) \cdot [(w_{2a} - w_2)(w_{1b} - w_1) + (w_{2b} - w_2)(w_{1a} - w_1)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3 = & \; (x_{3a} - w_{3b} - w_{3c}) \cdot [(x_{2b} - w_{2a} - w_{2c}) \cdot (x_{1c} - w_{1a} - w_{1b}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + (x_{2c} - w_{2a} - w_{2b}) \cdot (x_{1b} - w_{1a} - w_{1c})] \\
& + (x_{3b} - w_{3c} - w_{3a}) \cdot [(x_{2c} - w_{2b} - w_{2a}) \cdot (x_{1a} - w_{1b} - w_{1c}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + (x_{2a} - w_{2b} - w_{2c})(x_{1c} - w_{1b} - w_{1a})] \\
& + (x_{3c} - w_{3a} - w_{3b}) \cdot [(x_{2a} - w_{2c} - w_{2b})(x_{1b} - w_{1c} - w_{1a}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + (x_{2b} - w_{2c} - w_{2a})(x_{1a} - w_{1c} - w_{1b})].
\end{aligned}
$$

Wir setzen nun die berechneten Ausdrücke an die Stelle der Symbole der Formel:

$$
\begin{aligned}
D Z_1 Z_2 Z_3 = & \; n(n-1) \cdot (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \tau s^2) Z_1 Z_2 Z_3 \\
& + n(n-1)(n-2) \cdot abc Z_1 Z_2 Z_3 + n \cdot \varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3,
\end{aligned}
$$

und schreiben gemäss der Formel (114):

$$\mu_{ia} + w_{ib} + w_{ic} \quad \text{statt} \quad x_{ia}.$$

Dadurch erhalten wir schliesslich:

$$
\begin{aligned}
(117)\quad y = DZ_1Z_2Z_3 = {} & \mu_{1a}\cdot\mu_{2b}\cdot\mu_{3c} + \mu_{1a}\cdot\mu_{2c}\cdot\mu_{3b} \\
& + \mu_{1b}\cdot\mu_{2a}\cdot\mu_{3c} + \mu_{1b}\cdot\mu_{2c}\cdot\mu_{3a} + \mu_{1c}\cdot\mu_{2a}\cdot\mu_{3b} + \mu_{1c}\cdot\mu_{2b}\cdot\mu_{3a} \\
& - (n-1)(n-2)\cdot(\mu_{1a}\, w_{2a}\, w_{3a} + \mu_{1b}\, w_{2b}\, w_{3b} + \mu_{1c}\, w_{2c}\, w_{3c} \\
& \qquad + w_{1a}\,\mu_{2a}\, w_{3a} + w_{1b}\,\mu_{2b}\, w_{3b} + w_{1c}\,\mu_{2c}\, w_{3c} \\
& \qquad + w_{1a}\, w_{2a}\,\mu_{3a} + w_{1b}\, w_{2b}\,\mu_{3b} + w_{1c}\, w_{2c}\,\mu_{3c}) \\
& + (n-1)(n-2)\cdot(w_{1a}\, w_{2b}\, w_{3c} + w_{1a}\, w_{2c}\, w_{3b} + w_{1b}\, w_{2a}\, w_{3c} \\
& \qquad + w_{1b}\, w_{2c}\, w_{3a} + w_{1c}\, w_{2a}\, w_{3b} + w_{1c}\, w_{2b}\, w_{3a}).
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck für die Zahl der auf einer Plancurve liegenden und drei gegebenen Correspondenzen zwischen je drei Punkten gemeinsamen Punkttripel, ist auf ganz anderen Wegen schon von Brill, (Math. Ann. Bd. VI, p. 56) und später von Lindemann (Clebsch's Vorles. p. 748) berechnet. Wenn schon unsere Auffindung dieses Ausdrucks viel Rechnung erforderte, so war es doch auch andererseits bei der Aufstellung der Formeln für *gemeinsame Dreiecke von Dreieckssystemen* geboten, den Ausdruck auch auf dem neu eröffneten Wege aufzufinden.

§ 11.

Die Erweiterung der Formeln auf Dreiecke in nicht fester Ebene.

Die Formeln für das Dreieck im Raume, welches die Constantenzahl 9 hat, müssen so beschaffen sein, dass die Formeln der vorangehenden Paragraphen aus ihnen hervorgehen, wenn man sie mit der dreifachen Bedingung, dass das Dreieck in einer gegebenen Ebene liegen soll, multiplicirt. Es treten also zu den entwickelten Formeln nur noch Glieder hinzu, welche sich auf die Lage der Ebene des Dreiecks beziehen. Wir bezeichnen demgemäss die Ecken, Seiten und Ausartungen für das Dreieck im Raume gerade so, wie für das Dreieck in fester Ebene, und fügen nur hinzu, dass seine Ebene μ heissen soll. Die Bezeichnung der Lagebedingungen ergiebt sich dann sehr leicht aus den allgemeinen Bezeichnungsregeln für die Grundbedingungen des Punktes, des Strahls und der Ebene. (Math. Ann. Bd. X, p. 25 u. f., Kalkül, § 2., § 6.) Es bezeichnet z. B.

1) B die vierfache Bedingung, dass die Seite β gegeben sein soll,

2) $\mu\beta_p b^2$ die fünffache Bedingung, dass die Ebene des Dreiecks durch einen gegebenen Punkt gehe, dass zugleich die Seite β einen gegebenen Punkt enthalte und ausserdem die Ecke b auf einer gegebenen Geraden liege,

3) $\tau s^3 \alpha$ die vierfache Bedingung, dass das Dreieck nach der Definition von τ (§ 1.) ausgeartet sei, dass dabei sein Punkt s gegeben sei und seine Seite α eine gegebene Gerade schneide,

4) ηg_s die sechsfache Bedingung, dass das Dreieck zu einer Ausartung η werde, und dabei seinen Strahl g in einem gegebenen Strahlbüschel besitze.

Die den Formeln des § 2. entsprechenden Formeln für das Dreieck im Raume ergeben sich durch blosse symbolische Multiplication aus den Formeln, welche den mit (1) bis (6), (17) bis (20) und (37), (38) bezeichneten analog sind. Die 6 ersten Formeln heissen z. B.

$$b + c - \alpha = \tau + \vartheta_a, \quad c + a - \beta = \tau + \vartheta_b, \quad a + b - \gamma = \tau + \vartheta_c$$

$$\beta + \gamma - a - \mu = \varepsilon + \vartheta_a, \quad \gamma + \alpha - b - \mu = \varepsilon + \vartheta_b,$$

$$\alpha + \beta - c - \mu = \varepsilon + \vartheta_c.$$

Aus ihnen ergeben sich z. B.

$$a + b + c + \mu + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \tau,$$

$$a\alpha + \alpha_e - \mu^2 = \tau\alpha + \varepsilon g + \vartheta_b g + \vartheta_c g,$$

$$b^3 c\gamma - b^3 \alpha\gamma = \tau s^3 \gamma + \vartheta_a s^3 g \text{ u. s. w.}$$

Auch die Aufstellung der Productenformeln für die Zahl der gemeinsamen Dreiecke von Dreieckssystemen (§ 4. bis § 6.) bietet keine sachliche Schwierigkeit. Man erhält diese Formeln z. B. aus folgender Stammformel (cf. F. 59):

$$(B + \beta_s\beta' + \beta_e\beta_e' + \beta_p\beta_p' + \beta\beta_s' + B')(\mu + \mu' - \beta')(a + a' - \beta')$$
$$\text{mal } [(c + c' - \beta')(\gamma + \gamma' - a')(\alpha + \alpha' - b') - \vartheta_b\vartheta_b'(\gamma + \gamma' - a')$$
$$- \varepsilon\varepsilon'(c + c' - \beta')].$$

Wir entnehmen dieser Stammformel nur die Erkenntniss, dass die Productenformeln für das Dreieck im Raume die in den §§ 4. bis 6. erschienenen Bedingungssymbole und ausserdem nur noch auf μ bezügliche Symbole enthalten, z. B. von einfachen Bedingungssymbolen:

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \tau,\ \mu,$$

von zweifachen:

$$a^2,\ b^2,\ c^2,\ \alpha_e,\ \beta_e,\ \gamma_e,\ a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ \vartheta_a s,\ \vartheta_b s,\ \vartheta_c s,$$
$$\vartheta_a g,\ \vartheta_b g,\ \vartheta_c g,\ \tau s,\ \varepsilon g \text{ und } \mu a,\ \mu b,\ \mu c,\ \alpha_p,\ \beta_p,\ \gamma_p,\ \tau\mu,\ \mu^2.$$

Die Gestalt der Productenformeln lässt sich dann durch das von mir in den Math. Ann. Bd. X, p. 355 zuerst angewandte Eliminationsverfahren erkennen.

Wir wollen jedoch hier nur *die auf das unendlich kleine Dreieck bezüglichen Formeln* entwickeln, wobei wir wie in § 7. das Symbol ψ immer fortlassen können. An die Stelle der Formeln (84) und (85) haben wir zu setzen:

$$d = \eta + 3 \cdot s + x \cdot \mu$$

und

$$d = \zeta + 3 \cdot g + y \cdot \mu,$$

wo x und y noch unbekannte Coefficienten sind, und d jetzt die einfache Bedingung bedeutet, dass ein unendlich kleines Dreieck auf einem der ∞^5 Kegelschnitte liegen soll, welche drei gegebene Gerade schneiden. Zur Bestimmung der Coefficienten x und y kommen wir auf folgendem Wege. Wir multipliciren die rechten und die linken Seiten der Gleichungen:

$$\eta = d - 3 \cdot s - x \cdot \mu$$
$$d - 3 \cdot g - y \cdot \mu = \zeta,$$

wodurch wir erhalten:

$$\eta d - 3 \cdot \eta g - y \cdot \eta\mu = \zeta d - 3 \cdot \zeta s - x \cdot \zeta\mu.$$

Diese Gleichung multipliciren wir nun so mit fünffachen Bedingungen, dass siebenfache Bedingungen entstehen, deren Zahlenwerthe leicht zu bestimmen sind. Multipliciren wir mit Gs, so bekommen wir:

$$2 - 3 \cdot 0 - y \cdot 1 = 3 - 3 \cdot 0 - x \cdot 1.$$

Ferner eignet sich die fünffache Bedingung Gd, dann kommt nämlich links Null, weil ein auf η bezügliches siebenfaches Symbol den Werth Null hat, wenn keine auf den Punkt s bezügliche Bedingung darin steckt. Rechts bekommen wir die Symbole $\zeta G d^2$, $\zeta G s d$, $\zeta G \mu d$. Um $\zeta G d^2$ zu bestimmen, beachten wir, dass auf dem durch die Bedingung G gegebenen Strahle ein Punkt zu bestimmen ist, von welchem zwei Geradenpaare so ausgehen, dass sie mit dem Strahle in einer und derselben Ebene liegen, und dass jedes Geradenpaar drei gegebene Gerade schneidet. Also ist, nach den Incidenzformeln, $\zeta G d^2 = 2 \cdot 3_2 \cdot 3_2 = 18$. Ebenso ergiebt sich leicht $\zeta G s d = 3$ und $\zeta G \mu d = 3$. Folglich ist:

$$0 = 18 - 3 \cdot 3 - x \cdot 3.$$

Endlich multipliciren wir noch mit $s^3 \mu d$. Dann kommt auf der rechten Seite Null, weil keins der dort erscheinenden Symbole eine auf g bezügliche Bedingung enthält. Links haben wir die Werthe von $\eta s^3 \mu d^2$, $\eta g s^3 \mu d$, $\eta s^3 \mu^2 d$ zu bestimmen. Bei $\eta s^3 \mu d^2$ kann der Strahl g von η sowohl dadurch festgestellt werden, dass er aus jedem der beiden durch d^2 gegebenen Geradentripel eine Gerade schneidet, wie auch dadurch, dass er nur eine Gerade des einen Tripels schneidet, während alle drei Geraden des andern Tripels zur Feststellung des zweiten Strahls des in ein Strahlenpaar ausgearteten Kegelschnitts verwandt werden. Also ist:

$$\eta s^3 \mu d^2 = 3_1 \cdot 3_1 + 2 \cdot 3_1 \cdot 2 = 21.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\eta s^3 \mu^2 d = 3, \quad \eta g s^3 \mu d = \eta g_p s^3 d + \eta \mu^2 s^3 d = 2 + 3.$$

Demnach erhalten wir:

$$21 - 3 \cdot 5 - y \cdot 3 = 0.$$

Die 3 Gleichungen, welche wir für x und y aufgestellt haben, ergeben mit Bestätigung:

$$x = 3, \quad y = 2.$$

Also ist:

$$d = \eta + 3 \cdot s + 3 \cdot \mu \tag{118}$$

und

$$d = \zeta + 3 \cdot g + 2 \cdot \mu, \tag{119}$$

woraus folgt:

$$\eta + 3 \cdot s + \mu = \zeta + 3 \cdot g. \tag{120}$$

Die Anwendung der Formel (120) auf das durch je 3 consecutive Punkte einer Raumcurve erzeugte, einstufige System von unendlich kleinen Dreiecken ergiebt eine der bekannten Formeln zwischen den Charakteren einer Raumcurve.

Zur Ableitung der Productenformeln benutzen wir das in den Math. Ann. Bd. X, p. 355 allgemein auseinandergesetzte Eliminationsverfahren. Um z. B. die Zahl x_{16} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke zu bestimmen, *welche einem gegebenen einstufigen Systeme Σ und einem gegebenen, sechsstufigen Systeme Σ' gemeinsam sind*, gehen wir davon aus, dass die gesuchte Formel von den auf Σ bezüglichen Symbolen ausser s, g, ζ nur noch μ enthalten kann. Wir können also schreiben:

$$x_{16} = s \cdot y + g \cdot v + (3g + \zeta) \cdot w + \mu \cdot u,$$

wo y, v, w, u noch zu bestimmende Coefficienten sind, welche auf Σ' bezügliche, sechsfache Bedingungen darstellen. Um sie zu bestimmen, multipliciren wir die Formel nach einander etwa mit $d'G'\mu'$, $d's'^3\mu'^2$, $G'\mu's'$, $d'G's'$. Dadurch kommt:

$$d'G'\mu' = y + 3w, \quad d's'^3\mu'^2 = v + 3w,$$
$$G'\mu's' = w, \quad d'G's' = 3 \cdot w + u,$$

also:

$$w = G'\mu's, \quad u = d'G's' - 3 \cdot G'\mu's', \quad v = d's'^3\mu'^2 - 3 \cdot G'\mu's',$$
$$y = d'G'\mu' - 3G'\mu's',$$

woraus sich nach Anwendung der Formeln (118) und (119) ergiebt:

$$w = G'\mu's', \quad u = \eta'G's', \quad v = \zeta's'^3\mu'^2, \quad y = \eta'G'\mu'.$$

Hiernach kommt für die gesuchte Zahl:

$$x_{16} = s \cdot \eta'G'\mu' + g \cdot \zeta's'^3\mu'^2 + (3g + \zeta) \cdot G'\mu's' + \mu \cdot \eta'G's'. \tag{121}$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für die Zahl x_{25} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, *welche einem gegebenen, zweistufigen Systeme Σ und einem gegebenen, fünfstufigen Systeme Σ' gemeinsam sind*, die Formel:

(122) $x_{25} = s^2 \cdot (\eta' \mu'^3 g' + 3 \cdot \mu'^3 s'^2) + g_e \cdot (\zeta' \mu'^3 s' + 3 \cdot G' \mu') + \eta g \cdot \mu'^3 s'^2$
$+ \zeta s \cdot G' \mu' + g_p \cdot \zeta' \mu' s'^3 + \mu s \cdot (\eta' G' + 3 \cdot G' s') + \eta \mu \cdot G' s' + \mu^2 \cdot \zeta' s'^3 g'.$

Drittens erhält man für die Zahl x_{34} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, *welche einem gegebenen dreistufigen Systeme Σ und einem gegebenen, vierstufigen Systeme Σ' gemeinsam sind*, die Formel:

(123) $x_{34} = \zeta s^2 \cdot \mu'^3 g' + \eta g_e \cdot \mu'^3 s' + s g_e \cdot (\mu'^3 \zeta' + 3 \cdot \mu'^3 g')$
$+ \eta g_p \cdot \mu' s'^3 + \zeta \mu s \cdot G' + (\mu s^2 - s^3) \cdot \eta' g_s'$
$+ \mu g_p \cdot (\zeta' s'^3 + 3 \cdot s'^3 g')$
$+ s^3 \cdot (\eta' \mu' g_p' + 3 \cdot \mu' s'^3) + \mu^3 \cdot (\eta' s' g_e' + \mu'^3 s') + \zeta \mu^2 \cdot s'^3 g'$
$+ g_s \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3 + 3 \cdot G').$

Von den abgeleiteten Productenformeln entwickeln wir durch Multiplication der Formel für x_{34} diejenigen, welche sich auf *zwei gegebene vierstufige Systeme von unendlich kleinen Dreiecken Σ und Σ' beziehen.* Zwei solche Systeme haben ∞^1 unendlich kleine Dreiecke gemeinsam. Die ihnen angehörigen ∞^1 Punkte s bilden eine Curve von der Ordnung:

(124) $s x_{34} = \eta s g_e \cdot \mu'^3 s' + \mu^3 s \cdot \eta' s' g_e' + \zeta s^3 \cdot \mu'^3 g' + \mu^3 g \cdot \zeta' s'^3$
$+ s^3 g \cdot \zeta' \mu'^3$
$+ \zeta \mu^3 \cdot s'^3 g' + 3 \cdot s^3 g \cdot \mu'^3 g' + 3 \cdot \mu^3 g \cdot s'^3 g' + \eta g_s \cdot \mu' s'^3$
$+ \mu s^3 \cdot \eta' g_s'$
$+ 3 \cdot s^3 g \cdot \mu' s'^3 + 3 \cdot \mu s^3 \cdot s'^3 g' + \zeta s^3 \cdot \mu' s'^3 + \mu s^3 \cdot \zeta' s'^3$
$+ \zeta s^3 \cdot G' + G \cdot \zeta' s'^3$
$+ (\zeta \mu s^2 - \zeta s^3) \cdot G' + G \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3)$
$+ s^3 g \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3) + (\zeta \mu s^2 - \zeta s^3) \cdot s'^3 g'$
$+ 3 \cdot G \cdot s'^3 g' + 3 \cdot s^3 g \cdot G' + 3 \cdot G \cdot G' + \mu^3 s \cdot \mu'^3 s'$
$- \mu s^3 \cdot \mu' s'^3;$

die ihnen angehörigen Strahlen g bilden eine Linienfläche vom Grade:

(125) $g x_{34} = \eta g_s \cdot \mu'^3 s' + \mu^3 s \cdot \eta' g' s' + G \cdot \mu'^3 \zeta' + \mu^3 \zeta \cdot G' + \eta g_s \cdot \mu' s'^3$
$+ \mu s^3 \cdot \eta' g_s' + (\zeta \mu s^2 - \zeta s^3) \cdot G' + G \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3)$
$+ G \cdot \eta' g_s' + \eta g_s \cdot G'$
$+ G \cdot \zeta' s'^3 + \zeta s^3 \cdot G' + \zeta \mu^3 \cdot s'^3 g' + s^3 g \cdot \zeta' \mu'^3$
$+ 3 \cdot G \cdot s'^3 g' + 3 \cdot s^3 g \cdot G'$
$+ 4 \cdot \mu^3 g \cdot s'^3 g' + 4 \cdot s^3 g \cdot \mu'^3 g' + s^3 g \cdot \eta' \mu' g_p' + \eta \mu g_p \cdot s'^3 g'$
$+ 3 \cdot s^3 g \cdot \mu' s'^3 + 3 \mu s^3 \cdot s'^3 g'$
$+ 4 G \cdot G' + \mu^3 g \cdot \eta' s' g_e' + \eta s g_e \cdot \mu'^3 g' + \mu^3 g \cdot \mu'^3 s' + \mu^3 s \cdot \mu'^3 g'$
$+ \mu^3 g \cdot \zeta' s'^3 + \zeta s^3 \cdot \mu'^3 g' + G \cdot \mu'^3 g' + \mu^3 g \cdot G';$

endlich gehen von den ihnen angehörigen ∞^1 Ebenen durch einen gegebenen Punkt:

$$
\begin{aligned}
(126)\quad \mu x_{34} = {} & \zeta s^3 \cdot \mu'^3 g' + \mu^3 g \cdot \zeta' s'^3 + \eta g_s \cdot \mu'^3 s' + \mu^3 s \cdot \eta' g_s' \\
& \qquad + 3 \cdot \mu^3 s \cdot \mu'^3 s' \\
& + \mu^3 s \cdot \eta' \mu'^3 + \eta \mu^3 \cdot \mu'^3 s' + \eta \mu g_p \cdot \mu' s'^3 + \mu s^3 \cdot \eta' \mu' g_p' \\
& \qquad + 3 \cdot G \cdot G' \\
& + (\zeta \mu s^2 - \zeta s^3) \cdot G' + G \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3) + 3 \cdot \mu^3 g \cdot s'^3 g' \\
& \qquad + 3 \cdot s^3 g \cdot \mu'^3 g' \\
& + \zeta \mu^3 \cdot s'^3 g' + s^3 g \cdot \zeta' \mu'^3 + \mu^3 g \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3) \\
& \qquad + (\zeta \mu s^2 - \zeta s^3) \cdot \mu'^3 g' \\
& + 3 \cdot \mu^3 g \cdot G' + 3 \cdot G \cdot \mu'^3 g' + G \cdot \mu'^3 \zeta' + \mu^3 \zeta \cdot G' + 3 \mu s^3 \cdot \mu' s'^3.
\end{aligned}
$$

Der Umstand, dass die drei abgeleiteten Formeln durch Vertauschung der gestrichelten Symbole mit den nichtgestrichelten Symbolen in sich selbst übergehen, liefert eine Controle der Berechnung.

Es liegt nahe, die Productenformeln (121) bis (126) auf die Systeme anzuwenden, welche auf Flächen und auf Raumcurven durch je drei unendlich nahe Punkte gebildet werden. Die Deutung der Symbole für eine Fläche ist sehr leicht, wenn man beachtet, dass jede Haupttangente durch ihren Berührungspunkt und durch jede sie enthaltende Ebene ein Dreieck η erzeugt, und dass jeder Punkt der Rückkehrcurve auf jeder ihn treffenden Ebene ein Dreieck ζ erzeugt. Das durch eine Raumcurve erzeugte, einstufige System kann eine endliche Anzahl von Dreiecken η überhaupt nicht enthalten. Denn, wenn die Curve stationäre Erzeugende d. h. Stellen besitzt, wo 3 consecutive Punkte in gerader Linie liegen, so enthält sie ein Dreieck η in jeder durch diese gerade Linie gelegten Ebene, also ∞^1 Dreiecke η, und ein solcher Fall macht unsere Fragestellungen überhaupt illusorisch. Ein Dreieck ζ aber treffen wir auf einer Raumcurve in jedem stationären Punkte, d. h. wo drei consecutive Tangenten sich in demselben Punkte schneiden. Bei *Systemen* von Flächen oder von Curven könnte die Deutung der auf η oder ζ bezüglichen Symbole Ausartungsanzahlen einführen. Ersetzt man jedoch dann das auf η resp. ζ bezügliche Symbol vermittelst der Formel (120) durch ein auf ζ resp. η bezügliches Symbol, so bekommt man immer eine Deutung, welche von Ausartungsanzahlen frei ist. Hiernach findet man:

1) für eine feste Fläche:

$$\mu^3 s = n, \quad \mu^3 g = a, \quad \eta \mu^3 = \varkappa', \quad \eta \mu g_p = \varkappa, \quad \eta \mu s^2 = 2 \cdot n, \quad \zeta \mu s^2 = 0,$$

wo, nach der Bezeichnung von Salmon-Fiedler, n die Ordnung der Fläche und a ihren Rang bedeutet, wo ferner $\varkappa'$ angiebt, wieviel Haupttangenten in einer gegebenen Ebene liegen, $\varkappa$ angiebt, wieviel durch einen gegebenen Punkt gehen;

2) für ein einstufiges System von Flächen:

$$\mu^3 s^2 = \mu, \quad \mu G = \nu, \quad \eta G = 0, \quad \zeta\mu^3 s = k, \quad \eta\mu^3 g = k',$$

wo μ angiebt, wieviel Flächen durch einen gegebenen Punkt gehen, ν, wieviel eine gegebene Gerade berühren, und wo k den Grad der von den ∞^1 Rückkehrcurven gebildeten Fläche, k' den Grad des von den ∞^3 Haupttangenten gebildeten Complexes bezeichnen;

3) für ein zweistufiges Flächensystem:

$$\mu G s = T, \quad \eta G s = 0, \quad \eta\mu G = K', \quad \zeta\mu^3 s^2 = K,$$

wo T angiebt, wieviel Flächen eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, K', wieviel Flächen eine gegebene Gerade als Haupttangente haben, K, wieviel Flächen durch einen gegebenen Punkt ihre Rückkehrcurve schicken;

4) für eine feste Raumcurve:

$$s = m, \quad g = r, \quad \mu = n, \quad \zeta = \beta, \quad \eta = 0,$$

wo, nach der Bezeichnung von Salmon-Fiedler, m die Ordnung der Raumcurve, r ihren Rang, n ihre Classe, β die Zahl ihrer stationären Punkte bedeutet;

5) für ein einstufiges System von Raumcurven:

$$s^2 = \nu, \quad g_e = \varrho, \quad g_p = \varrho', \quad \mu^2 = \nu', \quad \mu s = \sigma, \quad \eta g = 0, \quad \zeta s = b,$$

wo ν angiebt, wieviel Raumcurven eine gegebene Gerade schneiden, ϱ, wieviel eine gegebene Ebene berühren, ϱ', wieviel eine Tangente durch einen gegebenen Punkt schicken, ν', wieviel eine Schmiegungsebene durch eine gegebene Gerade schicken, σ, wieviel eine Schmiegungsebene durch einen gegebenen Punkt schicken, während ihr Berührungspunkt auf einer gegebenen Ebene liegt, und wo ζs die Ordnung der von den stationären Punkten gebildeten Curve bezeichnet;

6) für ein zweistufiges System von Raumcurven:

$$s^3 = P, \quad \mu^3 = P', \quad s g_e = t, \quad \zeta s^2 = B,$$

wo P angiebt, wieviel Raumcurven durch einen gegebenen Punkt gehen, P', wieviel eine gegebene Schmiegungsebene haben, t, wieviel eine gegebene Ebene auf einer in ihr gegebenen Geraden berühren, und wo B der Grad der von den stationären Punkten gebildeten Fläche ist.

Die in den 6 Fällen *nicht* angeführten Symbole sind entweder Null, oder lassen sich bei der Anwendung der Formeln (121) bis (126) vermeiden.

Wir bezeichnen nun eine gegebene Raumcurve oder Fläche oder ein gegebenes System solcher Gebilde immer durch S mit einem angefügten Index, und die auf S_i bezüglichen Anzahlen durch die eben eingeführten Buchstaben, aber versehen mit dem Index i. Dann können wir den aus F. (121) folgenden Satz für die dreipunktige Berührung zwischen einer Raumcurve und einer Fläche eines zweistufigen Flächensystems so aussprechen:

(121a) *Die Zahl derjenigen Flächen eines zweistufigen Flächensystems S_2, welche eine gegebene Raumcurve S_1 dreipunktig berühren, beträgt:*

$$m_1 \cdot K_2' + r_1 \cdot K_2 + (3 \cdot r_1 + \beta_1) \cdot T_2.$$

Aus (122) folgt:

(122a) *Unter den Raumcurven eines einstufigen Systems S_1 von Raumcurven giebt es*

$$\nu_1 \cdot (k_2' + 3 \cdot \mu_2) + \varrho_1 \cdot (k_2 + 3 \cdot \nu_2) + b_1 \cdot \nu_2,$$

welche eine Fläche eines gegebenen einstufigen Flächensystems S_2 dreipunktig berühren.

Aus (123) ergiebt sich:

(123a) *Die Zahl derjenigen Raumcurven eines gegebenen zweistufigen Systems S_1, welche eine gegebene Fläche S_2 dreipunktig berühren, beträgt:*

$$P_1 \cdot \varkappa_2 + P_1' \cdot n_2 + B_1 \cdot a_2 + t_1 \cdot (\varkappa_2' + 3 \cdot n_2).$$

Wendet man schliesslich die Formeln (124), (125), (126) auf zwei gegebene Flächen S_1 und S_2 an, so werden alle Glieder der rechten Seiten Null mit Ausnahme von

$$\mu^3 s \cdot \mu'^3 s', \quad \mu^3 g \cdot \mu'^3 s', \quad \mu^3 s \cdot \mu'^3 g', \quad \mu^3 s \cdot \eta' \mu'^3, \quad \eta \mu^3 \cdot \mu'^3 s',$$

welche beziehungsweise liefern:

$$n_1 \cdot n_2, \quad a_1 \cdot n_2, \quad n_1 \cdot a_2, \quad n_1 \cdot \varkappa_2', \quad \varkappa_1' \cdot n_2.$$

Die Zahlen sx_{34}, gx_{34}, μx_{34} sind aber nichts anderes, als Ordnung, Rang und Classe der Durchschnittscurve der beiden Flächen S_1 und S_2, so dass unsere Anwendung zu folgendem Satze führt:

(124a), (125a), (126a). *Die Schnittcurve zweier Flächen S_1 und S_2 besitzt ∞^1 Punkte, von denen jede Ebene $n_1 \cdot n_2$ enthält, ferner ∞^1 Tangenten, von denen*

$$n_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot n_2$$

eine gegebene Gerade schneiden, endlich ∞^1 Schmiegungsebenen, von denen

$$3 \cdot n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot \varkappa_2' + \varkappa_1' \cdot n_2$$

durch einen gegebenen Punkt gehen.

Die beiden letzten Zahlen ergeben bekannte Resultate für die speciellen Fälle, wo beide Flächen abwickelbar sind, oder wo beide punktallgemein sind, also $a = n \cdot (n-1)$, $\varkappa' = 3 \cdot n(n-2)$ ist. (Vergl. Salmon-Fiedler's Raumgeometrie, Art. 439 und 83.)

Hamburg, Juni 1880.

Ueber eine Gleichung zwischen Thetafunctionen.

Von

A. Enneper in Göttingen.

(Aus den Nachrichten von d. k. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, 1878.)

In den „Comptes Rendus" vom Jahre 1877 (t. LXXXV, p. 731) hat Herr Hermite eine bemerkenswerthe Relation zwischen Thetafunctionen mitgetheilt und dieselbe zur Integration einer Differentialgleichung verwandt. Die bemerkte Relation lässt sich ohne grosse Rechnung aus Jacobi's Multiplicationstheorem der Thetafunctionen herleiten, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Die Argumente w, w_1 etc. seien durch die folgenden Gleichungen verbunden:

$$(1)\qquad w_1=\frac{w+x+y+z}{2},\quad x_1=\frac{w+x-y-z}{2},\quad y_1=\frac{w-x+y-z}{2},\quad z_1=\frac{w-x-y+z}{2}.$$

Man setze:

$$(2)\qquad S=f(w_1)\,f_1(x_1)\,f_2(y_1)\,f_3(z_1),$$

wo f, f_1, f_2 und f_3 beliebige Functionen ihrer Argumente sind. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) findet man leicht:

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dw}+\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}+\frac{1}{S}\frac{dS}{dy}+\frac{1}{S}\frac{dS}{dz}=\frac{2f'(w_1)}{f(w_1)}.$$

Multiplicirt man mit S, so ist nach (2):

$$(3)\qquad \frac{dS}{dw}+\frac{dS}{dx}+\frac{dS}{dy}+\frac{dS}{dz}=2f'(w_1)\,f_1(x_1)\,f_2(y_1)\,f_3(z_1).$$

Nimmt man $w=-(x+y+z)$, dann aus (1)

$$x_1=-y-z,\quad y_1=-x-z,\quad z_1=-x-y,$$

so geht die Gleichung (3) in folgende über:

$$(4)\qquad \left[\frac{dS}{dw}+\frac{dS}{dx}+\frac{dS}{dy}+\frac{dS}{dz}\right]_{w+x+y+z=0} =2f'(0)\,f_1(-y-z)\,f_2(-x-z)\,f_3(-x-y).$$

Mit Hülfe dieser allgemeinen Gleichung lässt sich die von Herrn Hermite gegebene Relation ohne Schwierigkeit ableiten.

Man setze mit Jacobi:

$$\vartheta(x)=\sum(-1)^m q^{m^2}e^{2mxi},\quad \vartheta_3(x)=\sum q^{m^2}e^{2mxi},$$

$$i\vartheta_1(x)=\sum(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)xi};\quad \vartheta_2(x)=\sum q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)xi}.$$

In den vorstehenden Summen ist $i = \sqrt{-1}$, das summirende Element m nimmt alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ an.

Das Multiplicationstheorem der Thetafunctionen Jacobi's ist in der Gleichung enthalten:

$$\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z)$$
$$= \vartheta_3(w_1)\,\vartheta_3(x_1)\,\vartheta_3(y_1)\,\vartheta_3(z_1) + \vartheta_2(w_1)\,\vartheta_2(x_1)\,\vartheta_2(y_1)\,\vartheta_2(z_1).$$

Aus dieser Gleichung leite man zwei weitere Gleichungen ab, indem zuerst w, x, y, z sämmtlich um $\frac{\pi}{2}$ zunehmen, in der so erhaltenen Gleichung lasse man darauf w allein um π zunehmen. Die Summe der beiden bemerkten Gleichungen führt zu dem folgenden Resultat:

$$\begin{aligned}(5)\qquad 2\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) &= \vartheta_3(w_1)\vartheta_3(x_1)\vartheta_3(y_1)\vartheta_3(z_1)\\ &-\vartheta_2(w_1)\vartheta_2(x_1)\vartheta_2(y_1)\vartheta_2(z_1) + \vartheta(w_1)\vartheta(x_1)\vartheta(y_1)\vartheta(z_1)\\ &-\vartheta_1(w_1)\vartheta_1(x_1)\vartheta_1(y_1)\vartheta_1(z_1).\end{aligned}$$

Man identificire jedes der rechts stehenden Producte von vier Thetafunctionen mit dem in (2) aufgestellten Ausdruck für S, wende dann auf jedes dieser Producte die Gleichung (5) an. Da:

$$\vartheta'(0) = 0, \quad \vartheta_2'(0) = 0, \quad \vartheta_3'(0) = 0,$$

so bleibt rechts nur das Product übrig, welches von ϑ_1 abhängt. Wendet man also die Gleichung (4) auf die Gleichung (5) an, so folgt, nach Division durch 2:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &-\vartheta'(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z) + \vartheta(x+y+z)\,\vartheta'(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z)\\ &+\vartheta(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta'(y)\,\vartheta(z) + \vartheta(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta'(z)\\ &= \vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(y+z)\,\vartheta_1(x+z)\,\vartheta_1(x+y),\end{aligned}\right.$$

was die zu beweisende Relation ist. Statt von der Gleichung (5) auszugehen, kann man ähnliche Gleichungen zu Grunde legen, bei welchen auf der linken Seite das Product von vier Functionen ϑ durch die Producte von vier Functionen ϑ_3, ϑ_2 oder ϑ_1 ersetzt ist. Die vier Terme auf der rechten Seite von (5) wechseln dabei bekanntlich nur ihre Vorzeichen. Die Resultate, welche sich so ergeben, lassen sich auch aus der Gleichung (6) herleiten, wenn x, y und z sämmtlich um eine der Quantitäten $\frac{\pi}{2}$, $\frac{i\log q}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \frac{i\log q}{2}$ zunehmen. Auf der rechten Seite der Gleichung (6) werden die Functionen ϑ_1, abgesehen von einem Factor, reproducirt, während auf der linken Seite der Reihe nach die Functionen ϑ_3, ϑ_1 und ϑ_2 an Stelle der Function ϑ treten.

Eine andere Art von Relationen ergiebt sich, wenn in der Gleichung (6) je zwei der Quantitäten x, y und z um $\frac{\pi}{2}$, $\frac{i\log q}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \frac{i\log q}{2}$ zunehmen. Von diesen Relationen hat Herr Hermite eine aufgestellt, welche aus der Gleichung (6) für

$$y = a + \frac{i \log q}{2}, \quad z = b - \frac{i \log q}{2}$$

folgt. Man erhält in diesem Falle die nachstehende Gleichung:

$$\begin{aligned} -\vartheta'(x+a+b)\,\vartheta(x)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_1(b) + \vartheta(x+a+b)\,\vartheta'(x)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_1(b) \\ + \vartheta(x+a+b)\,\vartheta(x)\,\vartheta_1'(a)\,\vartheta_1(b) + \vartheta(x+a+b)\,\vartheta(x)\,\vartheta_1(a)\,\vartheta_1'(b) \\ = \vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(a+b)\,\vartheta_1(x+b)\,\vartheta_1(x+a). \end{aligned}$$

Weitere Aufstellungen ähnlicher Gleichungen mit Hülfe der Gleichung (6) bieten keine Schwierigkeiten dar, so dass eine Ausführung solcher Gleichungen hier unterbleiben kann.

Nimmt man in der Gleichung (6) $z = 0$, dividirt durch

$$\vartheta(0)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(x+y),$$

setzt

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),$$

führt rechts die elliptischen Functionen ein, so erhält man die bekannte Gleichung Jacobi's:

$$\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} + \frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} - \frac{\vartheta'(x+y)}{\vartheta(x+y)}$$

$$= \frac{2Kk^2}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2K(x+y)}{\pi}.$$

Diese Gleichung lässt sich auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{d \log \dfrac{\vartheta(x+y)}{\vartheta(x)}}{dx} = \frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} - \frac{2Kk^2}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2K(x+y)}{\pi}$$

Es sei g eine Constante. Man setze:

$$\tau = g\,\frac{\vartheta(x+y)}{\vartheta(x)}\,e^{-x\frac{\vartheta_1'(y)}{\vartheta_1(y)}}.$$

Mit Rücksicht auf:

$$\frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} - \frac{\vartheta_1'(y)}{\vartheta_1(y)} = -\frac{2K}{\pi}\,\frac{\cos\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Ky}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}}$$

folgt:

$$\frac{d\tau}{dx} = -\tau\,\frac{2K}{\pi}\left[\frac{\cos\operatorname{am}\dfrac{2Ky}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Ky}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\dfrac{2Ky}{\pi}} + k^2 \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi} \sin\operatorname{am}\frac{2K(x+y)}{\pi}\right].$$

Diese Gleichung giebt für t folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} = \tau\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left[2k^2 \sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - (1+k^2) + \frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2Ky}{\pi}}\right].$$

Diese Differentialgleichung, in unwesentlich anderer Bezeichnung,

fällt mit einer der Gleichungen zusammen, welche Hr. Hermite (l. c. p. 824) auf ganz verschiedenem Wege aufgestellt hat.

Bei dieser Gelegenheit sei des Differentialquotienten von sin am u in Beziehung auf den Modul k gedacht, welchen Hr. Hermite in den „Astronom. Nachrichten" (Nr. 2301, Band 96, p. 322) mitgetheilt hat. Die folgende Ableitung scheint die einfachste zu sein. Es ist:

$$\frac{\sin^2 \operatorname{am} w}{\Delta^2 \operatorname{am} w} = \frac{\cos^2 \operatorname{am} w}{k'^2} - \frac{1}{k'^2}\, \frac{d\,\dfrac{\sin \operatorname{am} w \cos \operatorname{am} w}{\Delta \operatorname{am} w}}{dw}.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} w}{\Delta^2 \operatorname{am} w}\, dw = \frac{1}{k'^2}\int_0^u \cos^2 \operatorname{am} w\, dw - \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{k'^2\, \Delta \operatorname{am} u}.$$

Nun ist:

$$k^2 \int_0^u \cos^2 \operatorname{am} w\, dw = \left(\frac{E}{K} - k'^2\right) u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

also:

$$(\alpha)\quad k^2 k'^2 \int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} w}{\Delta^2 \operatorname{am} w}\, dw = \left(\frac{E}{K} - k'^2\right) u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{k^2 \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}.$$

Die Gleichung: $$u = \int_0^\varphi \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Theta}}$$

nach k differentiirt giebt:

$$\frac{du}{dk} = \int_0^\varphi \frac{k \sin^2 \Theta}{(1 - k^2 \sin^2 \Theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\Theta.$$

Für $\Theta = \operatorname{am} w$, $\varphi = \operatorname{am} u$ folgt:

$$\frac{du}{dk} = \int_0^u \frac{k \sin^2 \operatorname{am} w}{\Delta^2 \operatorname{am} w}\, dw.$$

Da nun: $$\frac{d \sin \operatorname{am} u}{dk} = \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u\, \frac{du}{dk},$$

so folgt mittelst der Gleichung (α):

$$k k'^2 \frac{d \sin \operatorname{am} u}{dk} = \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u \left[\left(\frac{E}{K} - k'^2\right) u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right]$$
$$- k^2 \sin \operatorname{am} u \cos^2 \operatorname{am} u.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von derjenigen des Herrn Hermite durch die Vorzeichen der Terme auf der rechten Seite; der in den „Astr. Nachr." aufgestellte Differentialquotient von sin am u nach k ist wegen der Vorzeichen nicht ganz genau.

Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

Von

P. Gordan in Erlangen.

(Hierzu eine Tafel.)

Als es mir gelungen war zu beweisen, dass sich für jede binäre Form ein endliches zugehöriges Formensystem aufstellen lasse, wandte sich mein Interesse naturgemäss der analogen Fragestellung bei ternären Formen zu. Indess erkannte ich bald, dass eine allgemeine Behandlung des hiermit angedeuteten Problemes fürs erste noch viel zu schwierig ist. Ich sah mich also darauf angewiesen, zunächst einzelne Fälle zu studiren. Sehr leicht erledigte sich der Fall zweier ternärer quadratischer Formen; man vergl. die Resultate, welche in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie p. 291 mitgetheilt sind. Aber schon der Fall einer einzelnen ternären cubischen Form, den ich im ersten Bande dieser Annalen p. 90 ff. behandelte, erwies sich als complicirt. Ich nahm sodann die ternären biquadratischen Formen in Angriff. Auch bei ihnen gelang es mir, die Endlichkeit des zugehörigen Formensystems zu erschliessen.*) Inzwischen erwies sich die Zahl der bei ihnen in Betracht kommenden Bildungen als so gross, dass ich von vorneherein davon abstand, das Formensystem wirklich hinzuschreiben, und schliesslich überhaupt auf eine Redaction meiner immerhin nur vorläufigen Untersuchungen verzichtete. Ich wurde zu denselben erst wieder zurückgeführt, als Hr. Klein bei seinen Studien über die Auflösung gewisser Gleichungen siebenten Grades**) eine sehr einfache ternäre Form vierten Grades auffand, die durch 168 lineare Substitutionen in sich übergeht und dementsprechend nur vier linear unabhängige Covarianten besitzt. In der That gestatteten mir meine früheren Betrachtungen sehr leicht, für

---

*) Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, p. 174, Note.

**) Cf. Zwei Mittheilungen über Gleichungen siebenten Grades in den Erlanger Berichten vom 4. März und 20. Mai 1878, sowie: Ueber Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen, Math. Annalen Bd. XIV; Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade, ebenda, Bd. XV.

diese Form das ganze zugehörige System, das aus 54 Bildungen besteht, aufzustellen. Indem ich dasselbe nachstehend veröffentliche, verfolge ich einen doppelten Zweck. Einmal wünsche ich durch Behandlung des einzelnen Falles die Principien darzulegen, die auch im Falle der allgemeinen biquadratischen Form eine Umgrenzung des Formensystems ermöglichen. Andererseits wird die Kenntniss der hier mitzutheilenden Resultate für weitere Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen siebenten Grades von Vortheil sein.

Meine Darlegung trennt sich in drei Capitel. Im ersten Capitel (§ 1.—3.) stelle ich eine Reihe im Allgemeinen bekannter Definitionen und Sätze zusammen, die für das Folgende wichtig sind. Ich knüpfe dabei zumal an diejenigen Entwickelungen an, die ich in meiner Programmschrift: *Ueber das Formensystem binärer Formen* (Leipzig 1875) gegeben habe. Im zweiten Capitel (§ 4.—10.) beginne ich die Systemaufstellung für die allgemeine biquadratische Form und führe sie so weit, als ohne weitläufige Rechnung möglich ist. Im dritten Capitel endlich (§ 11.—20.) lasse ich die Vereinfachungen eintreten, welche der besonderen hier in Betracht kommenden biquadratischen Form entsprechen, und führe auf Grund derselben die Systembildung zum Abschluss.

Erstes Capitel.

Allgemeine Definitionen und Sätze.

§ 1.

Operationen.

Die beiden hauptsächlichen Operationen, deren ich mich im Folgenden zu bedienen habe, sind der *Ueberschiebungsprocess* und der *Faltungsprocess.* Hinsichtlich derselben scheinen folgende Vorerinnerungen am Platze.

Zunächst sei daran erinnert, dass man, der Allgemeinheit wegen, jede einer Operation zu unterwerfende Form im *ternären* Gebiete sich als Zwischenform zu denken hat, d. h. als eine Form, die sowohl die x, als die u, enthält.

Zwei derartige Formen:

$$A = a_x^r \, u_\alpha^s, \quad B = b_x^\varrho \, u_\beta^\sigma$$

können nun auf mannigfachste Weise über einander geschoben werden. In der That muss man jede Bildung:

$$u = a_\beta^{r_1} \, b_\alpha^{r_2} (a \, b \, u)^{r_3} \, (\alpha \beta x)^{r_4} \, a_x^{r_5} \, b_x^{r_6} \, u_\alpha^{r_7} \, u_\beta^{r_8},$$

weil in den Coefficienten von A und B bilinear, als *Ueberschiebung* bezeichnen. Dabei ist natürlich:

$$r_1 + r_3 + r_5 = r;\quad r_2 + r_4 + r_7 = s;\quad r_2 + r_3 + r_6 = \varrho;$$
$$r_1 + r_4 + r_8 = \sigma.$$

Unter der grossen Zahl dieser Bildungen benutze ich zumal diejenigen, bei denen drei der vier Zahlen r_1, r_2, r_3, r_4 verschwinden, also:

$$a_\beta^{r_1}\, a_x^{r_5}\, b_x^{r_6}\, u_\alpha^{r_7}\, u_\beta^{r_8},\ \text{resp.}$$
$$b_\alpha^{r_2}\, a_x^{r_5}\, b_x^{r_6}\, u_\alpha^{r_7}\, u_\beta^{r_8},$$
$$(abu)^{r_3}\, a_x^{r_5}\, b_x^{r_6}\, u_\alpha^{r_7}\, u_\beta^{r_8},$$
$$(\alpha\beta x)^{r_4}\, a_x^{r_5}\, b_x^{r_6}\, u_\alpha^{r_7}\, u_\beta^{r_8};$$

ich verwende für dieselben die Bezeichnung:

$$A_B^{r_1},\quad B_A^{r_2},\quad (ABu)^{r_3},\quad (ABx)^{r_4}.$$

Uebrigens bemerkt man sofort, dass solche Ueberschiebungen, bei denen sowohl r_3 als $r_4 > 0$ ist, sich durch andere ausdrücken lassen; man hat nur die Identität anzuwenden:

$$(abu)\,(\alpha\beta x) = \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_x \\ b_\alpha & b_\beta & b_x \\ u_\alpha & u_\beta & u_x \end{vmatrix}.$$

Natürlich gestaltet sich auch der *Faltungsprocess* bei ternären Formen mannigfaltiger als bei binären. Wenn man in dem Producte

$$A \cdot B = a_x^r\, u_\alpha^s \cdot b_x^\varrho\, u_\beta^\sigma$$

irgendwelche Factorenpaare

$$a_x u_\beta,\quad b_x u_\alpha,\quad a_x b_x,\quad u_\alpha u_\beta$$

resp. durch:

$$a_\beta,\quad b_\alpha,\quad (abu),\quad (\alpha\beta x)$$

ersetzt, so sage ich von jeder so entstehenden Form, dass sie aus dem Product $A \cdot B$ durch Faltung hervorgehe. Auch aus A, resp. B, allein entstehen Formen durch Faltung, nämlich:

$$a_\alpha^\lambda\, a_x^{r-\lambda}\, u^{s-\lambda},\quad b_\beta^\lambda\, b_x^{\varrho-\lambda}\, u_\beta^{\sigma-\lambda},$$

ich nenne diese Formen A_λ, bez. B_λ.

§ 2.

Reihenentwickelungen der Ueberschiebungen und ihrer Glieder.

Hat man A und B als irgendwelche symbolische Producte gegeben, so ergeben sich die Ueberschiebungen U von A und B im Allgemeinen als Aggregate symbolischer Producte G_1; $G_2, \cdots$:

$$U = c_1 G_1 + c_2 G_2 + \cdots.$$

Diese $G_1, G_2, \cdots$, die ich *Glieder* der Ueberschiebung U nenne, entstehen aus dem Producte $A \cdot B$ je durch entsprechende Faltungen.

Dabei werden nur solche Factorenpaare gefalten, deren einer Factor der Form A, der andere B angehört, und die verschiedenen Glieder G entstehen je nach Auswahl dieser Factoren.

Man hat nun Sätze, denen zufolge ein beliebiges Glied der Ueberschiebung U (oder auch diese Ueberschiebung selbst) bei der Bildung eines Formensystems durch ein anderes beliebiges Glied und übrigens niedere Bildungen ersetzt werden kann.

Zunächst nämlich kann man die Differenzen zweier Glieder $G_i - G_k$ (oder auch die Differenz $G_i - U$) durch andere symbolische Producte H ausdrücken, die aus den am Schlusse des vorigen Paragraphen definirten A_λ, B_λ durch Faltung hervorgehen. Diese H sind aber selbst wieder Glieder von Ueberschiebungen U_1 von A_λ über B_λ. Wir können also die Differenzen $H_i - H_k$ (und $H_i - U_1$) wieder als Aggregate symbolischer Producte darstellen, die durch Faltung aus Formen $A_{\lambda,\mu}$, $B_{\lambda,\mu}$ entstehen, wo $A_{\lambda,\mu}$, $B_{\lambda,\mu}$ Formen bezeichnen sollen, die aus den A_λ, bez. den B_λ, durch Faltung hervorgehen. In dieser Weise fortfahrend gelangt man schliesslich zu einer Reihe:

$$G_i = a_0 U + a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots,$$

wo die U_i Ueberschiebungen von Formen bedeuten, welche aus A, resp. B durch Faltung hervorgehen. *Hiernach lässt sich jedes Glied der ursprünglichen Ueberschiebung durch ein Aggregat von Ueberschiebungen ersetzen.*

Statt dieser Reihe kann man sofort die andere bilden:

$$G_i = b_0 V + b_1 V_1 + b_2 V_2 + \cdots,$$

wo die $V, V_1, \cdots$ irgendwelche Glieder der Ueberschiebungen $U, U_1, \cdots$ bedeuten. *Das Glied G_i ist also durch ein beliebiges anderes Glied der ursprünglichen Ueberschiebung und Glieder niederer Ueberschiebungen ersetzt.*

Diese Sätze, die ich hier nur ganz im Allgemeinen hingestellt habe, spielen bei der Systembildung ternärer Formen dieselbe wichtige Rolle, wie die bekannten Reihenentwickelungen in der Theorie der binären Formen.

§ 3.

Functionaldeterminanten.

Die einfachsten Ueberschiebungen zweier Formen:

$$f = a_x^m, \quad F = b_x^n,$$

oder auch:

$$\varphi = u_\alpha^\mu, \quad \Phi = u_\beta^\nu$$

sind die *Functionaldeterminanten:*

$$(fFu), \quad (\varphi\Phi x).$$

Es ist nützlich, sich ein für allemal einzuprägen, dass viele aus diesen Functionaldeterminanten durch Faltung oder Ueberschiebung entstehenden Formen ganze Functionen von Formen niederen Grades sind. Dies gilt zunächst von dem Producte:

$$(fFu)(\varphi\Phi x) = \begin{vmatrix} f_\varphi & f_\Phi & f \\ F_\varphi & F_\Phi & F \\ \varphi & \Phi & u_x \end{vmatrix},$$

dann von vielen aus ihm durch Faltung entstehenden Formen, bei denen die Faltungen die Factoren (abu), $(\alpha\beta x)$ unberührt lassen. Ferner gilt es von den Functionaldeterminanten, die man aus (fFu) und $(\varphi\Phi x)$ mit beliebigen anderen Formen ψ bilden kann. Desgleichen von den Producten:

$$\psi(fFu), \quad \psi(\varphi\Phi x),$$

zu denen insbesondere die Quadrate und Producte der Functionaldeterminanten (fFu), $(\varphi\Phi x)$ selbst gehören.

Die einzige Ausnahme erleiden diese Sätze in dem Falle, wo die Grade m, n, μ, ν der ursprünglichen Formen den Werth 1 haben.

Zweites Capitel.

Die allgemeine, ternäre, biquadratische Form.

§ 4.

Allgemeines über Systembildung. Reducenten.

Die ternäre biquadratische Form

$$f = a_x^4$$

hat eine Covariante vierter Classe

$$\varphi = 2(abu)^4 = u_\nu^4.$$

Der Grundgedanke nun, auf den ich mich bei der Bildung des Systems von f stütze, ist der, f und φ *gleichzeitig* zu betrachten und demnach neben den Symbolen $a, b, c, \cdots$ von f, Symbole $\nu, \nu_1, \nu_2, \cdots$ von φ einzuführen. Hiernach wird man, unter Anwendung bekannter Principien, die zu f gehörigen symbolischen Producte P in drei Classen theilen:

1) in solche P, welche nur die Symbole $a, b, c, \cdots$ von f enthalten,
2) in solche P, welche nur die Symbole $\nu, \nu_1, \nu_2, \cdots$ von φ enthalten,
3) in solche P, die gleichzeitig Symbole $a, b, c, \cdots$ von f und Symbole $\nu, \nu_1, \nu_2, \cdots$ von φ enthalten.

Dementsprechend kann man die Aufstellung des vollen Systems der zu f gehörigen irreducibelen symbolischen Producte in der Weise gliedern, *dass man zunächst das System S_1 aller Producte der ersten Art sucht, sodann das System S_2 aller Producte der zweiten Art, und endlich das volle System S_3 der Producte dritter Art durch Combination von S_1 und S_2 gewinnt.*

Als einen *Reducenten* wird man sodann jeden aus den Symbolen $a, b, c, \cdots v, v_1, v_2, \cdots$ zusammengesetzten Ausdruck R betrachten, welcher zur Folge hat, dass alle symbolischen Producte, die ihn zum Factor haben, und in denen nur die in ihm auftretenden Symbole vorkommen, sich als Aggregate solcher Formen darstellen lassen, die entweder eine Invariante zum Factor haben oder aus weniger Symbolen bestehen. — Diese reducibelen Formen:

$$P_1, P_2, P_3, \cdots$$

gehen aus einer von ihnen durch Faltung hervor, und alle aus einer von ihnen durch Faltung entstehenden Formen kommen unter ihnen vor. — Schiebt man P_i über beliebige andere Formen ψ, so erhält man wieder reducibele Formen, ebenso sind alle Formen reducibel, welche durch Faltung aus dem Product $P_i\psi$ entstehen. — Dies sind aber alle symbolischen Producte, welche R zum Factor haben.

§ 5.

Disposition der nachfolgenden Untersuchungen.

Die Betrachtung für die allgemeine biquadratische Form f werde ich nunmehr nur so weit durchführen, dass ich für sie das System S_1 (der Producte erster Art) bilde. Das System S_2, und um so mehr das System S_3, soll nur bei der speciellen, weiterhin zu definirenden biquadratischen Form wirklich aufgestellt und also auch nur im dritten Capitel dieser Darlegung besprochen werden.

Unter den Formen des Systems S_1 nehme ich diejenigen voraus, welche die Symbole $a, b, c, \cdots$ von f nur in den Combinationen

$$a_x, b_x, \cdots$$

und

$$(abu), (acu), (bcu), \cdots$$

enthalten. Solche Formen will ich Formen Q nennen. Es sind diejenigen Formen, welche *aus dem binären Gebiet herübergenommen* sind. Schreibt man nämlich statt (abu), (acu), $\cdots$ etc. einfach (ab), (ac) $\cdots$, so kann man die entstehenden Ausdrücke Q' als Covarianten der binären Form a_x^4 auffassen. — Erst wenn diese Formen Q erledigt sind, was sehr rasch geschieht (§ 6.), schreite ich zur Betrachtung solcher Formen von S_1, die auch symbolische Factoren (abc), (abd), $\cdots$ enthalten (§ 7.—10.).

§ 6.

Das System S_1. Erster Theil: Herübergenommene Formen.

Die Covarianten Q' einer binären biquadratischen Form a_x^4 sind, wie man weiss, ganze Functionen $F(Q_i')$ der Formen:

$$Q_1' = a_x^4; \quad Q_2' = (ab)^2 a_x^2 b_x^2; \quad Q_3' = (ab)^2 (ac) a_x b_x^2 c_x^3;$$
$$Q_4' = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2; \quad Q_5' = (ab)^4.$$

Die entsprechenden Q lassen sich daher auf ganze Functionen von

$$Q_1 = a_x^4; \quad Q_2 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2; \quad Q_3 = (abu)^2 (acu) a_x b_x^2 c_x^3;$$
$$Q_4 = (abu)^2 (acu)^2 (bcu)^2; \qquad Q_5 = (abu)^4$$

zurückführen. Denn wenn $Q' - F(Q_i') = 0$ ist, so ist $Q - F(Q_i)$ durch u_x theilbar. Aber unter diesen Q ist noch $Q_5 = \varphi$ auszulassen. *Die einzigen irreducibelen Formen Q sind daher* (unter Beifügung zweckmässig scheinender Zahlenfactoren):

$$\text{(I)} \quad f = Q_1, \quad \Theta \, (\text{symb } \Theta_x^4 u_\vartheta^2) = -8 Q_2, \quad K = -32 Q_3, \quad j = \frac{8}{3} Q_4.$$

Ich werde die hier eingeführten Benennungen dieser einfachsten Covarianten auch fernerhin beibehalten.

§ 7.

Das System S_1. Zweiter Theil: Formen mit 3 Symbolen.

Unter den nun noch zu betrachtenden Formen von S_1 erledige ich in diesem Paragraphen diejenigen, welche nur drei Symbole: a, b, c enthalten.

Da die P, welche den Factor $(abc)^3$ besitzen, durch Einführung des Symbols v reducibel sind, so haben wir nur Formen $P_{1,i}$ mit dem einfachen Factor (abc) und Formen $P_{2,i}$ mit dem Factor $(abc)^2$ ins Auge zu fassen. Ich behaupte, *dass alle diese Formen reducibel sind mit alleiniger Ausnahme von*

$$\text{(II)} \qquad \Delta = \frac{16}{3} (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2.$$

In der That, von den $P_{2,i}$ lassen sich alle ausser Δ ohne Weiteres durch das Symbol v reduciren. Das Gleiche gilt von denjenigen $P_{1,i}$:

$$P_{1,i} = (abc)(bcu)^{r_1}(cau)^{r_2}(abu)^{r_3} a_x^{3-r_2-r_3} b_x^{3-r_3-r_1} c_x^{3-r_1-r_2},$$

bei denen eine der Zahlen r_1, r_2, r_3 grösser als 1 ist.

Es bleiben also nur folgende $P_{1,i}$ zu betrachten:

$$P_{1,1} = (abc)(abu) a_x^2 b_x^2 c_x^3; \quad P_{1,2} = (abc)(abu)(acu) a_x b_x^2 c_x^3;$$
$$P_{1,3} = (abc)(abu)(acu)(bcu) a_x b_x c_x.$$

Für sie aber findet man:

$$16\,P_{1,1} = u_x \cdot \Delta;\quad P_{1,2} = 0;$$

$$P_{1,3} = (abc)\,(abu)\,acu)\,b_x c_x \left\{2b_x\,(acu) + u_x(abc)\right\},$$

$$= \frac{1}{2}\,(abc)(acu)\,b_x \left\{2b_x(acu) + u_x(abc)\right\}\left\{b_x(acu) + u_x(abc)\right\},$$

$$= -\frac{1}{4}\,b_v u_v b_x \left\{2b_x u_v - u_x b_v\right\}\left\{b_x u_v - u_x b_v\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\,f_\varphi + \frac{3}{32}\,i\,u_x^3 - \frac{1}{16}\,i\,u_x^3 = -\frac{1}{2}\,f_\varphi + \frac{i}{32}\cdot u_x^3.$$

Ich habe dabei, wie später immer geschehen soll, die Invariante

$$f_\varphi^4 = \frac{3}{4}\,i$$

gesetzt.

Hiernach ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 8.

Das System S_1. Dritter Theil: Formen mit 4 Symbolen.

Ich betrachte ferner Producte P, die aus vier Symbolen a, b, c, d zusammengesetzt sind und den Factor (abc) besitzen. Dieselben entstehen durch Faltung von Producten aus f, in Formen, welche nur die drei Symbole a, b, c und dabei den Factor (abc) enthalten. Da diese letzteren, dem vorhergehenden Paragraphen zufolge, auf Δ reducibel sind, so braucht man, um jedenfalls alle irreducibelen, im gegenwärtigen Paragraphen zu betrachtenden Producte zu erhalten, nur das Product

$$f \cdot \Delta = a_x^4 \cdot \Delta_x^6$$

auf alle Weisen zu falten. Dies giebt die Ueberschiebungen:

$$(f\Delta u),\quad (f\Delta u)^2,\quad (f\Delta u)^3,\quad (f\Delta u)^4.$$

Ich sage, *dass unter ihnen nur*

(III) $\qquad (f\Delta u)$

irreducibel ist und also zum Systeme S_1 gehört. Die Reducibilität der anderen Formen folgt nämlich aus nachstehenden Rechnungen.

I. *Reduction von* $(f\Delta u)^2$.

$$\frac{3}{16}(f\Delta u)^2 = (abc)^2 d_x^2 \left\{\frac{1}{5}\,b_x^2 c_x^2 (adu)^2 + \frac{4}{5}\,a_x b_x c_x^2 (adu)(bdu)\right\}$$

$$= (abc)^2 d_x^2 \left\{a_x b_x c_x^2 (adu)(bdu) + \frac{1}{10}\,c_x^2 (d_x(abu) - u_x(abd))^2\right\};$$

$$2(abc)^2 c_x^2 d_x^2 (d_x(abu) - u_x(abd))^2 = c_v^2 c_x^2 d_x^2 (d_x u_v - u_x d_v)^2 = 0;$$

$$\frac{3}{16}(f\Delta u)^2 = (abc)^2 a_x b_x c_x^2\, d_x^2 (adu)\,(bdu)$$

$$= a_x b_x c_x^2 d_x\,(abc)\,(adu)\,(bdu)\,\left\{2\,a_x(bcd) + c_x(abd)\right\} = U_1 + U_2$$

$$U_1=(abc)(adu)(bcd)a_x b_x c_x^2 d_x\left\{b_x(adu)+u_x(abd)\right\};$$
$$U_1=(abc)(bdu)^2(acd)a_x^2 b_x c_x^2 d_x=-(abc)(adu)^2(bcd)a_x b_x^2 c_x^2 d\ ;$$
$$2U_1=u_x\cdot(abc)(adu)(abd)(bcd)a_x b_x c_x^2 d_x$$
$$=-\frac{1}{3}u_x^2\cdot(abc)(abd)(acd)(bcd)a_x b_x c_x d_x$$
$$=-\frac{1}{12}u_x^2\left\{-2f_\nu a_\nu^3 a_x+\frac{i}{8}f\right\}=-\frac{1}{12}u_x^2\left\{-\frac{i}{2}f+\frac{i}{8}f\right\}=\frac{1}{32}ifu_x^2;$$
$$U_1=\frac{ifu_x^2}{64};$$
$$U_2=(abd)(abf)(adu)(bdu)a_x b_x d_x=-\frac{1}{2}f_\nu^2 u_\nu^2+\frac{i}{32}fu_x^2$$
$$=-\frac{1}{2}a_x^2 b_x^2 u_\nu^2\left\{a_\nu^2 b_x^2-\frac{1}{2}(a_\nu b_x-b_\nu a_x)^2\right\}+\frac{i}{32}fu_x^2$$
$$=-\frac{i}{32}fu_x^2-\frac{1}{32}(\Theta\varphi x)^2;$$
$$U_1+U_2=-\frac{i}{64}fu_x^2-\frac{1}{32}(\Theta\varphi x)^2;$$
$$(f\Delta u)^2=-\frac{ifu_x^2}{12}-\frac{1}{6}(\Theta\varphi x)^2.$$

II. *Reduction von* $(f\Delta u)^3$.

$$-\frac{3}{16}(f\Delta u)^3=(abc)^2\left\{\frac{2}{5}(dau)(dbu)(dcu)a_x b_x c_x+\frac{3}{5}(dau)^2(dbu)b_x c_x^2\right\}d_x$$
$$=(abc)^2 d_x\Big\{(dau)(dbu)(dcu)\,a_x b_x c_x$$
$$+\frac{3}{10}a_x^2(dau)\left\{d_x(bcu)-u_x(bcd)\right\}^2\Big\}$$
$$=2(abc)(dau)(dbu)a_x b_x c_x d_x(bcd)(acu)$$
$$+\frac{3}{20}a_\nu^2 d_x a_x(dau)\left\{d_x u_\nu-u_x d_\nu\right\}^2=0;$$
$$(f\Delta u)^3=0.$$

III. *Reduction von* $(\Delta fu)^4$.

$$\frac{3}{16}(\Delta fu)^4=(abc)^2(adu)^2\left\{\frac{1}{5}c_x^2(bdu)^2+\frac{4}{5}b_x c_x(bdu)(cdu)\right\}$$
$$=(abc)^2(adu)^2\left\{b_x c_x(bdu)(cdu)+\frac{1}{10}(d_x(bcu)-u_x(bcd))^2\right\}$$
$$=(abc)^2(adu)^2(bdu)(cdu)b_x c_x+\frac{1}{20}a_\nu^2(adu)^2(d_x u_\nu-u_x d_\nu)^2$$
$$=2(abc)(abd)(acu)(adu)(bdu)(cdu)b_x c_x$$
$$=(acu)^2 a_\nu c_\nu u_\nu^2 a_x c_x=(acu)^2 u_\nu^2\left\{a_\nu^2 c_x^2-\frac{1}{2}(a_\nu c_x-c_\nu a_x)^2\right\}$$
$$=-\frac{1}{4}u_\nu^2 u_{\nu_1}^2(\nu\nu_1 x)^2=\frac{1}{32}\mathsf{H};$$
$$(f\Delta u)^4=\frac{1}{6}\mathsf{H}.$$

Ich habe dabei, wie man sieht,

$$u_\nu^2 u_{\nu_1}^2 (\nu \nu_1 x)^2 = -\frac{1}{8} \mathsf{H} \; (\text{symb.} \, \mathsf{H}_x^4 u_\eta^2)$$

gesetzt.

Man beachte noch zweierlei Folgerungen aus den nun bewiesenen Formeln:

$$(\Delta f u)^2 = -\frac{i}{12} f \cdot u_x^2 - \frac{1}{6} (\Theta \varphi x)^2; \quad (\Delta f u)^3 = 0; \quad (\Delta f u)^4 = \frac{1}{6} \mathsf{H}.$$

Zunächst nämlich ergiebt sich, *dass* $(a \Delta u)^2$ *ein Reducent ist.* Sodann aber findet man folgende Relationen, von denen ich später Gebrauch machen werde:

$$(a b \Delta)^2 a_x^2 b_x^2 \Delta_x^4 = \frac{-i}{12} f^2; \quad \Delta_\Theta^2 = \frac{2i}{3} f;$$

$$\Theta_x^4 (a_x \Delta_\vartheta - \Delta_x a_\vartheta)^2 a_x^2 \Delta_x^4 = -\frac{1}{6} (\Theta^2 \varphi x)^4; \quad (\Theta^2 \varphi x)^4 = 3 \Delta^2 - 4 i f^3.$$

§ 9.

Das System S_1. Vierter Theil: Formen mit fünf oder mehr Symbolen.

Sämmtliche symbolische Producte, welche einen Factor (abc) *und dabei mehr als vier Symbole enthalten, sind, wie ich jetzt zeigen werde, reducibel.*

Offenbar ist dies nur für Producte mit 5 Symbolen nachzuweisen, da es für die übrigen dann von selbst folgt. Die Producte mit 5 Symbolen entstehen aber, von reducibelen Formen abgesehen, durch Faltung aus:

$$(f \Delta u) \cdot f = a_x^3 \Delta_x^5 (a \Delta u) b_x^4.$$

Es sind also nur folgende Formen zu berücksichtigen:

$$U_1 = a_x^2 b_x^3 (a b u)(a \Delta u) \Delta_x^5; \quad U_2 = a_x^3 (a \Delta u)(b \Delta u)^2 b_x^2 \Delta_x^3;$$
$$U_3 = a_x^3 (a \Delta u)(b \Delta u)^3 b_x \Delta_x^2; \quad U_4 = a_x^3 (a \Delta u)(b \Delta u)^4 \Delta_x.$$

Von diesen sind U_2, U_3, U_4 reducibel, weil sie den Reducenten $(b \Delta u)^2$ zum Factor haben. Für U_1 aber hat man die Formel:

$$\begin{aligned} 2 U_1 &= a_x^2 b_x^2 \Delta_x^5 (a b u) \{ \Delta_x (a b u) - u_x (a b \Delta) \} \\ &= \Delta \cdot a_x^2 b_x^2 (a b u)^2 - u_x \cdot a_x^2 b_x^2 \Delta_x^5 (a b \Delta)(a b u). \end{aligned}$$

Meine Behauptung ist also erwiesen.

§ 10.

Definitive Gestalt des Systems S_1.

Stellen wir zusammen, so umfasst das System S_1 bei der allgemeinen, ternären, biquadratischen Form nur folgende Bildungen:

$$S_1 : f, \; \Theta, \; K, \; j, \; \Delta, \; (\Delta f u).$$

Drittes Capitel.

Die besondere biquadratische Form $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

§ 11.

Definition und charakteristische Eigenschaften.

Wenn man für die besondere Form

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

die Covariante

$$\varphi = 2(ffu)^4 = u_v^4$$

berechnet, so findet man:

$$\varphi = u_1^3 u_2 + u_2^3 u_3 + u_3^3 u_1.$$

Des Weiteren ergiebt sich:

$$f_\varphi^2 = \frac{1}{8} u_x^2, \quad i = \frac{4}{3} f_\varphi^4 = 1.$$

Zwischen den so berechneten Formen besteht also die Relation:

$$\text{(IV)} \qquad f_\varphi^2 - \frac{i}{8} \cdot u_x^2 = 0.$$

Dass diese Relation für f charakteristisch ist, werde ich bei späterer Gelegenheit zeigen. Einstweilen nehme ich sie als *Definition* der im Folgenden zu betrachtenden Form f, indem ich das System der ternären, biquadratischen Form $f = a_x^4$ unter der einzigen vereinfachenden Bedingung aufstellen werde, dass die Relation (IV) erfüllt sei.

Aus dieser Bedingung ergiebt sich sofort:

$$2(\varphi\varphi x)^4 = 4(a_v b_x - b_v a_x)^4 = 8 a_v^4 b_x^4 - 32 a_v^3 a_x \cdot b_v b_x^3$$
$$+ 24 a_v^2 x_x^2 \cdot b_v^2 b_x^2 = if.$$

Die Form if hängt also geradeso von φ ab, wie φ von f. Hieraus folgt allgemein: Hat man ein symbolisches Product P, welches

$$a, b, c, \cdots, v, v_1, v_2, \cdots, x, u$$

enthält, und man ersetzt diese Grössen resp. durch:

$$v, v_1, v_2, \cdots, ia, ib, ic, \cdots, u, x,$$

so erhält man eine Form Q, *die ebenso von φ abhängt, wie P von f.* — Ich werde diesen Process, durch den man Q aus P erhält, als *Vertauschung* bezeichnen; durch ihn gehen reducibele Formen in reducibele Formen und Reducenten in Reducenten über.

§ 12.

Das System S_2 der besonderen Form f.

Aus dem Vertauschungssatze folgt, dass das System S_2 unserer Form f jedenfalls nicht grösser ist als dasjenige System, welches aus S_1 (§ 10.):

$$f,\ \Theta,\ K,\ j,\ \Delta,\ (f\Delta u)$$

durch Vertauschung hervorgeht. Aus f entsteht dabei φ, aus Θ die in § 8. eingeführte Form H. Die aus K hervorgehende Form will ich L nennen. Aus j, Δ, $(f\Delta u)$ ergeben sich

$$j(\varphi) = \frac{1}{3}(\varphi H x)^4;\quad \Delta(\varphi) = -\frac{2}{3} H\varphi^2;\quad (\Delta(\varphi),\ \varphi,\ x).$$

Ich will nun zeigen, *dass diese letzten drei Formen die Invariante i zum Factor haben*, so dass also das System S_2 von f nur folgende drei Formen umfasst:

$$S_2:\quad \varphi,\ H,\ L.$$

Hierzu dienen nachstehende Rechnungen.

Zunächst ist:

$$\frac{3}{16}\Delta_\varphi^4 = (abc)^2\left\{\frac{1}{5}a_\nu^2 b_\nu^2 c_x^2 + \frac{4}{5}a_\nu^2 b_\nu c_\nu b_x c_x\right\} = 0;$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{16}\Delta_\varphi^3 = (abc)^2 u_\nu^2\left\{\frac{2}{5}a_\nu b_\nu c_\nu a_x b_x c_x + \frac{3}{5}a_\nu^2 b_\nu b_x c_x^2\right\}&\\ = -\frac{1}{5}(abc)^2 u_\nu a_x a_\nu (b_x c_\nu - c_x b_\nu)^2&\\ = -\frac{1}{10}a_{\nu_1}^2 u_\nu a_x a_\nu (\nu\nu_1 x)^2 = 0;&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{16}\Delta_\varphi^2 &= (abc)^2 u_\nu^2\left\{\frac{1}{5}a_\nu^2 b_x^2 c_x^2 + \frac{4}{5}a_\nu b_\nu a_x b_x c_x^2\right\}\\ &= (abc)^2 a_x^2 u_\nu^2\left\{b_x^2 c_\nu^2 - \frac{2}{5}(b_x c_\nu - c_x b_\nu)^2\right\}\\ &= \frac{i}{8}(abu)^2 a_x^2 b_x^2 - \frac{1}{5}a_{\nu_1}^2 a_x^2 u_\nu^2(\nu\nu_1 x)^2 = -\frac{i}{64}\Theta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{16}\Delta_\varphi &= (abc)^2 a_\nu a_x b_x^2 c_x^2 u_\nu^3 = (abc)\,a_\nu a_x b_x^2 c_x^2 u_\nu^2\left\{a_\nu(bcu) - 2b_\nu(acu)\right\}\\ &= (abc)\,c_x^2 u_\nu^2 (bcu)\left\{a_\nu^2 a_x b_x^2 + 2a_\nu b_\nu a_x^2 b_x\right\}\\ &= (abc)c_x^2 u_\nu^2\left\{2a_\nu^2 a_x b_x^2 + a_x^3 b_\nu^2 - a_x(a_\nu b_x - b_\nu a_x)^2\right\}(bcu)\\ &= \frac{i}{4}(bcu)^2 u_x b_x^2 c_x^2 - \frac{1}{2}(abc)c_x^2 u_\nu^2 (a_\nu b_x - b_\nu a_x)^2 (u_x(abc)\\ &\qquad - c_x(abu))\\ &= -\frac{i}{32}\Theta u_x - \frac{1}{4}c_{\nu_1} c_x^2 u_\nu^2 (\nu\nu_1 x)^2\left\{u_x c_{\nu_1} - c_x u_{\nu_1}\right\}\\ &= -\frac{i}{32}\Theta u_x - \frac{1}{32}f_H.\end{aligned}$$

Es folgt also, dass Δ_ν ein Reducent ist.

Ferner ist:

$$\Delta_x^2(a\Delta u)^4 = \frac{1}{6}H,$$

also

$$(a\Delta u)^4\Delta_\nu^2 u_\nu^2 = \frac{1}{6}H_\varphi^2;$$

$$\Delta_x^2(a_\nu\Delta_x - \Delta_\nu a_x)^4 = \frac{1}{6}(\varphi H x)^4;$$

$$H_\varphi^2 = -\frac{i}{2}(a\Theta u)^4 = -\frac{3}{2}ij;$$

$$(\varphi H x)^4 = 6a_\nu^4\Delta_x^6 - 24a_\nu^3 a_x \Delta_\nu \Delta_x^5 + 36 a_\nu^2 a_x^2 \Delta_\nu^2 \Delta_x^4$$
$$- 24 a_\nu a_x^3 \Delta_\nu^3 \Delta_x^3 + 6 a_x^4 \Delta_\nu^4 \Delta_x^2$$
$$= 4\frac{1}{2}i\Delta - 6i\Delta + 4\frac{1}{2}i\Delta = 3i\Delta;$$

somit:

$$\Delta(\varphi) = ij; \quad j(\varphi) = i\Delta; \quad (\Delta(\varphi), \varphi, x) = i(j, \varphi, x),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Man sieht, dass

$$j, \ \Delta, \ (f\Delta u)$$

durch Vertauschung in

$$\Delta, \ j, \ (j\varphi x)$$

übergehen. Man schliesst hieraus, dass den Formeln:

$$(f\Delta u)^2 = -\frac{if}{12}\cdot u_x^2 - \frac{1}{6}(\Theta\varphi x)^2, \qquad \Delta_\varphi = -\frac{1}{6}u_x\Theta - \frac{1}{6}f_H,$$

$$(f\Delta u)^3 = 0, \qquad \Delta_\varphi^2 = -\frac{i}{12}\Theta,$$

$$(f\Delta u)^4 = \frac{1}{6}H, \qquad \Delta_\varphi^3 = 0, \quad \Delta_\varphi^4 = 0$$

durch Vertauschung folgende entsprechen:

$$(j\varphi x)^2 = -\frac{i\varphi}{12}\cdot u_x^2 - \frac{1}{6}(fHu)^2, \qquad f_j = -\frac{1}{6}u_x H - \frac{1}{6}\Theta_\varphi,$$

$$(j\varphi x)^3 = 0, \qquad f_j^2 = -\frac{1}{12}H,$$

$$(j\varphi x)^4 = \frac{i}{6}\Theta, \qquad f_j^3 = 0, \quad f_j^4 = 0,$$

dass also $(j\nu x)^2$ und a_j Reducenten sind.

§ 13.

Das System S_3. Einleitung.

Es handelt sich nunmehr, um auch das System S_3 und damit das volle Formensystem von f zu haben, nur noch darum, das System S_1 und das System S_2 zu combiniren. Man hat also, theoretisch zu reden, alle Formen:

$$f^{\alpha_1}\Theta^{\alpha_2}K^{\alpha_3}j^{\alpha_4}\Delta^{\alpha_5}(f\Delta u)^{\alpha_6} = A, \qquad \varphi^{\beta_1}H^{\beta_2}L^{\beta_3} = B$$

in symbolische Producte zu entwickeln und dann die Producte $A\cdot B$ in der Art zu falten, dass bei jeder Faltung ein Factor von A und einer von B verwendet wird.

Diese Faltungen verändern

$$a_x u_\nu, \quad (abu)\,u_\nu, \quad a_x(\nu\nu_1 x), \quad (abu)(\nu\nu_1 x),$$

resp. in:

$$a_\nu, \quad a_\nu b_x - b_\nu a_x, \quad a_\nu u_{\nu_1} - u_\nu a_{\nu_1}, \quad a_\nu b_{\nu_1} - b_\nu a_{\nu_1}.$$

Ich nenne die Zahlen, welche angeben, wie viele solche Faltungen man vornehmen muss, um eine bestimmte Form P zu erzielen, beziehungsweise

$$r_1, \; r_2, \; r_3, \; r_4$$

und bezeichne diese r, zusammen mit den Exponenten α, β in den A, B als die *Charaktere* von P.

Da man bei den Faltungen die verschiedenen Factoren von A und B verwenden darf, so giebt es im Allgemeinen viele Formen P, welche dieselben Charaktere haben.

§ 14.

Anordnung nach Charakterensystemen.

Die somit eingeführten Charaktere dienen mir dazu, die Formen P einer bestimmten Anordnung und damit das System S_3, welches wir suchen, einer genauen Definition zu unterwerfen. Ich will nämlich diejenigen P voranstellen, bei denen die Summe $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ einen kleineren Werth hat, ferner unter solchen P, bei welchen $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ denselben Werth hat, diejenigen als einfacher betrachten, bei denen r_4 kleiner ist. *Das System S_3 umfasse sodann alle diejenigen P, welche sich nicht durch einfachere (vorangehende) ausdrücken lassen.*

Die hiermit getroffene Verabredung ist zweckmässig, insofern man für jedes Charakterensystem jedenfalls nur ein P zu berücksichtigen braucht. Denn, haben P_1 und P_2 dieselben Charaktere, so ist $P_1 - P_2$ das Aggregat einfacherer P.

Insbesondere hat man hiernach die Regel: dass ein Charakterensystem, welches auf nur *ein* reducibeles P führt, weggelassen werden kann. — Dies tritt zumal ein, wenn ein *zerfallendes* P vorhanden ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn man die Zahlen r_1, r_2, r_3, r_4 so klein wählt, dass schon ein Theil der Factoren von A, B für sie ausreicht. Wir dürfen daher im Folgenden voraussetzen, dass zu den in Betracht kommenden Faltungen jedenfalls alle Formen gebraucht werden müssen, die Factoren von A, B sind.

§ 15.

Inhalt der folgenden Paragraphen.

Es handelt sich nunmehr darum, auf Grund der getroffenen Vereinbarungen alle überflüssigen P auszuscheiden. Ich werde dies in den folgenden Paragraphen in der Weise ausführen, dass ich zunächst eine Reihe von Beschränkungen aufstelle, denen man die Charaktere α, β, r unterwerfen kann, und unter den dann noch möglichen P auf Grund

specieller Rechnung jedesmal die reducibelen entferne. Im Schlussparagraphen (§ 20.) habe ich das so resultirende System S_3 mit den früheren S_1, S_2 zu einer Tabelle vereinigt.

§ 16.

Die Charaktere α_4, α_5 und α_6.

Zunächst behaupte ich, *dass man alle Charakterensysteme weglassen darf, bei denen eine der Zahlen α_4, α_5, α_6 von Null verschieden ist.* Zunächst nämlich, wenn $\alpha_5 > 0$ oder $\alpha_6 > 0$, so hat P den Reducenten Δ_r zum Factor.*) Hieraus folgt, dass S_3 überhaupt keine Form enthält, bei deren Bildung Δ betheiligt ist. Also tritt, nach dem Vertauschungsprincip, auch keine Form auf, bei der j betheiligt wäre. Und somit kann auch α_4 immer $= 0$ genommen werden.

§ 17.

Der Charakter r_1.

Ich sage ferner, *dass für $r_1 > 0$ nur $r_1 = 1$ und $r_2 = r_3 = r_4 = 0$ zu beachten ist.*

Man hat nämlich folgende Formeln:

$$a_\nu^2 a_x^2 u_\nu^2 = \frac{i}{8} u_x^2,$$

$$\Theta_\nu^2 \Theta_x^2 u_\vartheta^2 u_\nu^2 = -\frac{1}{6} H,$$

$$\Theta_x^3 \Theta_\nu (\vartheta \nu x) u_\vartheta u_\nu^2 = 0,$$

$$\Theta_x^3 \Theta_\nu (\vartheta \nu x)^2 u_\nu = -i u_x f,$$

$$\Theta_x^2 \Theta_\nu^2 (\vartheta \nu x) u_\vartheta u_\nu = 0,$$

$$\Theta_x^2 \Theta_\nu^2 (\vartheta \nu x)^2 = -\frac{7}{3} i f,$$

aus denen hervorgeht, dass die Ausdrücke:

$$a_\nu^2, \quad \Theta_\nu^2, \quad \Theta_\nu(\vartheta \nu x)$$

und also auch:

$$a_\eta^2, \quad a_\eta(a H u)$$

Reducenten sind. Für $r_1 > 1$, oder für $r_1 = 1$ und $r_2 > 0$, oder $r_3 > 0$, oder $r_4 > 0$ entstehen aber P, welche solche Factoren haben.

Unter den Formen mit $r_1 > 0$ sind hiernach nur folgende in Betracht zu ziehen:

---

*) Eine Ausnahme bilden nur die Charakterensysteme, bei denen $r_1 = 0$ ist, dieselben führen auf zerfallende Formen.

$$f_\varphi;\ f_H;\ f_L;\ \Theta_\varphi;\ \Theta_H;\ \Theta_L;\ K_\varphi;\ K_H;\ K_L.$$

Aber auch noch K_L kann weggelassen werden, da es nach § 3. reducibel ist.

§ 18.

Der Charakter r_4.

Aehnlich schliesst man, *dass alle P reducibel sind, bei denen $r_4 > 0$ ist.* In der That, man hat:

$$\Theta_H = -8u_\vartheta^2(\nu\nu_1 x)^2\Theta_\nu\Theta_x^3 u_\nu u_{\nu_1}^2 = -8u_\vartheta(\nu\nu_1 x)\Theta_\nu\Theta_x^3 u_\nu u_{\nu_1}^2\left\{u_\nu(\vartheta\nu_1 x) - u_{\nu_1}(\vartheta\nu x) + u_x(\vartheta\nu\nu_1)\right\},$$

$$\mathsf{H}_\Theta = -8u_\vartheta(\nu\nu_1 x)(\vartheta\nu\nu_1)\Theta_x^4 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2 = 16u_\vartheta(\nu\nu_1 x)u_\nu^2 u_{\nu_1}^2\Theta_x^3(\vartheta\nu_1 x)\Theta_\nu,$$

$$\Theta_\Theta^2 = -8(\vartheta\nu\nu_1)^2\Theta_x^4 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2 = 16(\vartheta\nu\nu_1)(\vartheta\nu_1 x)\Theta_\nu\Theta_x^3 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2,$$

$$(\Theta H u)\Theta_x^3 u_\vartheta H_\vartheta u_\eta^4 = 16\Theta_\nu\Theta_x^3 u_\vartheta(\vartheta\nu\nu_1)u_\nu^2 u_{\nu_1}^3,$$

$$(\vartheta\eta x)\Theta_x^4 u_\eta^3 H_x H_\vartheta = 16a_x^3 b_x^2 u_\eta^3 b_\eta H_x(abH).$$

Aus den in diesen Gleichungen links stehenden Formen entstehen durch Faltung lauter solche P, bei denen entweder $r_1 > 0$ und $r_4 > 0$ oder $r_2 > 0$ und $r_3 > 0$, also nur reducibele Formen. Somit ist H_ϑ ein Reducent. Aber alle Charakterensysteme, bei denen $r_4 > 0$, führen auf Formen P, die diesen Factor haben.

§ 19.

Die Charaktere r_2 und r_3.

Die Untersuchung der Formen P, hei denen $r_2 > 0$ ist, gestaltet sich etwas umständlicher. Die betr. Formen entstehen durch Faltung aus den Producten:

$$Q = \Theta^{\alpha_2}K^{\alpha_3}\varphi^{\beta_1}H^{\beta_2}L^{\beta_3},$$

indem man Factorenpaare $(abu)u_\nu$ in $a_\nu b_x - b_\nu a_x$ faltet.

Man beachte nun Folgendes:

1) Ist einer der Charaktere r_1, r_3, $r_4 > 0$, so entstehen nach § 17. u. 18. reducibele Formen.

2) Die Quadrate K^2 und L^2 sind nach § 3. ganze Functionen anderer Formen.

3) Ebenso sind die Fälle wegzulassen, in denen:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > 1,$$

oder

$$\alpha_2 > 3,$$

oder gleichzeitig

$$\alpha_2 + \alpha_3 > 2,\quad \beta_1 + \beta_2 > 1$$

ist. Denn dann entstehen P, welche die Factoren haben:

$$\varphi,\ H,\ L,\ \Theta,\ K,\ (\varphi\Theta x)^2,\ (H\Theta x)^2,\ (\Theta^2\varphi x)^4,\ (\Theta^2 Hx)^4,\ (L\Theta^3 x)^6.$$

Somit dürfen wir $r_1 = 0$, $r_3 = 0$, $r_4 = 0$ nehmen und uns auf folgende Producte Q beschränken:

$$\Theta\varphi,\ \Theta^2\varphi,\ \Theta H,\ \Theta^2 H,\ \Theta L,\ \Theta^2 L,\ \Theta^3 L,\ K\varphi,\ KH,\ KL,\ \Theta K\varphi,\ \Theta KH,\ \Theta KL.$$

Aus ihnen entstehen durch Faltung die Formen:

$$(\Theta\varphi x),\ (\Theta\varphi x)^2,\ (\Theta^2\varphi x)^3,\ (\Theta^2\varphi x)^4,\ (\Theta H x),\ (\Theta H x)^2,\ (\Theta^2 H x)^3,\ (\Theta^2 H x)^4,$$
$$(\Theta L x),\ (\Theta L x)^2,\ (\Theta^2 L x)^3,\ (\Theta^2 L x)^4,\ (\Theta^3 L x)^5,\ (\Theta^3 L x)^6,$$
$$(K\varphi x),\ (K\varphi x)^2,\ (K\varphi x)^3,\ (KHx),\ (KHx)^2,\ (KHx)^3,\ (KLx),\ (KLx)^2,\ (KLx)^3,$$
$$(\Theta K, \varphi, x)^4,\ (\Theta K, H, x)^4,\ (\Theta K, L, x)^4,\ (\Theta K, L, x)^5.$$

Aber viele unter diesen Formen sind noch reducibel. Nach § 3. lassen sich

$$(\Theta L x),\ (\Theta^2 L x)^3,\ (\Theta^3 L x)^5,\ (K\varphi x),\ (KHx),\ (KLx),\ (\Theta K, L, x)^4,\ (KLx)^2$$

durch andere Formen ausdrücken. Ferner ist nach § 8.:

$$(\Theta^2\varphi x)^4 = 3\Delta^2 - 4if^3$$

also auch $(\Theta^2\varphi x)^4$ und $(K\Theta, \varphi, x)^4$ reducibel.

Von den P, bei denen $r_2 > 0$ ist, sind also nur folgende in das System S_3 aufzunehmen:

$$(\Theta\varphi x),\ (\Theta\varphi x)^2,\ (\Theta^2\varphi x)^3,\ (\Theta H x),\ \Theta(H x)^2,\ (\Theta^2 H x)^3,\ (\Theta^2 H x)^4,\ (\Theta L x)^2,\ (\Theta^2 L x)^4,\ (\Theta^3 L x)^6,$$
$$(K\varphi x)^2,\ (K\varphi x)^3,\ (KHx)^2,\ (KHx)^3,\ (KLx)^3,\ (\Theta K, H, x)^4,\ (\Theta K, L, x)^5.$$

Aus ihnen erhält man durch Vertauschung die neuen Formen:

$$(fHu),\ (fHu)^2,\ (fH^2u)^3,\ (\Theta Hu),\ (\Theta Hu)^2,\ (\Theta H^2u)^3,\ (\Theta H^2u)^4,\ (HKu)^2,\ (H^2Ku)^4,\ (H^3Ku)^6;$$
$$(fLu)^2,\ (fLu)^3,\ (\Theta Lu)^2,\ (\Theta Lu)^3,\ (KLu)^3,\ (\Theta, HL, u)^4,\ (K, HL, u)^5.$$

Dies sind die Formen von S_3 bei denen $r_3 > 0$ ist.

§ 20.

Das volle System S von f.

Das System S_3 von f wurde in den letzten Paragraphen vollständig aufgestellt. Es umfasst die Formen der §§ 17. und 19. Das volle System S von f besteht aus S_3 und den in § 10. bez. § 12. aufgestellten S_1 und S_2. Wir erhalten somit für S eine Tabelle, die hier beigegeben ist und den Abschluss meiner diesmaligen Untersuchungen bildet.

Erlangen im August 1880.

Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung.

Von

Luigi Bianchi in Parma.

In einer der Münchener Akademie vorgelegten Note,*) die p. 131—138 des vorliegenden Annalenbandes abgedruckt ist, hat Hr. Prof. Klein den allgemeinen Begriff einer Normalform n^{ter} Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung begründet und insbesondere der Resultate gedacht, welche ich für die *fünfte* Stufe gewonnen habe. Im Nachfolgenden denke ich diese Resultate zu beweisen und nach verschiedenen Richtungen zu vervollständigen. Ich bin dabei zunächst ausführlich auch in eine Behandlung der dritten Stufe eingegangen. Die dabei entstehenden Ergebnisse sind freilich bekannt; aber sie erscheinen unter neuer Form und sind in derselben für die spätere Untersuchung der fünften Stufe nützlich. In ähnlicher Weise sollen beide, die dritte und die fünfte Stufe, wie ich hoffe, Anhaltspunkte zur Behandlung auch der höheren Stufen bieten.

Herrn Prof. Klein habe ich für vielfache Anregung und Unterstützung bei meiner Arbeit an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

Abschnitt I.

Die dritte Stufe.

§ 1.

Definition der Curve dritter Ordnung.

Den allgemeinen Erörterungen der citirten Note gemäss setzen wir für $n = 3$, unter x_0, x_1, x_2 homogene Coordinaten verstanden**):

*) Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung, Sitzung vom 3. Juli 1880.

**) Ich wünsche gleich hier auf eine Abweichung der im Texte gebrauchten Bezeichnung von der Weierstrass'schen aufmerksam zu machen. Ich bezeichne mit ω_1, ω_2 die Perioden, für welche Weierstrass 2ω, $2\omega'$ schreibt. Ebenso

$$\varrho x_0 = \sigma(u-a_1)\cdot\sigma(u-a_2)\cdot\sigma(u-a_3),$$
$$\varrho x_1 = \sigma(u-b_1)\cdot\sigma(u-b_2)\cdot\sigma(u-b_3),$$
$$\varrho x_2 = \sigma(u-c_1)\cdot\sigma(u-c_2)\cdot\sigma(u-c_3).$$

Dabei muss

$$\Sigma a = \Sigma b = \Sigma c$$

genommen werden, damit die Verhältnisse der x doppeltperiodisch sind. Wir werden im Folgenden in bekannter Weise von dieser Bedingung abgehen, indem wir nur

$$\Sigma a \equiv \Sigma b \equiv \Sigma c \pmod{\omega_1,\ \omega_2}$$

setzen, dafür aber die x mit passenden Exponentialfactoren behaften. Ueberdies wollen wir, was gestattet ist, der Einfachheit wegen

(1) $$\Sigma a \equiv 0 \pmod{\omega_1,\ \omega_2}$$

nehmen.

Dass zwischen den hier eingeführten x eine homogene Relation dritten Grades besteht, dass also unsere Formeln, unter u einen veränderlichen Parameter verstanden, eine *ebene Curve dritter Ordnung* darstellen, ergiebt sich auf Grund des bekannten Hermite'schen Satzes. Denn es lassen sich aus den drei x zehn Glieder dritter Ordnung herstellen und jedes dieser Glieder wird nur an neun Stellen des Periodenparallelogramms Null.

§ 2.

Die 9 Wendepunkte und die 4 Wendedreiecke.

Der Bedingung (1) entsprechend erhält man aus dem Hermite'schen Satze (oder dem Abel'schen Theoreme), damit drei Punkte u_1, u_2, u_3 der Curve auf einer Geraden liegen:

(2) $$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{\omega_1,\ \omega_2}.$$

Es giebt also den Argumenten

$$\frac{p\omega_1 + q\omega_2}{3} \qquad (p, q = 0,\ 1,\ 2)$$

---

setze ich η_1, η_2 statt der Weierstrass'schen 2η, $2\eta'$. Die Grundformel für die σ-Function lautet also in der Schreibweise des Textes:

(I) $$\sigma(u+\omega_1) = -e^{\eta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\cdot\sigma(u); \qquad \sigma(u+\omega_2) = -e^{\eta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\cdot\sigma(u)$$

oder allgemein:

(I') $$\sigma(u+m\omega_1+n\omega_2) = (-1)^{mn+m+n}\cdot e^{(m\eta_1+n\eta_2)\left(u+\frac{m\omega_1+n\omega_2}{2}\right)}\cdot\sigma(u),$$

wo m, n zwei beliebige ganze Zahlen sind. Zwischen $\eta_1, \eta_2;\ \omega_1, \omega_2$ besteht dann die Relation:

(II) $$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi.$$

Es genügt, diese Fundamentalformeln zu kennen, um alle im Texte vorkommenden Rechnungen zu controliren.

entsprechend neun ausgezeichnete Punkte, die *Wendepunkte*, in denen eine Gerade unsere Curve dreipunktig schneidet.

Diese Punkte vertheilen sich, wie bekannt, viermal auf die drei Seiten eines sog. *Wendedreiecks*. Eins dieser Wendedreiecke enthält auf seinen drei Seiten bez. folgende Punkte:

$$0, \quad \frac{\omega_2}{3}, \quad \frac{2\omega_2}{3};$$

dann:

$$\frac{\omega_1}{3}, \quad \frac{\omega_1+\omega_2}{3}, \quad \frac{\omega_1+2\omega_2}{3},$$

endlich:

$$\frac{2\omega_1}{3}, \quad \frac{2\omega_1+\omega_2}{3}, \quad \frac{2\omega_1+2\omega_2}{3}.$$

Wir wollen dasselbe Δ_∞ nennen und symbolisch schreiben:

$$\text{(3)} \qquad \Delta_\infty = \begin{vmatrix} 00 & 01 & 02 \\ 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \end{vmatrix}.$$

Die anderen Wendedreiecke erhält man am einfachsten, *wenn man die Perioden ω_1, ω_2 irgend einer linearen Substitution unterwirft:*

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

Dabei werden nämlich die 9 Wendepunkte, wegen der Periodicität der Curve, auf gewisse Weise permutirt und es gilt nur, sich von der Art dieser Permutation Rechenschaft zu geben.

Zuvörderst sieht man, *dass zwei Substitutionen, welche modulo* 3 *übereinstimmen, dieselbe Permutation der Wendepunkte erzielen.* Denn es ist:

$$\frac{p(\alpha\omega_1+\beta\omega_2)+q(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)}{3} \equiv \frac{p(\alpha'\omega_1+\beta'\omega_2)+q(\gamma'\omega_1+\delta'\omega_2)}{3} \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2),$$

sobald

$$\alpha \equiv \alpha', \quad \beta \equiv \beta', \quad \gamma \equiv \gamma', \quad \delta \equiv \delta' \quad (\text{mod. } 3).$$

Es giebt also, den verschiedenen Lösungen der Congruenz

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) \equiv 1 \quad (\text{mod. } 3)$$

entsprechend, *nur* 24 *verschiedene Permutationen* der Wendepunkte.

Man weiss ferner, dass alle Substitionen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &\equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &\equiv \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } 3)$$

sich aus den beiden:

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} \omega_1' \equiv \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_2' \equiv \phantom{\omega_1 +{}} \omega_2, \end{cases} \qquad\qquad \text{(5)} \quad \begin{cases} \omega_1' \equiv -\omega_2, \\ \omega_2' \equiv \omega_1 \end{cases}$$

zusammensetzen. Die erstere hat die Periode *Drei*, die andere die Periode *Vier*. Sie erzeugt wiederholt die ausgezeichnete Substitution:

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_1' \equiv -\omega_1,\\ \omega_2' \equiv -\omega_2.\end{array}\right. \tag{6}$$

Nun bleibt Δ_∞, wie man sofort sieht, bei 6 Substitutionen ungeändert, nämlich bei (4), bei (6) und bei den Wiederholungen und Combinationen dieser Substitutionen. *Es giebt also nur* $\frac{24}{6} = 4$ *Wendedreiecke.* Zunächst entsteht aus Δ_∞ durch (5) folgendes Dreieck, welches wir Δ_0 nennen wollen:

$$\Delta_0 = \left|\begin{array}{ccc} 00 & 10 & 20\\ 01 & 11 & 21\\ 02 & 12 & 22\end{array}\right|, \tag{7}$$

dann ferner aus Δ_0 durch zweimalige Anwendung von (4):

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{ccc} 00 & 11 & 22\\ 01 & 12 & 20\\ 02 & 10 & 21\end{array}\right|, \quad \Delta_2 = \left|\begin{array}{ccc} 00 & 12 & 21\\ 01 & 10 & 22\\ 02 & 11 & 20\end{array}\right|. \tag{8}$$

Sämmtliche Dreiecke bleiben bei der Substitution (6) ungeändert. Im Uebrigen aber sind die Indices zu ihrer Bezeichnung so gewählt, dass der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ entsprechend Δ_ν in $\Delta_{\nu'}$ übergeht, wo

$$\nu' \equiv \frac{\alpha\nu + \beta}{\gamma\nu + \delta} \pmod{3}. \tag{9}$$

Die Dreiecke Δ permutiren sich also, wie die Wurzeln der Modulargleichung für Transformation dritter Ordnung.

§ 3.

Beziehung der Curve dritter Ordnung auf ein Wendedreieck.

Wir wollen nun unsere Curve dritter Ordnung auf eine gewisse Normalform bringen, indem wir vor allen Dingen ein Wendedreieck, etwa Δ_∞, als Coordinatendreieck zu Grunde legen. Ich schreibe dementsprechend:

$$\left\{\begin{array}{l}\varrho x_0 = \sigma(u) \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u - \frac{2\omega_2}{3}\right),\\ \varrho x_1 = \alpha_1 e^{\eta_1 u} \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_1}{3}\right) \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_1 + \omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u - \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{3}\right),\\ \varrho x_2 = \alpha_2 e^{2\eta_1 u} \cdot \sigma\left(u - \frac{2\omega_1}{3}\right) \cdot \sigma\left(u - \frac{2\omega_1 + \omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u - \frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}\right).\end{array}\right. \tag{10}$$

Hier sind die Exponentialfactoren $e^{\eta_1 u}$, $e^{2\eta_1 u}$ hinzugefügt, um die

Quotienten der x doppeltperiodisch zu machen (wie oben bemerkt wurde). Ferner verstehe ich unter α_1, α_2 zwei Constante, die im Folgenden passend gewählt werden sollen. Die Curve dritter Ordnung geht nämlich, wie man weiss, durch 18 lineare Transformationen in sich über. *Ich bestimme α_1, α_2 so, dass sich diese linearen Transformationen in den x möglichst einfach ausdrücken.* Dies auszuführen ist der Zweck des folgenden Paragraphen.

§ 4.

Die 18 linearen Transformationen der Curve dritter Ordnung in sich.

Bei der von uns gewählten Darstellung werden die 18 linearen Transformationen der Curve dritter Ordnung in sich bekanntlich erhalten, wenn man statt u

$$\pm u + \frac{p\omega_1 + q\omega_2}{3} \qquad (p, q = 0, 1, 2)$$

schreibt. Wir brauchen unter ihnen nur folgende drei, aus welchen alle anderen zusammengesetzt werden können:

$$u' = -u, \quad u' = u - \frac{\omega_1}{3}, \quad u' = u - \frac{\omega_2}{3}, \tag{11}$$

zu untersuchen. Wir verwandeln, ihnen entsprechend, die Grössen x (10) in x' und bringen jedesmal die Argumente der σ zu den 9 alten Argumenten vermöge der Fundamentalformen (I), (I′) zurück. Dabei wollen wir, *wie in der Folge immer, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist*, von Proportionalitätsfactoren, die bei allen x' gemeinsam auftreten, absehen, insofern ja zunächst nur die *Verhältnisse* der x' in Betracht kommen. So finden wir, den Formeln (11) entsprechend

$$\tag{12} \left\{ \begin{aligned} & x_0(-u) = -x_0(u), && x_1(-u) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot e^{-\omega_1\left(\frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{3}\right)} \cdot x_2(u), \\ & && x_2(-u) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot e^{\omega_1\left(\frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{3}\right)} \cdot x_1(u); \\ & x_0\left(u - \frac{\omega_1}{3}\right) = x_1(u), && x_1\left(u - \frac{\omega_1}{3}\right) = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} \cdot e^{\frac{-\eta_1\omega_1}{3}} \cdot x_2(u), \\ & && x_2\left(u - \frac{\omega_1}{3}\right) = -\alpha_1\alpha_2 e^{\eta_1\left(\frac{5\omega_1}{6} + \omega_2\right)} \cdot x_0(u); \\ & x_0\left(u - \frac{\omega_2}{3}\right) = x_0(u), && x_1\left(u - \frac{\omega_2}{3}\right) = \alpha^2 x_1(u), \\ & && x_2\left(u - \frac{\omega_2}{3}\right) = \alpha x_2(u). \end{aligned} \right.$$

Hier ist

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

zu setzen.

Offenbar werden diese Formeln am einfachsten, wenn man

$$\alpha_1 = -\alpha e^{-\eta_1\left(\frac{\omega_1}{6}+\frac{\omega_2}{3}\right)}, \quad \alpha_2 = \alpha^2 \cdot e^{\frac{-2\eta_1}{3}(\omega_1+\omega_2)}$$

setzt. Sie lauten dann:

$$(13)\begin{cases} x_0(-u) = x_0(u), & x_1(-u) = x_2(u), & x_2(-u) = x_1(u); \\ x_0\left(u-\frac{\omega_1}{3}\right) = x_1(u), & x_1\left(u-\frac{\omega_1}{3}\right) = x_2(u), & x_2\left(u-\frac{\omega_1}{3}\right) = x_0(u); \\ x_0\left(u-\frac{\omega_2}{3}\right) = x_0(u), & x_1\left(u-\frac{\omega_2}{3}\right) = \alpha^2 x_1(u), & x_2\left(u-\frac{\omega_2}{3}\right) = \alpha x_2(u). \end{cases}$$

Zugleich nehmen die Definitionsgleichungen (10) folgende Gestalt an, an der wir in der Folge festhalten wollen:

$$(14)\begin{cases} \varrho x_0 = \sigma(u) \cdot \sigma\left(u-\frac{\omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u-\frac{2\omega_2}{3}\right), \\ \varrho x_1 = \varpi\,\Theta\, e^{\eta_1 u}\,\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{3}\right) \cdot \sigma\left(u-\frac{\omega_1+\omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u-\frac{\omega_1+2\omega_2}{3}\right), \\ \varrho x_2 = \varpi^2\,\Theta^4 e^{2\eta_1 u}\,\sigma\left(u-\frac{2\omega_1}{3}\right) \cdot \sigma\left(u-\frac{2\omega_1+\omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u-\frac{2\omega_1+2\omega_2}{3}\right), \end{cases}$$

wo der Kürze wegen:

$$-e^{\frac{-\eta_2\omega_1}{3}} = \varpi, \quad e^{\frac{-\eta_1\omega_1}{6}} = \Theta$$

gesetzt wurde.

Wie zweckmässig die so normirten x sind, ersieht man, wenn man allgemein:

$$\varrho x_m = \varpi^m\,\Theta^{m^2} e^{m\eta_1 u}\,\sigma\left(u-\frac{m\omega_1}{3}\right) \cdot \sigma\left(u-\frac{m\omega_1+\omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u-\frac{m\omega_1+2\omega_2}{3}\right)$$

setzt. Es ergiebt sich dann nämlich vermöge der Fundamentalformeln (I), (I'), dass $x_m = x_n$ ist, sobald $m \equiv n$ (mod. 3).

§ 5.

Die Normalgleichung der Curve.

Fragen wir jetzt, wie die Gleichung dritten Grades zwischen den normirten x (14) lautet, so ist zuerst zu bemerken, dass die linearen Transformationen (13) diese Gleichung in sich überführen müssen. Hiernach muss die Gleichung in Bezug auf die x symmetrisch sein. Ausserdem können nur Glieder mit x_0^3, x_1^3, x_2^3, $x_0 x_1 x_2$ vorhanden sein. Denn andere Glieder würden vermöge der letzten Substitution

(13) Factoren a oder a^2 erhalten, und müssten also für sich Null sein, so dass man nicht *eine* Gleichung, sondern mehrere Gleichungen für unsere Curve hätte. Wir werden also nothwendig zu der Hesse'-schen Gleichungsform der Curven dritter Ordnung geführt:

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 6a\, x_0 x_1 x_2 = 0. \tag{15}$$

Hier ist die Constante a eben durch (15) als *Modulfunction* (als Function von $\frac{\omega_1}{\omega_2}$) definirt. Unsere ganze Aufgabe ist nur noch, diese Modulfunction zu studiren, und uns zu überzeugen, dass a die *Tetraeder-irrationalität* ist.

§ 6.

Allgemeines über die Constante a.

Zu dem Zwecke werden wir untersuchen, wie a sich ändert, wenn man die Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{16}$$

anwendet. Und zu dem Ende untersuchen wir zunächst, wie sich die x bei solchen Substitutionen verhalten, nachdem wir die Permutation der Wendepunkte und Wendedreiecke im Allgemeinen bereits in § 2. betrachtet haben. Hierbei wird die Eigenschaft der Function σ, bei linearen Substitutionen der ω_1, ω_2 ungeändert zu bleiben, von fundamentaler Bedeutung. Da immer

$$\sigma(u, \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma(u,\ \omega_1,\ \omega_2),$$

so brauchen wir für unseren Zweck in den Formeln (14) nur die Veränderungen der *Argumente* zu berücksichtigen.

Also haben wir jedenfalls: *Die neuen x drücken sich durch die alten linear aus.* Hieraus folgt sofort, *dass sämmtliche Werthe, die a annimmt, lineare Functionen des alten a sind.*

Ich sage aber, *dass alle Substitutionen* (16), *die mod.* 3 *zur Identität congruent sind, a ungeändert lassen.* Denn seien in (16)

$$\begin{aligned} \alpha &= 3m + 1, & \beta &= 3n, \\ \gamma &= 3p, & \delta &= 3q + 1, \end{aligned}$$

so folgt, vermöge der zweiten Formel (13):

$$\begin{aligned} x_1'(u) &= x_0\left(u - \frac{(3m+1)\,\omega_1 + 3n\omega_2}{3}\right), \\ x_2'(u) &= x_1\left(u - \frac{(3m+1)\,\omega_1 + 3n\omega_2}{3}\right), \\ x_0'(u) &= x_2\left(u - \frac{(3m+1)\,\omega_1 + 3n\omega_2}{3}\right) \end{aligned}$$

und hieraus bis auf Proportionalitätsfactoren:

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2.$$

Die x bleiben somit ungeändert, und also auch a, was behauptet wurde.

Ferner ist deutlich, *dass a bei der Substitution*

$$\omega_1' = -\omega_1, \quad \omega_2' = -\omega_2$$

ungeändert bleibt, da es, zufolge (15), nur von den Verhältnissen der x und also der ω_1, ω_2 abhängt.

Hieraus aber schliesst man in bekannter Weise, *dass a überhaupt bei allen Substitutionen:*

$$(17) \qquad \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2},$$

die modulo 3 übereinstimmen, identische Aenderungen erfährt.

Wir wollen nun annehmen, was die folgenden Untersuchungen bestätigen werden, dass *a nur* bei solchen Substitutionen ungeändert bleibt, die modulo 3 zur Identität congruent sind. Dann nimmt a bei den Substitutionen (16) oder (17) im Ganzen 12 verschiedene Werthe an, die alle linear von einem abhängen. Das heisst aber (auf Grund bekannter Sätze): *a ist die Tetraederirrationalität oder eine lineare Function derselben.* — Ob das Eine oder das Andere eintritt, hängt natürlich nur von der Definition ab, die wir für die Tetraederirrationalität annehmen wollen. —

Es gilt jetzt, diese allgemeinen Betrachtungen im Einzelnen durchzuführen. Zuvörderst betrachten wir diejenigen Substitutionen (16), welche Δ_∞ ungeändert lassen (vergl. § 2.), hernach eine Substitution, welche Δ_∞ in Δ_0 überführt (vergl. ebenda). Dabei lernen wir nebenbei die interessanten Substitutionsformeln für die x kennen, welche dieser Ueberführung entsprechen.

§ 7.

Verhalten von a bei den 6 ω-Substitutionen, die Δ_∞ ungeändert lassen.

Die sechs hier zunächst in Betracht kommenden Substitutionen wurden bereits in § 2. besprochen. Es sind die folgenden:

$$\begin{pmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, & \beta \\ 0, & -1 \end{pmatrix},$$

wo $\beta = 0, 1, 2$ genommen werden kann.

Beginnen wir mit den Substitutionen $\begin{pmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ und bezeichnen mit x' die transformirten x. Wir finden aus (13), von Proportionalitätsfactoren abgesehen:

$$(18) \qquad x_0' = x_0, \quad x_1' = \alpha^{-\beta} \cdot x_1, \quad x_2' = x_2.$$

Somit wird

$$(19) \qquad a' = \alpha^{\beta} \cdot a$$

sein, *und a wird also mit einer dritten Einheitswurzel multiplicirt.*

Bei den Substitutionen $\begin{pmatrix} -1, & \beta \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ muss sich natürlich, weil a nur von $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt, ein analoges Resultat ergeben. In der That kommt:

$$(20) \qquad x_0' = x_0, \quad x_1' = \alpha^{\beta} x_2, \quad x_2' = x_1$$

und also:

$$(21) \qquad a' = \alpha^{-\beta} \cdot a.$$

§ 8.

Uebergang von Δ_∞ zu Δ_0.

Unter allen Substitutionen, welche Δ_∞ in andere Wendedreiecke überführen, will ich die eine $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ herausgreifen. Aus ihr ergeben sich alle anderen durch Combination mit den Substitutionen des vorigen Paragraphen.

Die $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ entsprechenden transformirten x werden, zufolge (13), folgenden Relationen genügen:

$$x_0'\left(u - \frac{\omega_2}{3}\right) = x_2'(u), \quad x_1'\left(u - \frac{\omega_2}{3}\right) = x_0'(u), \quad x_2'\left(u - \frac{\omega_2}{3}\right) = x_1'(u);$$

$$x_0'\left(u + \frac{\omega_1}{3}\right) = x_0'(u), \quad x_1'\left(u + \frac{\omega_1}{3}\right) = \alpha x_1'(u), \quad x_2'\left(u + \frac{\omega_1}{3}\right) = \alpha^2 x_2'(u).$$

Nun wird sich x_0' linear aus x_0, x_1, x_2 zusammensetzen. Da aber die Substitution $u' = u + \frac{\omega_1}{3}$ x_0' in sich überführt, dagegen, nach (13), die x cyklisch vertauscht, so können wir (wieder von einem Factor abgesehen!) setzen:

$$x_0' = x_0 + x_1 + x_2.$$

Hieraus folgt:

$$x_1' = x_0'\left(u + \frac{\omega_2}{3}\right) = x_0\left(u + \frac{\omega_2}{3}\right) + x_1\left(u + \frac{\omega_2}{3}\right) + x_2\left(u + \frac{\omega_2}{3}\right)$$

oder nach (13):

$$x_1' = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2.$$

Ebenso kommt:

$$x_2' = x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha x_2.$$

Wir haben also folgendes schöne Formelsystem gewonnen:

$$(22) \qquad \begin{cases} x_0' = x_0 + x_1 + x_2, \\ x_1' = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2, \\ x_2' = x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha x_2, \end{cases}$$

das unabhängig von seiner hier in den Vordergrund gestellten geometrischen Bedeutung als eine Relation zwischen σ-Producten beachtenswerth ist, und zwar um so mehr, als es sich bei beliebiger (n^{ter}) Stufe in ganz ähnlicher Weise wiederholt.

§ 9.

Entsprechendes Verhalten von a. a ist die Tetraederirrationalität.

Schreiben wir jetzt die Gleichung unserer Curve in der Form:

$$x_0'^3 + x_1'^3 + x_2'^3 + 6a'x_0'x_1'x_2' = 0$$

und vergleichen, nach Eintragung der Werthe (22), mit der ursprünglichen Curvengleichung, so folgt:

$$a' = \frac{1-a}{1+2a}. \tag{23}$$

Wir erhalten die Gesammtheit der linearen Substitutionen, denen a unterworfen wird, wenn wir (23) auf alle Weise mit (19) oder [was dasselbe ist] mit (21) combiniren. Dass dabei nur 12 lineare Substitutionen entstehen, und zwar gerade diejenigen 12 Substitutionen, welche die von Herrn Klein Annalen XIV, p. 154 definirte Tetraedergleichung in sich überführen, *dass also a sich mit der dort eingeführten Tetraederirrationalität deckt*, ergiebt sich sofort durch Vergleich der Formeln. In der That, die l. c. angegebene Tetraedergleichung lautet, sofern man a statt $\frac{x_1}{x_2}$ setzt:

$$\begin{aligned} J : J-1 : 1 = {} & 64\,(a^4 - a)^3 \\ & : (8a^6 + 20a^3 - 1)^2 \\ & : -(8a^3+1)^3, \end{aligned} \tag{24}$$

eine Gleichung, die sowohl bei (19) als auch bei (23) ungeändert bleibt.

§ 10.

Die Tetraederirrationalität durch σ-Functionen ausgedrückt.

Man erhält, wie ich zum Schluss zeigen will, einen eleganten Ausdruck für a in σ-Functionen, wenn man den Ausdruck $1+2a$, der ein Factor der Discriminante (des Nenners von J in (24)) ist, betrachtet. Zunächst hat man:

$$\begin{aligned} 1 + 2a &= \frac{3x_0x_1x_2 - (x_0^3 + x_1^3 + x_2^3)}{3x_0x_1x_2} \\ &= -\frac{(x_0+x_1+x_2)(x_0+\alpha x_1+\alpha^2x_2)(x_0+\alpha^2x_1+\alpha x_2)}{3x_0x_1x_2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Die hier im Zähler stehenden Ausdrücke sind nach Formel (22) den folgenden σ-Producten proportional:

$$\sigma(u) \cdot \qquad \sigma\left(u - \frac{\omega_1}{3}\right) \cdot \qquad \sigma\left(u - \frac{2\omega_1}{3}\right), \text{ bez.}$$

$$-\alpha e^{\eta_2\left(\frac{\omega_1}{3} - \frac{\omega_2}{6}\right)} e^{-\eta_2 u}\, \sigma\left(u + \frac{\omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u + \frac{\omega_2 - \omega_1}{3}\right) \cdot \sigma\left(u + \frac{\omega_2 - 2\omega_1}{3}\right),$$

und

$$\alpha^2 e^{\frac{2\eta_2}{3}(\omega_1 - \omega_2)} e^{-2\eta_2 u}\, \sigma\left(u + \frac{2\omega_2}{3}\right) \cdot \sigma\left(u + \frac{2\omega_2 - \omega_1}{3}\right) \cdot \sigma\left(u + \frac{2\omega_2 - 2\omega_1}{3}\right).$$

Es gilt, jetzt auch noch den Proportionalitätsfactor zu bestimmen. Derselbe muss jedenfalls den Factor $e^{(\eta_1 - \eta_2)u}$ enthalten, damit $\frac{x_0 + x_1 + x_2}{x_0}$ eine doppelt periodische Function ist. Ausserdem enthält er einen constanten (d. h. von u nicht abhängigen) Bestandtheil, den wir durch Betrachtung besonderer Werthe von u $\left(\text{z. B. } u = \frac{\omega_2}{3}\right)$ als

$$(\alpha - \alpha^2) \cdot e^{\frac{\eta_2\omega_2 - \eta_1\omega_1}{3}} \cdot \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{3}\right)}$$

bestimmen.

Die so erhaltenen Werthe tragen wir, zusammen mit den Ausdrücken (14), in (25) ein und führen schliesslich die Argumente der im Zähler stehenden σ-Functionen vermöge (13) auf die alten zurück. So ergiebt sich:

$$1 + 2a = \frac{(\alpha^2 - \alpha)^3}{3} \cdot e^{\frac{\eta_2\omega_2 - \eta_1\omega_1}{6}} \cdot \frac{\sigma^3\left(\frac{\omega_1}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{\omega_2}{3}\right)}$$

oder:

$$(26) \qquad 1 + 2a = i\sqrt{3} \cdot e^{\frac{\eta_2\omega_2 - \eta_1\omega_1}{6}} \cdot \frac{\sigma^3\left(\frac{\omega_1}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{\omega_2}{3}\right)}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für die beiden anderen Factoren der Discriminante:

$$(27) \qquad 1 + 2\alpha a = i\sqrt{3} \cdot e^{\frac{\eta_2\omega_2 - (\eta_1 + \eta_2)(\omega_1 + \omega_2)}{6}} \cdot \frac{\sigma^3\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{\omega_2}{3}\right)},$$

$$(28) \qquad 1 + 2\alpha^2 a = i\sqrt{3} \cdot e^{\frac{\eta_2\omega_2 - (\eta_1 + 2\eta_2)(\omega_1 + 2\omega_2)}{6}} \cdot \frac{\sigma^3\left(\frac{\omega_1 + 2\omega_2}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{\omega_2}{3}\right)}.$$

Abschnitt II.

Die fünfte Stufe.

§ 11.

Die Curve fünfter Ordnung und die sechs fundamentalen Pentaeder.

Bei der fünften Stufe muss man eine Curve fünfter Ordnung im Raume von vier Dimensionen in Betracht ziehen. Die homogenen Coordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ eines Punktes dieser Curve entnehmen wir den Formeln:

$$\begin{aligned} \varrho x_0 &= \Pi\sigma(u - a_i), \\ \varrho x_1 &= \Pi\sigma(u - b_i), \\ \varrho x_2 &= \Pi\sigma(u - c_i), \qquad (i = 1, 2, \cdots 5) \\ \varrho x_3 &= \Pi\sigma(u - d_i), \\ \varrho x_4 &= \Pi\sigma(u - e_i), \end{aligned}$$

wobei

$$\Sigma a_i = \Sigma b_i = \Sigma c_i = \Sigma d_i = \Sigma e_i.$$

So wie im ersten Paragraphen des ersten Abschnitts ist zu bemerken, dass, wenn die Behaftung der σ-Producte mit Exponentialfactoren gestattet wird, statt letzterer Bedingungen nur folgende erfüllt zu sein brauchen:

$$\Sigma a_i \equiv \Sigma b_i \equiv \Sigma c_i \equiv \Sigma d_i \equiv \Sigma e_i \pmod{\omega_1, \omega_2}.$$

Der Einfachheit wegen nehmen wir im Folgenden:

$$\Sigma a_i \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}. \tag{29}$$

Dann lautet die Bedingung dafür, dass fünf Punkte u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 der Curve auf einer Ebene liegen, einfach:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}. \tag{30}$$

Fragt man also, ob es Ebenen giebt, welche die Curve in 5 zusammenrückenden Punkten schneiden, so sieht man unmittelbar, dass 25 solche Punkte vorhanden sind. Dieselben haben die Argumente

$$\frac{p\omega_1 + q\omega_2}{5},$$

wo $p, q = 0, 1, 2, 3, 4$. Diese Punkte bezeichnen wir als die *singulären Punkte* der Curve.

Legen wir durch vier singuläre Punkte der Curve eine Ebene, so ist der fünfte Schnittpunkt, wegen (30), wieder ein singulärer Punkt. Wohl kann es sein, dass dieser fünfte Punkt mit einem der vier übrigen zusammenfällt. Eine leichte Abzählung giebt als Anzahl der Ebenen durch fünf *verschiedene* Punkte 2130. Diese 2130 Ebenen ordnen sich

in mannigfacher Weise zu Systemen von fünf Ebenen, derart, dass die fünf Ebenen eines Systems zusammen alle 25 singuläre Punkte enthalten. Ein solches System von fünf Ebenen bezeichnen wir als *Pentaeder*.

Unter diesen Pentaedern befinden sich nun insbesondere sechs, die ich als *fundamentale* Pentaeder bezeichne. Das erste derselben wähle ich ganz dem Wendedreiecke Δ_∞ der Curve dritter Ordnung entsprechend. Der Formel (3) entsprechend ist dasselbe durch die symbolische Gleichung definirt

$$(31)\qquad P_\infty = \begin{vmatrix} 00, & 01, & 02, & 03, & 04 \\ 10, & 11, & 12, & 13, & 14 \\ 20, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 30, & 31, & 32, & 33, & 34 \\ 40, & 41, & 42, & 43, & 44 \end{vmatrix}.$$

Die anderen fundamentalen Pentaeder erwachsen aus diesem ersten, indem man ω_1, ω_2 den linearen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

unterwirft.

Eine Substitution, die mod. 5 zur Identität congruent ist, lässt P_∞ ungeändert. Daher brauchen wir die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nur in Bezug auf den Modul 5 zu unterscheiden und können sie sogar so verallgemeinern, dass nur die Bedingung auftritt:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{5}.$$

Man sieht ferner, dass es unter den 120 modulo 5 verschiedenen Substitutionen $\begin{vmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{vmatrix}$ zwanzig giebt, die P_∞ ungeändert lassen, nämlich diese

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} \pm 1, & \beta \\ 0, & \pm 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \pm 2, & \beta \\ 0, & \pm 3 \end{vmatrix}, \quad (\beta = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Hiernach entstehen aus P_∞ in der That nur fünf weitere fundamentale Pentaeder. Man kann dieselben wieder so mit Indices behaften, dass sich die P_ν bei den Substitutionen $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ wie die Wurzeln der Modulargleichung (für Transformation fünfter Ordnung) permutiren, dass also P_ν der Art in P_ν' übergeht, dass die Formel besteht:

$$(33)\qquad \nu' \equiv \frac{\alpha\nu + \beta}{\gamma\nu + \delta} \pmod{5}.$$

Zu dem Zwecke hat man zu setzen:

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l}
P_0 = \left|\begin{array}{ccccc} 00, & 10, & 20, & 30, & 40 \\ 01, & 11, & 21, & 31, & 41 \\ 02, & 12, & 22, & 32, & 42 \\ 03, & 13, & 23, & 33, & 43 \\ 04, & 14, & 24, & 34, & 44 \end{array}\right|, \quad P_1 = \left|\begin{array}{ccccc} 00, & 11, & 22, & 33, & 44 \\ 01, & 12, & 23, & 34, & 40 \\ 02, & 13, & 24, & 30, & 41 \\ 03, & 14, & 20, & 31, & 42 \\ 04, & 10, & 21, & 32, & 43 \end{array}\right|, \\[2ex]
P_2 = \left|\begin{array}{ccccc} 00, & 12, & 24, & 31, & 43 \\ 01, & 13, & 20, & 32, & 44 \\ 02, & 14, & 21, & 33, & 40 \\ 03, & 10, & 22, & 34, & 41 \\ 04, & 11, & 23, & 30, & 42 \end{array}\right|, \quad P_3 = \left|\begin{array}{ccccc} 00, & 13, & 21, & 34, & 42 \\ 01, & 14, & 22, & 30, & 43 \\ 02, & 10, & 23, & 31, & 44 \\ 03, & 11, & 24, & 32, & 40 \\ 04, & 12, & 20, & 33, & 41 \end{array}\right|, \\[2ex]
\qquad\qquad P_4 = \left|\begin{array}{ccccc} 00, & 14, & 23, & 32, & 41 \\ 01, & 10, & 24, & 33, & 42 \\ 02, & 11, & 20, & 34, & 43 \\ 03, & 12, & 21, & 30, & 44 \\ 04, & 13, & 22, & 31, & 40 \end{array}\right|.
\end{array}\right.$$

§ 12.

Beziehung der Curve auf das Pentaeder P_∞. Die 50 Collineationen der Curve in sich.

Legen wir jetzt das Pentaeder P_∞ als Coordinatenpentaeder unserer Curve zu Grunde und schreiben der Kürze wegen σ_{pq} statt

$$\sigma\left(u - \frac{p\omega_1 + q\omega_2}{5}\right),$$

so können wir unter Zufügung passender Exponentialfactoren setzen:

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varrho x_0 = \qquad\qquad \sigma_{00}\ \sigma_{01}\ \sigma_{02}\ \sigma_{03}\ \sigma_{04}, \\
\varrho x_1 = \alpha_1 e^{\eta_1 u} \cdot \sigma_{10}\ \sigma_{11}\ \sigma_{12}\ \sigma_{13}\ \sigma_{14}, \\
\varrho x_2 = \alpha_2 e^{2\eta_1 u} \cdot \sigma_{20}\ \sigma_{21}\ \sigma_{22}\ \sigma_{23}\ \sigma_{24}, \\
\varrho x_3 = \alpha_3 e^{3\eta_1 u} \cdot \sigma_{30}\ \sigma_{31}\ \sigma_{32}\ \sigma_{33}\ \sigma_{34}, \\
\varrho x_4 = \alpha_4 e^{4\eta_1 u} \cdot \sigma_{40}\ \sigma_{41}\ \sigma_{42}\ \sigma_{43}\ \sigma_{44}.
\end{array}\right.$$

Dabei sind die α_1, α_2, α_3, α_4 willkürliche Constante, die nun noch mit Rücksicht auf die Collineationen der Curve in sich zweckmässig gewählt werden sollen.

Es giebt fünfzig solche Collineationen, entsprechend den Formeln

$$u' = \pm u + \frac{p\omega_1 + q\omega_2}{5} \cdot (p, q = 0, 1, 2, 3, 4).$$

In der That werden diesen Formeln entsprechend, mit Rücksicht auf (30), fünf Punkte der Curve, die auf einer Ebene liegen, wieder in fünf ebensolche Punkte übergeführt.

Analog wie in § 4. (des ersten Abschnitts) werden wir nur die drei Substitutionen:

$$u' = -u, \quad u' = u - \frac{\omega_1}{5}, \quad u' = u - \frac{\omega_2}{5}, \tag{36}$$

aus denen sich alle anderen zusammensetzen, zu untersuchen brauchen. Man findet leicht:

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
x_0(-u) = -x_0(u), \\[2mm]
x_1(-u) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_4} \cdot e^{-\omega_1\left(\frac{3\eta_1}{2} + \frac{6\eta_2}{5}\right)} \cdot x_4(u), \\[2mm]
x_2(-u) = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot e^{-\omega_1\left(\frac{\eta_1}{2} + \frac{2\eta_2}{5}\right)} \cdot x_3(u), \\[2mm]
x_3(-u) = \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot e^{+\omega_1\left(\frac{\eta_1}{2} + \frac{2\eta_2}{5}\right)} \cdot x_2(u), \\[2mm]
x_4(-u) = \dfrac{\alpha_4}{\alpha_1} \cdot e^{+\omega_1\left(\frac{3\eta_1}{2} + \frac{6\eta_2}{5}\right)} \cdot x_1(u);
\end{array}\right. \\[12mm]
\left\{\begin{array}{l}
x_0\left(u - \frac{\omega_1}{5}\right) = \dfrac{1}{\alpha_1}\, x_1(u), \\[2mm]
x_1\left(u - \frac{\omega_1}{5}\right) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot e^{\frac{-\eta_1\omega_1}{5}} \cdot x_2(u), \\[2mm]
x_2\left(u - \frac{\omega_1}{5}\right) = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot e^{\frac{-2\eta_1\omega_1}{5}} \cdot x_3(u), \\[2mm]
x_3\left(u - \frac{\omega_1}{5}\right) = \dfrac{\alpha_3}{\alpha_4} \cdot e^{\frac{-3\eta_1\omega_1}{5}} \cdot x_4(u), \\[2mm]
x_4\left(u - \frac{\omega_1}{5}\right) = -\alpha_4 \cdot e^{\frac{-4\eta_1\omega_1}{5} + \frac{5\eta_1\omega_1}{2} + 2\eta_1\omega_2} \cdot x_0(u);
\end{array}\right. \\[12mm]
\left\{\begin{array}{l}
x_0\left(u - \frac{\omega_2}{5}\right) = x_0(u), \\[2mm]
x_1\left(u - \frac{\omega_2}{5}\right) = \varepsilon^4 x_1(u), \\[2mm]
x_2\left(u - \frac{\omega_2}{5}\right) = \varepsilon^3 x_2(u), \\[2mm]
x_3\left(u - \frac{\omega_2}{5}\right) = \varepsilon^2 x_3(u), \\[2mm]
x_4\left(u - \frac{\omega_2}{5}\right) = \varepsilon x_4(u).
\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{37}$$

Hier ist

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} = \varepsilon$$

gesetzt.

Verlangt man jetzt, dass bei der zweiten Substitution bloss eine cyklische Vertauschung der x stattfinde, so muss man die α den Gleichungen entnehmen:

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} e^{\frac{-\eta_1\omega_1}{5}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} e^{\frac{-2\eta_1\omega_1}{5}} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} e^{\frac{-3\eta_1\omega_1}{5}}$$
$$= -\alpha_4 e^{\frac{-4\eta_1\omega_1}{5} + \frac{5\eta_1\omega_1}{2} + 2\eta_1\omega_2}.$$

Dies giebt, unter ϱ eine beliebige ganze Zahl verstanden:

$$\alpha_1 = -\varepsilon^{\varrho} \cdot e^{\frac{-2\eta_1\omega_2}{5} - \frac{\eta_1\omega_1}{10}}, \qquad \alpha_2 = \varepsilon^{2\varrho} \cdot e^{2 \cdot \frac{-2\eta_1\omega_2}{5} + 4 \cdot \frac{-\eta_1\omega_1}{10}},$$
$$\alpha_3 = -\varepsilon^{3\varrho} \cdot e^{3 \cdot \frac{-2\eta_1\omega_2}{5} + 9 \cdot \frac{-\eta_1\omega_1}{10}}, \qquad \alpha_4 = \varepsilon^{4\varrho} \cdot e^{4 \cdot \frac{-2\eta_1\omega_2}{5} + 16 \cdot \frac{-\eta_1\omega_1}{10}}.$$

Wir können durch passende Annahme von ϱ erreichen, dass auch die ersten Substitutionen nur Vertauschungen der x herbeiführen. Zu dem Zwecke müssen wir $\varrho = 2$ wählen.

Wir normiren also unsere Ausdrücke für die x folgender Weise:

$$(38) \quad \begin{cases} \varrho x_0 = \sigma_{00}\,\sigma_{01}\,\sigma_{02}\,\sigma_{03}\,\sigma_{04}, \\ \varrho x_1 = \varpi\,\Theta\,e^{\eta_1 u} \cdot \sigma_{10}\,\sigma_{11}\,\sigma_{12}\,\sigma_{13}\,\sigma_{14}, \\ \varrho x_2 = \varpi^2\Theta^4 e^{2\eta_1 u} \cdot \sigma_{20}\,\sigma_{21}\,\sigma_{22}\,\sigma_{23}\,\sigma_{24}, \\ \varrho x_3 = \varpi^3\Theta^9 e^{3\eta_1 u} \cdot \sigma_{30}\,\sigma_{31}\,\sigma_{32}\,\sigma_{33}\,\sigma_{34}, \\ \varrho x_4 = \varpi^4\Theta^{16} e^{4\eta_1 u} \cdot \sigma_{40}\,\sigma_{41}\,\sigma_{42}\,\sigma_{43}\,\sigma_{44}, \end{cases}$$

wo

$$(39) \qquad \varpi = -e^{\frac{-2\eta_2\omega_1}{5}}, \qquad \Theta = e^{\frac{-\eta_1\omega_1}{10}}$$

gesetzt ist.*)

Dann wird der Effect der 50 linearen Transformationen der Curve in sich durch die einfachen Formeln gegeben:

$$(40) \quad \begin{cases} x_0(-u) = -x_0(u), \quad x_1(-u) = -x_4(u), \quad x_2(-u) = -x_3(u), \\ \qquad x_3(-u) = -x_2(u), \quad x_4(-u) = -x_1(u); \\ x_i\left(u - \frac{\omega_1}{5}\right) = x_{i+1}(u); \quad x_i\left(u + \frac{\omega_2}{5}\right) = \varepsilon^i x_i(u). \end{cases}$$

*) Man könnte allgemein schreiben:

$$\varrho x_m = \varpi^m \Theta^{m^2} e^{m\eta_1 u} \cdot \sigma_{m0}\sigma_{m1}\sigma_{m2}\sigma_{m3}\sigma_{m4},$$

wo dann

$$x_m = x_n,$$

sobald $m \equiv n$ (mod. 5).

In der ersten Zeile ist rechter Hand das gemeinsame Minuszeichen beibehalten, weil diese Formeln absolut gelten, wenn $u = 0$ gesetzt wird, was im Folgenden zur Anwendung kommt. Die übrigen Formeln gelten (wie dies früher verabredet wurde) nur insofern, als man Proportionalitätsfactoren vernachlässigt.*)

§ 13.

Die fünf quadratischen Gleichungen zwischen den x.

Von den 15 Gliedern zweiter Ordnung in den x sind nach dem Hermite'schen Satze nur 10 linear unabhängig. Die 5 übrigen können durch diese 10 linear ausgedrückt werden. Geometrisch ausgedrückt haben wir also *fünf Flächen zweiter Ordnung*, die unsere Curve enthalten. Es soll sich jetzt zunächst darum handeln, diese fünf Gleichungen für unsere normirten Veränderlichen (38) aufzustellen.

Zuerst beweisen wir, *dass zwischen den* 10 *Producten* $x_i x_k$ *keine lineare Relation besteht.*

In der That, wäre eine solche Gleichung etwa

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \tag{41}$$

so könnte man sie in die fünf Gleichungen spalten:

$$\left\{\begin{aligned} a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 &= 0, \\ a_{01} x_0 x_1 + a_{24} x_2 x_4 &= 0, \\ a_{02} x_0 x_2 + a_{34} x_3 x_4 &= 0, \\ a_{03} x_0 x_3 + a_{12} x_1 x_2 &= 0, \\ a_{04} x_0 x_4 + a_{13} x_1 x_3 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Man wende nämlich auf (41) die Substitution (40), welche $u' = u + \frac{\omega_2}{5}$ entspricht, nämlich $x_i' = \varepsilon^i x_i$ fünfmal hinter einander an. So erhält man fünf Gleichungen, aus denen sich die Gleichungen (42) durch geeignete Combination ergeben. — Eine zweigliedrige Relation von der Art (42) ist aber unmöglich, weil z. B. weder x_1 noch x_4 nothwendig verschwindet, wenn x_2 verschwindet. Also kann auch (41) nicht bestehen.

---

*) Um analoge Formeln für beliebige ($n$te Stufe) zu haben, setze man:

$$\varpi = -e^{-\frac{n-1}{2} \cdot \frac{\eta_2 \omega_1}{n}}, \qquad \Theta = e^{\frac{-\eta_1 \omega_1}{2n}}$$

und

$$\varrho x_m = \varpi^m \Theta^{m^2} e^{m \eta_1 u} \sigma_{m,0} \sigma_{m,1} \cdots \sigma_{m,n-1}.$$

Dann verwandelt die Substitution $u' = -u$ (von Factoren abgesehen) x_i in x_{n-i}, die Substitution $u' = u - \frac{\omega_1}{5}$ x_i in x_{i+1}, endlich die Substitution $u' = u + \frac{\omega_2}{5}$ x_i in $\varepsilon^i x_i$, wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Wir können also die fünf von uns gesuchten quadratischen Relationen in der Weise aufstellen, dass wir die Quadrate $x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ durch die $x_i x_k$ linear ausdrücken. Dabei wird aber der Ausdruck für x_0^2 nur solche $x_i x_k$ enthalten können, die bei der Substitution $x_i' = \varepsilon^i x_i$, gleich x_0^2, ungeändert bleiben. Er wird daher nothwendig lauten:

$$x_0^2 + a x_2 x_3 + b x_1 x_4 = 0, \tag{43}$$

wo a, b noch unbestimmt bleiben. — Wendet man hier, der Substitution $u' = u - \frac{\omega_1}{5}$ entsprechend, eine cyklische Vertauschung der x an, so entstehen vier weitere Relationen, und diese, zusammen mit (43), bilden die gesuchten fünf.

Nun sind aber die Coefficienten a, b in (43) als Modulfunctionen $\left(\text{Functionen von } \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ keinenfalls von einander unabhängig. Setzt man in (43) $u = \frac{\omega_1}{5}$, so folgt:

$$a = -\frac{x_0^2\left(\frac{\omega_1}{5}\right)}{x_2\left(\frac{\omega_1}{5}\right) x_3\left(\frac{\omega_1}{5}\right)},$$

oder, nach (40):

$$a = -\frac{x_4^2(0)}{x_1(0)\, x_2(0)}.$$

Es ist aber (ebenfalls nach (40)):

$$x_4(0) = -x_1(0),$$

und somit:

$$a = -\frac{x_1(0)}{x_2(0)}. \tag{44}$$

Setzen wir dagegen $u = \frac{2\omega_1}{5}$, so bekommen wir:

$$b = -\frac{x_0^2\left(\frac{2\omega_1}{5}\right)}{x_1\left(\frac{2\omega_1}{5}\right) x_4\left(\frac{2\omega_1}{5}\right)} = -\frac{x_3^2(0)}{x_4(0)\, x_2(0)} = \frac{x_2(0)}{x_1(0)}.$$

Zwischen a und b besteht also die wichtige Relation $b = -\frac{1}{a}$.

Mithin lauten unsere fünf quadratischen Gleichungen schliesslich folgendermassen:

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_0 &= x_0^2 + a x_2 x_3 - \frac{1}{a} x_1 x_4 = 0,\\
\varphi_1 &= x_1^2 + a x_3 x_4 - \frac{1}{a} x_2 x_0 = 0,\\
\varphi_2 &= x_2^2 + a x_4 x_0 - \frac{1}{a} x_3 x_1 = 0,\\
\varphi_3 &= x_3^2 + a x_0 x_1 - \frac{1}{a} x_4 x_2 = 0,\\
\varphi_4 &= x_4^2 + a x_1 x_2 - \frac{1}{a} x_0 x_3 = 0.
\end{aligned}\right. \tag{45}$$

Zugleich ergiebt die Gleichung (44) folgenden Ausdruck für a:

$$(46)\qquad a = e^{\frac{2\eta_1\omega_1}{5}+\frac{3\eta_1\omega_1}{10}} \cdot \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+2\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+3\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+4\omega_2}{5}\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega_1}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1+\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1+2\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1+3\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1+4\omega_2}{5}\right)},$$

oder, anders geschrieben:

$$(46\text{b})\qquad a = e^{\frac{3\eta_1\omega_1}{10}} \cdot \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1+2\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{\omega_1-2\omega_2}{5}\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega_1}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1+\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1-\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1+2\omega_2}{5}\right)\sigma\left(\frac{2\omega_1-2\omega_2}{5}\right)}.$$

§ 14.

Verträglichkeit der gefundenen quadratischen Gleichungen.

Es ist interessant, zu untersuchen, wie so die Gleichungen (45) algebraisch zusammen bestehen können, und ob sie unsere Curve fünfter Ordnung vollständig bestimmen.

Betrachten wir zu dem Zwecke zunächst die drei Flächen:

$$\varphi_0 = 0,\quad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0.$$

Aus $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ folgt:

$$x_0 = \frac{a x_2^2 x_4 + \frac{1}{a} x_1^3}{\frac{1}{a^2} x_1 x_2 - a^2 x_4^2},\qquad x_3 = \frac{a x_1^2 x_4 + \frac{1}{a} x_2^3}{\frac{1}{a^2} x_1 x_2 - a^2 x_4^2}.$$

Dies in $\varphi_0 = 0$ eingetragen, giebt:

$$\left(a x_2^2 x_4 + \frac{1}{a} x_1^3\right)^2 + a x_2 \left(a x_1^2 x_4 + \frac{1}{a} x_2^3\right)\left(\frac{1}{a^2} x_1 x_2 - a^2 x_4^2\right)$$
$$- \frac{1}{a} x_1 \left(\frac{1}{a^2} x_1 x_2 - a^2 x_4^2\right)^2 x_4 = 0,$$

oder:

$$(47)\qquad x_1 \left\{\frac{1}{a^2}(x_1^5 + x_2^5) + \left(3 - \frac{1}{a^5}\right) x_1^2 x_2^2 x_4 + \left(\frac{2}{a} - a^4\right) x_1 x_2 x_4^3 - a^3 x_4^5\right\} = 0.$$

Da dies keine Identität ist, so folgt zunächst, *dass unsere drei Flächen nur ein einfach ausgedehntes Gebiet (eine Curve) gemein haben.* Diese Curve ist jedenfalls von der achten Ordnung. Aber Gleichung (47) zeigt, dass diese Curve zerfällt und dass einer ihrer Theile in der Ebene $x_1 = 0$ enthalten ist.

Der hiermit abgetrennte Theil erweist sich als eine Curve *dritter* Ordnung. In der That, setzen wir in φ_0, φ_1, φ_2 $x_1 = 0$, so können die entstehenden Gleichungen als Unterdeterminanten folgender Matrix aufgefasst werden:

$$\begin{vmatrix} x_0 & -ax_3 & x_2 \\ x_2 & x_0 & -ax_4 \end{vmatrix}.$$

Sie stellen also im Raume der $x_0 : x_2 : x_3 : x_4$ eine gewöhnliche Raumcurve dritter Ordnung vor.

Dass diese Curve dritter Ordnung den Flächen $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ nicht angehört, ergiebt sich sofort, wenn man in φ_3, φ_4 wieder $x_1 = 0$ setzt.

Dagegen ist die Restcurve von der fünften Ordnung in der That allen Flächen φ gemeinsam. Denn man findet folgende Identitäten:

$$(48) \quad \begin{cases} x_1\varphi_3 = x_2\varphi_0 + ax_0\varphi_1 - ax_3\varphi_2, \\ x_1\varphi_4 = -ax_4\varphi_0 + ax_2\varphi_1 + x_0\varphi_2. \end{cases}$$

Wenn also φ_0, φ_1, φ_2 verschwinden und x_1 ist $\gtrless 0$, so sind auch φ_3 und φ_4 gleich Null.

Die fünf Flächen φ haben ausser dieser Curve fünfter Ordnung Nichts gemein und bestimmen sie also vollständig. Die Fläche $\varphi_3 = 0$ begegnet nämlich der Raumcurve dritter Ordnung, in der sich φ_0, φ_1, φ_2 schneiden, in sechs Punkten. Von diesen liegen fünf (wegen der Gleichung $x_1 = 0$, der die Curve dritter Ordnung genügt) zugleich auf der allen Flächen gemeinsamen Curve fünfter Ordnung.*) Für den sechsten Punkt aber findet man:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Dieser sechste Punkt gehört also der Fläche φ_4 nicht an, und also ist unsere Behauptung bewiesen.

Von den Identitäten (48) geht die eine, wie man sieht, aus der anderen durch cyklische Vertauschung der x hervor. Indem man mit dieser Vertauschung fortfährt, entstehen im Ganzen fünf Relationen, die man folgendermassen anordnen kann:

$$(49) \quad \begin{cases} 0 = (x_3\varphi_1 - x_2\varphi_4) + a(x_1\varphi_2 - x_4\varphi_3), \\ 0 = (x_4\varphi_2 - x_3\varphi_0) + a(x_2\varphi_3 - x_0\varphi_4), \\ 0 = (x_0\varphi_3 - x_4\varphi_1) + a(x_3\varphi_4 - x_1\varphi_0), \\ 0 = (x_1\varphi_4 - x_0\varphi_2) + a(x_4\varphi_0 - x_2\varphi_1), \\ 0 = (x_2\varphi_0 - x_1\varphi_3) + a(x_0\varphi_1 - x_3\varphi_2). \end{cases}$$

---

*) Man findet für die Coordinaten dieser fünf Punkte:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a : 0 : -\varepsilon^{4\varrho} a : \varepsilon^{\varrho} : -\varepsilon^{3\varrho},$$

wo

$$\varrho = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Man überzeugt sich, dass zwischen den $x_i\varphi_k$ keine anderen linearen Identitäten bestehen. *Die 25 $x_i\varphi_k = 0$ repräsentiren also 20 linear unabhängige Flächen dritten Grades, die durch unsere Curve gehen.* Ebenso viele Flächen dritten Grades müssen aber nach dem Abel'schen Theoreme vorhanden sein. Denn es giebt $\frac{5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3} = 35$ Ausdrücke dritten Grades in den x, von denen jeder, weil die x fünfgliedrige σ-Producte sind, an 15 Stellen des Periodenparallelogramms Null wird; es existiren also $35 - 15 = 20$ Relationen dritten Grades in den x. Hieraus folgt, was später wichtig wird: *Alle Flächen dritten Grades, die durch unsere Curve gehen, stellen sich in der Form dar:*

$$\Sigma a_{ik}\, x_i\, \varphi_k = 0. \tag{50}$$

§ 15.

Die Constante a als Ikosaederirrationalität.

Wir wollen jetzt die Constante a, die in unseren fünf Gleichungen vorkommt, als Modulfunction studiren und beweisen, dass sie *die Ikosaederirrationalität in der gewöhnlichen Normalform* ist. Zu dem Zwecke müssen wir das Verhalten von a bei linearen Substitutionen der ω_1, ω_2 untersuchen.

Man überlege sich nun zunächst Folgendes. Zwischen den (durch lineare Substitution der ω_1, ω_2 entstehenden) transformirten x und a, die wir x' und a' nennen wollen, bestehen die Gleichungen:

$$\varphi_0' = x_0'^2 + a' x_2' x_3' - \frac{1}{a'}\, x_1' x_4' = 0, \quad \text{etc.},$$

die lineare Combinationen der $\varphi_0, \cdots, \varphi_4$ sein müssen. Andererseits drücken sich die x' linear durch die x aus. Man schliesst also, dass a'^2 und a' lineare Functionen von a^2 und a sind. Und hieraus folgt, dass a' eine lineare Function von a ist, *dass also a bei linearen Substitutionen von ω_1, ω_2 sich selbst linear transformirt.*

Ganz analog, wie in § 6. (des ersten Abschnitts), lässt sich jetzt zeigen, dass a bei allen ω-Substitutionen ungeändert bleibt, welche modulo 5 zur Identität congruent sind, dass es ebenfalls ungeändert bleibt bei der Substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. *Es kann also a höchstens 60 Werthe annehmen, und wenn es wirklich 60 Werthe annimmt, so ist es eine lineare Function der Ikosaederirrationalität.* Die folgenden Rechnungen haben diesen Schluss zu bestätigen und zu präcisiren. Da alle ω-Substitutionen nur modulo 5 in Betracht kommen, so können wir wieder die Bedingung für die Substitutionscoefficienten:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

durch die andere ersetzen:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{5}.$$

§ 16.

Verhalten von a bei den 20 ω-Substitutionen, die P_∞ fest lassen.

Die 20 ω-Substitutionen, welche P_∞ fest lassen, sind nach Formel (32) die folgenden:

$$\begin{vmatrix} \pm 1, & \beta \\ 0, & \pm 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \pm 2, & \beta \\ 0, & \pm 3 \end{vmatrix}. \quad (\beta = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Beginnen wir etwa mit $\begin{vmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{vmatrix}$. Wenden wir diese Substitution auf die Formeln (40) an, so bekommen wir für die transformirten x,

$$x_i'\left(u - \frac{\omega_1 + \beta\omega_2}{5}\right) = x_{i+1}'(u). \tag{51}$$

Bemerkt man jetzt, dass x_0' und x_0 dieselben Verschwindungspunkte haben, so kann man bis auf einen Proportionalitätsfactor setzen:

$$x_0' = x_0.$$

Dann folgt aus (51):

$$x_1' = x_0'\left(u - \frac{\omega_1 + \beta\omega_2}{5}\right) = x_0\left(u - \frac{\omega_1 + \beta\omega_2}{5}\right),$$

oder nach (40):

$$x_1' = \varepsilon^{-\beta} x_1.$$

Ebenso:

$$x_2' = \varepsilon^{-3\beta} x_2, \quad x_3' = \varepsilon^{-\beta} x_3, \quad x_4' = x_4.$$

Trägt man jetzt diese Werthe der x' in die Gleichung φ_0' ein und vergleicht mit φ_0, so folgt:

$$a' = \varepsilon^{-\beta} \cdot a.$$

Ebenso kann man bei den anderen Substitutionen verfahren. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Man hat für

$$\begin{vmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{vmatrix}:$$

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = \varepsilon^{-\beta} x_1, \quad x_2' = \varepsilon^{-3\beta} x_2, \quad x_3' = \varepsilon^{-\beta} x_3, \quad x_4' = x_4, \tag{52}$$
$$a' = \varepsilon^{-\beta} a;$$

für

$$\begin{vmatrix} -1, & \beta \\ 0, & -1 \end{vmatrix}:$$

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = \varepsilon^{\beta} x_4, \quad x_2' = \varepsilon^{3\beta} x_3, \quad x_3' = \varepsilon^{\beta} x_2, \quad x_4' = x_1, \tag{53}$$
$$a' = \varepsilon^{\beta} a;$$

für

$$\begin{vmatrix} 2, & \beta \\ 0, & 3 \end{vmatrix}:$$

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = \varepsilon^{-2\beta} x_2, \quad x_2' = \varepsilon^{-\beta} x_4, \quad x_3' = \varepsilon^{-2\beta} x_1, \quad x_4' = x_3, \tag{54}$$
$$a' = -\frac{\varepsilon^{3\beta}}{a};$$

für
$$\begin{vmatrix} -2, & \beta \\ 0, & -3 \end{vmatrix}:$$

$$(55)\qquad x_0' = x_0,\quad x_1' = \varepsilon^{2\beta} x_3,\quad x_2' = \varepsilon^{\beta} x_1,\quad x_3' = \varepsilon^{2\beta} x_4,\quad x_4' = x_2,$$
$$a' = -\frac{\varepsilon^{2\beta}}{a}.$$

Wir haben also zehn lineare Substitutionen für a, die mit zehn der gewöhnlichen Ikosaedersubstitutionen übereinstimmen.

§ 17.

Uebergang von P_∞ zu P_0 und zu den übrigen P_ν.

Wir untersuchen jetzt die Substitution $\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}$, die P_∞ in P_0 überführt. Dabei sollen die transformirten x mit $x^{(0)}$ bezeichnet sein. Man hat zunächst aus (40):

$$(56)\qquad \begin{cases} x_i^{(0)}\left(u + \frac{\omega_2}{5}\right) = x_{i+1}^{(0)}(u), \\ x_i^{(0)}\left(u + \frac{\omega_1}{5}\right) = \varepsilon^i x_i^{(0)}(u). \end{cases}$$

Hiernach bleibt x_0^0 bei der Substitution $u' = u + \frac{\omega_1}{5}$ ungeändert. Dieselbe Substitution begründet aber, nach (40), eine cyklische Vertauschung der ursprünglichen x. Also können wir, von einem Proportionalitätsfactor abgesehen, schreiben:

$$x_0^{(0)} = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Dann aber geben die Formeln (56) und (40):

$$(57)\qquad \begin{cases} x_0^{(0)} = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ x_1^{(0)} = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4, \\ x_2^{(0)} = x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^4 x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^3 x_4, \\ x_3^{(0)} = x_0 + \varepsilon^3 x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^4 x_3 + \varepsilon^2 x_4, \\ x_4^{(0)} = x_0 + \varepsilon^4 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \varepsilon x_4. \end{cases}$$

Dies sind die einfachsten von den 20 Formeln, die von P_∞ zu P_0 überleiten. Aus ihnen ergeben sich Formeln, die von P_∞ zu P_ν führen, wenn man die Substitution $\begin{vmatrix} 1, & \nu \\ 0, & 1 \end{vmatrix}$ zu Hülfe nimmt. Man wird dann, dem vorigen Paragraphen entsprechend, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 in (57) durch $x_0, \varepsilon^{4\nu} x_1, \varepsilon^{2\nu} x_2, \varepsilon^{4\nu} x_3, x_4$, andererseits die $x^{(0)}$ durch $x^{(\nu)}$ er-

setzen. Ich verzichte darauf, diese Formeln genauer zu discutiren; sie sind genau denjenigen analog, die bei $n = 3$ auftreten (vergl. § 8. des ersten Abschnitts).*)

§ 18.

Entsprechendes Verhalten von a.

Trägt man die Werthe (57) der $x_i^{(0)}$ in die Gleichung:

$$x_0^{(0)2} + a^{(0)} x_2^{(0)} x_3^{(0)} - \frac{1}{a^0} x_1^{(0)} x_4^{(0)} = 0$$

ein und schafft die Quadrate der x mit Hülfe der Gleichungen (45) weg, so erhält man:

$$a = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) a^{(0)2} + 2a^{(0)} - (\varepsilon + \varepsilon^4)}{a^{(0)2} + a^{(0)} - 1},$$

oder, indem man Zähler und Nenner durch $a^{(0)} - (\varepsilon + \varepsilon^4)$ dividirt:

$$a^0 = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) a^{(0)} + 1}{a^0 - (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)},$$

woraus folgt:

$$(58) \qquad a^0 = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) a + 1}{a - (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)} = - \frac{a - (\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4) a + 1}.$$

Auch dies ist eine der gewöhnlichen Ikosaedersubstitutionen (vergl. Klein, Math. Annalen XII p. 507). Und hieraus folgt, unter Hinzunahme der Resultate des § 16., *dass a überhaupt die gewöhnlichen Ikosaedersubstitutionen erleidet und also mit der gewöhnlichen Ikosaederirrationalität identisch ist.* Denn schon aus den beiden Substitutionen:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} : \quad a' = \varepsilon^4 a,$$

$$\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} : \quad a' = - \frac{a - (\varepsilon + \varepsilon^4)}{(\varepsilon + \varepsilon^4) a + 1}$$

setzen sich bekanntlich alle anderen zusammen.

Man erinnere sich jetzt der beiden Formeln (46). *Offenbar geben sie eine elegante Art für die Berechnung der Ikosaederirrationalität durch σ-Functionen.*

---

*) Wenn man bei beliebigem n die x nach § 12. (Note) normirt, so hat man die analogen Formeln:

$$x_r^{(0)} = x_0 + \varepsilon^r x_1 + \varepsilon^{2r} x_2 \cdots \varepsilon^{(n-1)r} x_{n-1},$$

wo $\varepsilon = {}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Man bekommt die Formeln für $x_r^{(\nu)}$, wenn man rechter Hand x_ϱ durch $\varepsilon^{-\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}\cdot\nu} \cdot x_\varrho$ ersetzt.

§ 19.

Aufstellung des überall endlichen, längs der Curve fünfter Ordnung hinerstreckten Integrals.

Es soll sich jetzt darum handeln, das überall endliche längs unserer Curve hinerstreckte Integral U, bis auf einen constanten Factor, dessen Normirung späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben mag, durch die Differentiale der x auszudrücken. Zu dem Zwecke erinnern wir uns, dass die drei Flächen $\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2$ ausser der Curve fünfter Ordnung eine Curve dritter Ordnung gemein haben, die in der Ebene $x_1 = 0$ liegt (cf. § 14.). Folglich hat man (vergl. Nöther, Math. Annalen Bd. VIII, p. 510) das gesuchte Integral in folgender Form:

$$U = C \int \frac{(u\,dv - v\,du)\, x_1}{(\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 u v)}, \tag{59}$$

wo C eine Constante, u, v irgend zwei lineare Ausdrücke in den x bedeuten und der Ausdruck im Nenner die Functionaldeterminante der Functionen φ_0, φ_1, φ_2, u, v ist. Die Functionaldeterminante stellt, gleich Null gesetzt, eine Fläche dritter Ordnung dar, welche der Curve fünfter Ordnung in 15 Punkten begegnet. Fünf dieser Punkte sind die Schnittpunkte unserer Curve mit der ergänzenden Curve dritter Ordnung, d. h. mit der Ebene $x_1 = 0$. Die zehn übrigen sind Berührungspunkte von Ebenen des Büschels

$$u + \lambda v = 0$$

mit unserer Curve. (Dass die Zahl dieser Punkte 10 beträgt, lässt sich auf mannigfache Weise verificiren.)

Ich sage nun, *dass diese 10 Punkte nothwendig auf einer Fläche zweiten Grades liegen.* Denn für die 15 Schnittpunkte unserer Curve mit der Functionaldeterminante hat man nach dem Abel'schen Theoreme:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_{15} = 0,$$

andererseits auch, da die fünf ersten Punkte auf der Ebene $x_1 = 0$ liegen:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 0.$$

Also ist auch

$$U_6 + U_7 + \cdots + U_{15} = 0,$$

woraus unsere Behauptung folgt.

Sei nun diese Fläche zweiten Grades

$$F_2 = 0,$$

dann wird, sofern wir uns F_2 mit einem passenden Factor behaftet denken,

$$\Phi - x_1 F_2$$

(unter Φ unsere Functionaldeterminante verstanden) für unsere Curve

Null sein. Hieraus folgt, vermöge der Schlussbemerkung des § 14., dass man identisch haben muss:

$$\Phi - x_1 F_2 \equiv \Sigma a_{ik} x_i \varphi_k.$$

Das heisst: Φ *ist vermöge der* $\varphi_k = 0$ *durch* x_1 *dividirbar und unser Integral kann die Form annehmen*

$$U = C\int \frac{u\,dv - v\,du}{F_2}. \tag{60}$$

Die folgende Rechnung soll diesen Schluss bestätigen und die Fläche zweiter Ordnung F_2 bestimmen.

Wir entwickeln zunächst unsere Determinante:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 2x_0 & -\frac{1}{a}x_4 & ax_3 & ax_2 & -\frac{1}{a}x_1 \\ -\frac{1}{a}x_2 & 2x_1 & -\frac{1}{a}x_0 & ax_4 & ax_3 \\ ax_4 & -\frac{1}{a}x_3 & 2x_2 & -\frac{1}{a}x_1 & ax_0 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

explicite nach den Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix},$$

wobei die dreigliedrige Determinante, die in der Entwickelung mit $\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}$ verbunden erscheint, vom Zeichen abgesehen D_{ij} genannt werden soll. Dann suchen wir in jeder einzelnen D_{ij} vermöge der Gleichungen $\varphi_k = 0$ x_1 als Factor in Evidenz zu bringen.

Man hat z. B.

$$D_{01} = \begin{vmatrix} ax_3 & ax_2 & -\frac{1}{a}x_1 \\ -\frac{1}{a}x_0 & ax_4 & ax_3 \\ 2x_2 & -\frac{1}{a}x_1 & ax_0 \end{vmatrix}$$

$$= a^3x_0x_3x_4 + ax_1x_3^2 + ax_2x_0^2 + 2a^2x_2^2x_3 - \frac{1}{a^3}x_0x_1^2 + 2x_1x_2x_4$$

$$= 2x_1x_2x_4 + ax_1x_3^2 - \frac{1}{a^3}x_0x_1^2 + a^2x_3(x_2^2 + ax_0x_4)$$
$$+ ax_2(x_0^2 + ax_2x_3),$$

oder vermöge der Gleichungen $\varphi_2 = 0$, $\varphi_0 = 0$:

$$D_{01} = x_1\left(3x_2x_4 + 2ax_3^2 - \frac{1}{a^3}x_0x_1\right).$$

Schafft man hier noch vermöge $\varphi_3 = 0$ das Glied mit x_3^2 weg, so kommt:

$$D_{01} = x_1\left(5x_2x_4 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\right)x_0x_1\right).$$

Ganz analog gestalten sich die weiteren Rechnungen, und man findet schliesslich:

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
D_{01} &= x_1\left(5x_2x_4 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\right)x_0x_1\right),\\
D_{12} &= x_1\left(5x_3x_0 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\right)x_1x_2\right),\\
D_{23} &= x_1\left(5x_4x_1 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\right)x_2x_3\right),\\
D_{34} &= x_1\left(5x_0x_2 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\right)x_3x_4\right),\\
D_{40} &= x_1\left(5x_1x_3 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\right)x_4x_0\right),\\
D_{02} &= -\frac{1}{a}x_1\left(5x_3x_4 - \left(\frac{2}{a^2} - a^3\right)x_0x_2\right),\\
D_{13} &= -\frac{1}{a}x_1\left(5x_4x_0 - \left(\frac{2}{a^2} - a^3\right)x_1x_3\right),\\
D_{24} &= -\frac{1}{a}x_1\left(5x_0x_1 - \left(\frac{2}{a^2} - a^3\right)x_2x_4\right),\\
D_{30} &= -\frac{1}{a}x_1\left(5x_1x_2 - \left(\frac{2}{a^2} - a^3\right)x_3x_0\right),\\
D_{40} &= -\frac{1}{a}x_1\left(5x_2x_3 - \left(\frac{2}{a^2} - a^3\right)x_4x_1\right).
\end{aligned}\right.$$

Wir können also als Ausdruck für F_2 folgenden wählen:

$$(62)\quad \begin{aligned} F_2 = \Sigma\,(u_0v_1 - u_1v_0)\,&\{5a^3x_2x_4 - (2a^5+1)\,x_0x_1\}\\ +\ \Sigma\,(u_0v_2 - u_2v_0)\,&\{5a^2x_3x_4 - (2 - a^5)\,x_0x_2\}, \end{aligned}$$

wo mit Σ eine cyklische Vertauschung der Indices gemeint ist. *Tragen wir ihn in* (60) *ein, so haben wir die definitive Form unseres Integrals, und hiermit die Normalform fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung.*

Insbesondere kann man, wenn man will, u, v mit zweien der x identisch wählen. Setzt man z. B.

$$u = x_0, \quad v = x_1,$$

so kommt:

$$(63)\quad U = C\int \frac{x_0\,dx_1 - x_1\,dx_0}{5a^3x_2x_4 - (2a^5+1)\,x_0x_1},$$

und für:

$$u = x_0, \quad v = x_2:$$

$$(64) \qquad U = C \int \frac{x_0\,dx_2 - x_2\,dx_0}{5a^2 x_3 x_4 - (2 - a^5)\,x_0 x_2}.$$

Neben jede dieser einfachsten Formen unseres Integrals stellen sich natürlich vier weitere, gleichberechtigte, die man durch cyklische Vertauschung der x erhält.

§ 20.

Eine algebraische Folgerung aus der Form unseres Integrals.

Man könnte die Formel (59):

$$U = C \int \frac{(u\,dv - v\,du)\,x_1}{(\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 u v)}$$

in der Art verallgemeinern, dass man statt $\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2$ drei andere Flächen nimmt, deren Gleichungen aus den fünf $\varphi_i = 0$ linear zusammengesetzt sind:

$$(65) \qquad \psi_0 = \Sigma\, a_i \varphi_i = 0, \quad \psi_1 = \Sigma\, b_i \varphi_i = 0, \quad \psi_2 = \Sigma\, c_i \varphi_i = 0,$$

dafür aber in den Zähler statt x_1 den linearen Ausdruck P stellt, der für alle Punkte der Curve dritter Ordnung verschwindet, welche den $\psi_0 \psi_1 \psi_2$ ausser der Curve fünfter Ordnung gemeinsam ist. Das so hervorgehende Integral

$$C \int \frac{(u\,dv - v\,du)\,P}{(\Sigma a_i \varphi_i \;\; \Sigma b_i \varphi_i \;\; \Sigma c_i \varphi_i \; u\,v)}$$

muss dann mit (60), resp. (63), (64) übereinstimmen. Wir haben also ein Mittel, *die Ebene P zu bestimmen, die den drei Flächen $\psi_0 \psi_1 \psi_2$ zugeordnet ist;* und dies soll nun noch zum Schlusse geschehen.

Wir betrachten zu dem Zwecke etwa die Unterdeterminante Δ_{01}, die in unserer neuen Functionaldeterminante mit $\begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix}$ multiplicirt ist. Offenbar muss sich diese Determinante Δ_{01} vermöge der $\varphi_k = 0$ nach (61) in

$$P \left\{ 5x_2 x_4 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\, x_0 x_1\right)\right\}$$

zerlegen lassen. Nun ist:

$$\Delta_{01} = \begin{vmatrix} \sum a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} & \sum b_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} & \sum c_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \\ \sum a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} & \sum b_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} & \sum c_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} \\ \sum a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_4} & \sum b_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_4} & \sum c_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

gleich dem Product der Matrices:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_4} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir hier mit G_{ij} diejenige dreigliedrige Determinante der letzten Matrix, in welcher φ_i, φ_j fehlen, und benutzen die früher aufgestellten Formeln, um in der Entwickelung von G_{ij} den Factor:

$$5x_2x_4 - \left(2a^2 + \frac{1}{a^3}\right) x_0 x_1 ,$$

den ich der Kürze halber jetzt λ nennen will, in Evidenz zu bringen, so finden wir:

$$G_{01} = \lambda x_3, \quad G_{02} = -\lambda a x_1, \quad G_{03} = -\lambda a x_4, \quad G_{04} = \lambda x_2,$$
$$G_{12} = \lambda x_4, \quad G_{13} = -\lambda a x_2, \quad G_{14} = -\lambda a x_0, \quad G_{23} = \lambda x_0,$$
$$G_{24} = -\lambda a x_3, \quad G_{34} = \lambda x_1.$$

Wir schliessen also, dass die Gleichung der gesuchten Ebene folgendermassen lautet:

$$(66) \qquad \Sigma x_0 \left\{ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_4 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right\} = 0,$$

(wo wieder Σ eine cyklische Vertauschung der Indices bedeutet). Sonach: *Drei beliebige Flächen zweiten Grades:*

$$\Sigma a_i \varphi_i = 0, \quad \Sigma b_i \varphi_i = 0, \quad \Sigma c_i \varphi_i = 0,$$

welche durch die Curve fünfter Ordnung gehen, haben überdies eine Curve dritter Ordnung gemein, die in der Ebene (66) *liegt.*

München, Mitte August 1880.

Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen.

Von

M. Noether in Erlangen.

Der folgende Aufsatz*) ist eine Weiterentwicklung von Ideen und Schlüssen, die in dem gemeinsamen Aufsatze von Herrn Brill und mir, Math. Ann. VII, zuerst niedergelegt sind. Es handelt sich jetzt principiell um die Darstellung der algebraischen Functionen einer Variabeln *in invarianter Form*, d. h. in einer Form, welche durch rationale, eindeutig umkehrbare Substitutionen nicht mehr verändert wird. Dieses ist die Form, welche jeder allgemeineren Untersuchung über diese Functionen, insbesondere in der Theorie der Abel'schen Functionen, zu Grunde gelegt werden sollte.

Nun kennt man die Quotienten der „Functionen φ" als solche mit invariantem Charakter, und durch sie ist jede algebraische Function der betreffenden Classe auszudrücken, einzig den hyperelliptischen Fall ausgenommen, den ich im Folgenden ausschliesse. Um die Dimensionen von Zähler und Nenner dieser Ausdrücke in den φ näher festzulegen, ist vor Allem *die Frage nach der Anzahl der Relationen irgend einer Ordnung zwischen den p linear von einander unabhängigen Functionen φ* zu behandeln. Ich weise diese Anzahl als *eine in allen Fällen gleichbleibende, nur vom Geschlecht p der Classe abhängige* nach.

Dagegen gebe ich auf die Frage nach der *Form* und gegenseitigen Abhängigkeit dieser Relationen, durch welche die *specielle* Classe bestimmt wird, hier nicht ein.

Auf die Frage nach der Anzahl der quadratischen Relationen zwischen den φ hat schon Herr Weber („Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Funct. auftretende Ausnahmefälle", diese Ann. XIII) hingewiesen; diese Frage wurde dann von Herrn Kraus („Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebr. Curven", diese Ann. XVI), der sich übrigens vorwiegend mit der *Form* dieser Relationen beschäftigt,

---

*) Ein Auszug aus demselben ist in den Ber. der Erlanger physik.-medic. Societät vom 10. Mai 1880 veröffentlicht.

weiter behandelt, aber noch nicht ganz erledigt, da, abgesehen von der nicht in allen Fällen gültig bleibenden Constantenzählung, noch zu zeigen ist, dass die quadratischen Functionen der φ nicht etwa blos einen *Theil* der dort allein behandelten Curven $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, mit $2(k-1)$-fachem Punkte in einem k-fachen Punkte der Grundcurve, bilden.

Die §§ 6.—8., in denen ich die Curven behandle, welche die Grundcurve in allen Schnittpunkten in der ersten Ordnung *berühren*, sind nur als *Beispiel* zu der entwickelten principiellen Auffassung anzusehen, durch welche man zu viel allgemeiner gültigen Resultaten in Bezug auf Systeme von Berührungscurven gelangt, als es durch Betrachtung etwa blos adjungirter Curven allein möglich ist. Die hier algebraisch abgeleiteten Sätze liefern erst eine feste Grundlage für die weiteren transcendenten Untersuchungen. Dass man diese algebraischen Entwicklungen übrigens noch fortsetzen und insbesondere auf in höherer Ordnung berührende Curven unmittelbar ausdehnen kann, ist sofort klar, und ich gedenke später hierauf zurückzukommen.

§ 1.

Invariante Form für die algebraischen Functionen.

Im Sinne der „algebraischen Function" wird eine algebraische Curve

$$f(s, z) = 0 \tag{1}$$

mit allen aus ihr durch rationale, eindeutig umkehrbare Substitutionen ableitbaren Curven als zu *einer* Classe gehörig betrachtet. Es stellt sich daher die Aufgabe, alle rationalen Functionen σ von s, z, zwischen welchen Grössen die Gleichung (1) besteht, d. h. alle zur Classe gehörigen algebraischen Functionen σ von z, in einer Darstellungsform auszudrücken, welche von der besonderen, erst aus der Classe ausgewählten Beziehung (1) unabhängig ist.

Für eine Gattung von Functionen ist eine solche Darstellungsform bekannt. Ich bezeichne nämlich als Functionen φ diejenigen ganzen Functionen $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (wo n die Ordnung von $f(s, z)$) von s, z, welche $= 0$ gesetzt, f adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellen, d. h. solche, welche jeden i-fachen Punkt von f zum $(i-1)$-fachen Punkt haben. Die Quotienten dieser Functionen φ haben den invarianten Charakter.*)

Jede rationale Function dieser Quotienten hat also ebenfalls schon die verlangte invariante Darstellungsform. Umgekehrt kann man leicht zeigen, dass jede rationale Function σ von s, z sich als rationale

*) Vergl. Brill und Noether, Ueber die algebraischen Functionen etc. Math. Ann. VII.

homogene Function 0^{ter} Dimension der φ darstellen lässt, einzig den Fall ausgenommen, dass $f(s, z) = 0$ eine „hyperelliptische" Curve bedeutet, d. h. eine solche Curve, auf welcher eine lineare Schaar von Punktepaaren existirt.

Denn nimmt man aus den Functionen φ die Gesammtheit derjenigen heraus, welche für ein beliebiges Werthsystem $s_0 z_0$, für welches $f(s_0, z_0) = 0$ ist, verschwinden, so werden diese Functionen nicht noch alle für ein und dasselbe weitere Werthsystem von f verschwinden, allein den hyperelliptischen Fall ausgenommen, wo dieses immer eintritt (vergl. d. o. cit. Arb. p. 286). Die Transformation

$$s' = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad z' = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

ist also, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus der Schaar der φ nicht in specieller Weise herausgewählt sind, eine rational umkehrbare. Und jede algebraische Function σ drückt sich somit als rationale Function von s', z', d. h. als rationale Function der Quotienten der φ aus.

Indem wir also im Folgenden überall den Fall des hyperelliptischen Charakters der betrachteten Classen ausschliessen, dagegen keinen weiteren im Uebrigen noch so speciellen Fall, denken wir uns alle algebraischen Functionen σ der Classe rational durch die Quotienten der φ dargestellt. Man hat alsdann nur noch mit Beziehungen zwischen diesen Quotienten der φ zu thun und kann von der speciellen Gleichungsform (1) vollständig absehen.

Stellt man alsdann σ, statt wie oben durch die Quotienten von dreien der φ, durch die Quotienten aller p Functionen φ, die linear von einander unabhängig sind, dar, so fragt es sich zunächst, bis zu welcher Dimension in den φ Zähler und Nenner eines solchen Ausdrucks für eine gegebene Function σ anzusteigen haben. Zur Beantwortung dieser Frage sind die aus den Producten der φ quadratisch, cubisch, etc. zusammensetzbaren Schaaren nach ihrer Mannigfaltigkeit der Reihe nach zu untersuchen. Dabei seien im Folgenden durchaus die p Functionen φ selbst mit $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ bezeichnet; eine homogene ganze Function der φ von der Dimension μ mit

$$\Phi^{(\mu)}, \quad \Psi^{(\mu)}, \quad \Phi'^{(\mu)}, \ldots$$

§ 2.

Die Schaaren $\Phi^{(2)}$ und die quadratischen Relationen zwischen den Functionen φ.

Wir untersuchen zunächst die Mannigfaltigkeit der ganzen Schaar der $\Phi^{(2)}$.

Indem man zum Zwecke des Beweises irgend eine ebene Curve

(1) $$f(s, z) = 0,$$
welche zur betrachteten Functionsclasse vom Geschlechte p gehört, zu Grunde legt, nehme man auf f $p-2$ Punkte
$$a_1, a_2, \cdots, a_{p-2}$$
in völlig allgemeiner Lage an. Durch solche $p-2$ Punkte a_i wird dann nur eine einfach unendliche Schaar von φ-Curven hindurchgehen, die mit
(2) $$\varphi_1 + \lambda\varphi_2$$
bezeichnet sei; und keine weitere φ-Curve. Ferner wird diese Schaar dann nicht einen weiteren festen (von λ unabhängigen), nur von den a_i abhängigen Punkt auf f besitzen, da wir den hyperelliptischen Fall von f überall ausschliessen. Dies ist dann nur für $p > 3$ zu zeigen. Sei b ein solcher weiterer fester Punkt, und c ein ganz beliebiger weiterer Punkt von f; wenn nun der beliebige Punkt c nicht von selbst einen weiteren festen Punkt mitbestimmen soll (was der hyperelliptische Fall wäre), so müsste die Curve durch die p Punkte
$$a_1, \cdots, a_{p-2}, b, c$$
noch durch $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ von diesen abhängige weitere Punkte hindurchgehen, die auch alle von einander und von den p Punkten verschieden wären, da $p-1$ der p Punkte ganz willkürlich auf f lagen und jede Verbindung von c mit $p-3$ der ersten $p-1$ Punkte einen weiteren festen Punkt liefern soll. Aber da $p + \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ für $p \geqq 4$ grösser wird, als die Anzahl $2p-2$ der Schnittpunkte von f mit einer Curve φ, so ist die Annahme, dass $p-2$ beliebige Punkte von f einen festen Punkt mitbestimmen, nicht zulässig.*)

Hiernach besteht der Restschnitt der Schaar $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$ noch aus Gruppen von je p Punkten, die alle von λ abhängig (beweglich) sind, d. h. keine festen Punkte auf f gemein haben. Ferner geht durch *eine* solche Gruppe von p Punkten nach dem sogenannten Riemann'-Roch'schen Satze (Math. Ann. VII, p. 280) nur *eine* Curve φ, da durch die $p-2$ Punkte a_i nur eine einfach-unendliche Schaar von Curven φ geht.

Betrachten wir jetzt die Schaar
(3) $$\varphi_1\Phi^{(1)} + \varphi_2\Phi'^{(1)},$$
wo $\Phi^{(1)}$ und $\Phi'^{(1)}$ allgemeine lineare Functionen der φ sind. *In diesem Ausdruck* (3) *sind* $2p-1$ *willkürliche Constanten in linearer homogener Weise enthalten.* Denn zunächst enthält $\Phi^{(1)}$ p Constanten und eben-

*) Diese Ausführung ist auch beim Nachweis der Normalcurve $(p+1)$ter Ordnung (Math. Ann. VII, p. 287) hinzuzufügen.

soviele $\Phi'^{(1)}$, aber *ein* Glied von $\varphi_2\Phi'^{(1)}$, nämlich $\varphi_2\varphi_1$, kommt schon in $\varphi_1\Phi^{(1)}$ vor. Eine weitere lineare Relation zwischen den Gliedern von (3) kann aber nicht bestehen, auch nicht vermöge der Gleichung (1). Denn man hätte dann eine Identität

$$\varphi_1\Psi^{(1)} - \varphi_2\Psi'^{(1)} \equiv A \cdot f,$$

wo $\Psi^{(1)}$ und $\Psi'^{(1)}$ bestimmte Functionen φ wären, verschieden von φ_2, φ_1; d. h. die Schaar (2), $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$, hätte mit einer zweiten von dieser verschiedenen Schaar von Curven φ, $\Psi'^{(1)} + \lambda\Psi^{(1)}$, genau denselben beweglichen Schnitt gemein, was nach dem Obigen, wo gezeigt ist, dass durch einen solchen Schnitt nur *eine* Curve φ geht, unmöglich ist.

Sei weiter φ_3 eine beliebige φ-Curve, welche nur die Eigenschaft habe, durch keinen der oben angenommenen Punkte a_i von f hindurchzugehen. Wir betrachten dann die Schaar

$$\varphi_1\Phi^{(1)} + \varphi_2\Phi'^{(1)} + \varphi_3\Phi''^{(1)}, \tag{4}$$

wo auch $\Phi''^{(1)}$ eine lineare Function der φ mit p unbestimmten Parametern vorstellt. Der Theil

$$\varphi_3(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)$$

von $\varphi_3\Phi''^{(1)}$ kommt bereits in den beiden ersten Gliedern von (4) vor; der übrige Theil

$$\varphi_3(\alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 + \cdots + \alpha_p\varphi_p)$$

von $\varphi_3\Phi''^{(1)}$ ist dagegen für keinen Werth der α schon in diesen beiden ersten Gliedern, d. h. der Schaar (3), enthalten, weil sonst dieser Theil, für die speciellen Werthe der α, wie (3) in den Punkten a_i von f verschwinden, also auch, da φ_3 in den a_i nicht verschwindet, ein Ausdruck $\alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 + \cdots + \alpha_p\varphi_p$ für alle Punkte $a_i = 0$ sein müsste, während nach dem Obigen in diesen Punkten doch nur die Schaar (2), $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$, verschwindet.

Hiernach enthält der Ausdruck (4) $3p - 3$ *willkürliche Parameter in linearer homogener Form;* nämlich in den beiden ersten Gliedern $2p - 1$, in dem letzten Gliede alsdann noch $p - 2$ weitere.

Nimmt man nun weiter zu (4) noch andere aus den φ quadratisch zusammengesetzte Glieder hinzu, so erhält man keine Glieder mehr, die nicht schon in dem Ausdruck (4) enthalten wären. Denn die Curvenschaar (4) gehört einer solchen linearen Schaar an, welche f in Gruppen von je $2(2p-2)$ Punkten trifft, und deren Mannigfaltigkeit ist immer (Math. Ann. VII, p. 278) genau eine $\infty^{2(2p-2)-p} = \infty^{3p-4}$-fache. *Die Curven der Schaar* (4), von derselben Mannigfaltigkeit, *stellen also schon die ganze* (4) *corresiduale Schaar dar, und diese sind also jedenfalls von der Form* $\Phi^{(2)}$.

Man kann das Letztere auch so ausdrücken:

Sei $\Psi^{(2)}$ eine gegebene quadratische Function der φ; dieselbe verschwindet in $2(2p-2)$ Punkten, und die allgemeinste in diesen Punkten einfach unendlich werdende algebraische Function hat noch $3p-3$ Constanten in linearer homogener Weise. Zu diesen Functionen gehört aber

$$(5)\qquad \frac{\Phi^{(2)}}{\Psi^{(2)}},$$

wo $\Phi^{(2)}$ die allgemeinste quadratische Function der φ ist, und insbesondere auch

$$(5')\qquad \frac{\varphi_1\Phi^{(1)}+\varphi_2\Phi'^{(1)}+\varphi_3\Phi''^{(1)}}{\Psi^{(2)}};$$

und da die Letztere schon an sich die volle Anzahl der überhaupt auftretenden Parameter besitzt, so ist sie selbst schon die allgemeinste Function von der betrachteten Eigenschaft; um so mehr also auch (5).

Ohne die obigen Beweise war nur klar, dass (5) einen *Theil* der betrachteten Functionen ausmacht.

Will man eine Function darstellen, welche nur in einem *Theil* der $2(2p-2)$ Verschwindungspunkte von $\Psi^{(2)}$ unendlich wird, so ist diese Function natürlich ebenfalls unter den (5) oder (5') enthalten.

Da man aus den p Functionen φ

$$\frac{1}{2}p(p+1)$$

Combinationen $\Phi^{(2)}$ bilden kann und unter diesen nur $3p-3$ von einander linear unabhängig sind, so hat man noch:

Die Anzahl der von einander unabhängigen Relationen 2ter Ordnung zwischen den p Functionen φ beträgt genau

$$\frac{1}{2}p(p+1)-(3p-3)=\frac{1}{2}(p-2)(p-3),$$

einzig die hyperelliptischen Classen ausgenommen.

§ 3.

Die Schaaren $\Phi^{(3)}$ und die cubischen Relationen zwischen den φ.

Es werde nun ähnlich die Mannigfaltigkeit der Schaar $\Phi^{(3)}$ untersucht.

Man wähle hier zunächst aus der Schaar der φ zwei solche Curven, φ_1 und φ_2, aus, welche einen, und nur einen, gemeinsamen Schnittpunkt a mit f besitzen. Die Schaar

$$(1)\qquad \varphi_1+\lambda\varphi_2$$

trifft dann f in Gruppen G_{2p-3} von je $2p-3$ beweglichen Punkten, durch welche keine weitere φ-Curve geht. Legt man durch eine solche Gruppe

G'_{2p-3} alle Curven $\Psi^{(2)}$, so schneiden dieselben weiter noch in Gruppen Γ_{2p-1} von je $2p-1$ Punkten. Weil nun deren Mannigfaltigkeit $\infty^{(2p-1)-p} = \infty^{p-1}$ ist und weil diese Gruppen corresidual sind der von $\varphi_1\Phi^{(1)}$ ausgeschnittenen Punktgruppe Γ'_{2p-1}, wo φ_1 durch G'_{2p-3} geht und $\Phi^{(1)}$ *irgend* eine Curve φ ist, so folgt, dass die Gruppen Γ_{2p-1} alle selbst von den $\varphi_1\Phi^{(1)}$, welche ebenfalls die Mannigfaltigkeit ∞^{p-1} haben, aus f ausgeschnitten werden, und dass diese Gruppen alle aus dem festen Punkt a, verbunden mit den von den $\Phi^{(1)}$ ausgeschnittenen Gruppen von je $2p-2$ Punkten, bestehen. Man hat somit:

(2) $$\Psi^{(2)} \equiv \varphi_1\Phi^{(1)}.$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

(3) $$\varphi_1\Phi^{(2)} + \varphi_2\Phi'^{(2)},$$

wo $\Phi^{(2)}$ und $\Phi'^{(2)}$ allgemeine quadratische Functionen der φ sind. $\Phi^{(2)}$ enthält nach § 2. noch $3p-3$ Parameter linear und homogen, und ebenso viele $\Phi'^{(2)}$. Aber der Ausdruck (3) enthält höchstens $2(3p-3) - p = 5p-6$ Parameter, da das Stück

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1\Phi^{(1)}$$

des zweiten Gliedes von (3) bei willkürlichem $\Phi^{(1)}$ schon im ersten Gliede von (3) enthalten ist. Man kann nun leicht zeigen, dass (3) auch genau $5p-6$ Constanten enthält. Denn eine Relation zwischen den Gliedern von (3) ist von der Form

$$\varphi_1\Psi'^{(2)} - \varphi_2\Psi^{(2)} \equiv Af,$$

d. h. die Schaar

$$\Psi^{(2)} + \lambda\Psi'^{(2)} = 0$$

schneidet aus f genau dieselben Gruppen von beweglichen Punkten aus, wie die Schaar

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0.$$

Aber nach Formel (2) sind alsdann (vermöge $f=0$) $\Psi^{(2)}$ und $\Psi'^{(2)}$ von der Form:

$$\Psi^{(2)} \equiv \varphi_1\Phi^{(1)}, \quad \Psi'^{(2)} \equiv \varphi_2\Phi^{(1)};$$

d. h. die oben bereits angegebene Reduction der Constantenzahl $2(3p-3)$ um p ist auch die einzige, welche stattfindet.

Sei weiter φ_3 eine beliebige φ-Curve, welche nur nicht durch den Punkt a von f hindurchgeht; $\Phi''^{(2)}$ eine solche quadratische Function der φ, welche ebenfalls für a nicht verschwindet. Dann ist

$$\varphi_3 \cdot \Phi''^{(2)}$$

nicht im Ausdruck (3), der für a verschwindet, enthalten (auch vermöge $f=0$ nicht); und der Ausdruck

(4) $$\varphi_1\Phi^{(2)} + \varphi_2\Phi'^{(2)} + \varphi_3\Phi''^{(2)}$$

enthält somit, wenn man $\Phi''^{(2)}$ allgemein annimmt, wenigstens

$$(5p-6)+1 = 5(p-1)$$

Parameter in homogener, linearer Weise; aber auch nicht mehr als $5(p-1)$ Parameter. Denn eine Function, die in $6(p-1)$ Punkten von f verschwindet, enthält überhaupt nicht mehr als $6(p-1)-p+1$ Constanten (homogen). *Die ganze Schaar der* (4) *corresidualen Curven ist also schon durch* (4) *selbst gegeben, also jedenfalls von der Form* $\Phi^{(3)}$.

Hieraus folgt weiter, *dass die Anzahl der von einander unabhängigen cubischen Relationen zwischen den p Functionen* φ *genau*

$$\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)-5(p-1)$$

beträgt.

§ 4.

Die Schaaren $\Phi^{(\mu)}$ und die Relationen μ^{ter} Ordnung zwischen den φ.

Um nun allgemein für $\mu > 3$ die Schaaren $\Phi^{(\mu)}$ zu untersuchen, setzen wir die Schaaren $\Phi^{(\mu-1)}$ schon als bekannt voraus. Sei nämlich $\Psi^{(\mu-1)}$ irgend eine solche Function $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der φ, so sollen *alle* Gruppen von je $2(\mu-1)(p-1)$ Punkten, welche der von $\Psi^{(\mu-1)}$ aus f ausgeschnittenen Gruppe corresidual sind, von der Schaar der $\Phi^{(\mu-1)}$ ausgeschnitten werden, sodass diese Schaar noch

$$2(\mu-1)(p-1)-p+1=(2\mu-3)(p-1)$$

Constanten in linearer homogener Weise enthalte.

Wir wählen hier, für $\mu > 3$, zunächst aus der Schaar der φ solche zwei Functionen, φ_1 und φ_2, aus, welche keinen gemeinsamen Nullpunkt auf f besitzen. Die Schaar

$$\varphi_1+\lambda\varphi_2 \tag{1}$$

trifft dann f in Gruppen G_{2p-2} von je $2p-2$ beweglichen Punkten, durch welche keine weitere φ-Curve geht. Legt man durch eine solche Gruppe G'_{2p-2} alle Curven $\Psi^{(\mu-1)}$, so schneiden dieselben weiter noch in Gruppen $\Gamma_{2(\mu-2)(p-1)}$ von je $2(\mu-2)(p-1)$ beweglichen Punkten. Zu diesen Gruppen Γ gehören die von den Curven

$$\varphi_1\Phi^{(\mu-2)} \tag{2}$$

ausgeschnittenen Gruppen, wo φ_1 durch G'_{2p-2} geht und $\Phi^{(\mu-2)}$ eine ganz beliebige Function $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der φ ist; und da diese letzteren selbst schon (wegen $\mu > 3$) eine $\infty^{(2\mu-5)(p-1)-1}$-Schaar bilden, wie die Gruppen $\Gamma_{2(\mu-2)(p-1)}$ überhaupt, so werden *alle* Gruppen Γ von den Curven (2) aus f ausgeschnitten. Man hat somit

$$\Psi^{(\mu-1)}\equiv\varphi_1\Phi^{(\mu-2)} \tag{2'}$$

Man bestrachte nun den Ausdruck

$$\varphi_1\Phi^{(\mu-1)}+\varphi_2\Phi'^{(\mu-1)}, \tag{3}$$

wo $\Phi^{(\mu-1)}$, $\Phi'^{(\mu-1)}$ möglichst allgemein genommene Functionen $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der φ sind. In $\Phi^{(\mu-1)}$ sind $(2\mu-3)(p-1)$ Parameter homogen und linear enthalten und ebensoviele in $\Phi'^{(\mu-1)}$. Um sogleich alle linearen Relationen zwischen den Gliedern von (3) zu erhalten, beachte man, dass eine solche Relation durch Specialisirung der Parameter in $\Phi^{(\mu-1)}$ und $\Phi'^{(\mu-1)}$ erhalten wird, also von der Form ist:

$$\varphi_1 \Psi'^{(\mu-1)} - \varphi_2 \Psi^{(\mu-1)} \equiv A \cdot f.$$

Dies sagt aus, dass die Schaar

$$\Psi^{(\mu-1)} + \lambda \Psi'^{(\mu-1)} = 0,$$

aus f genau dieselben Gruppen von beweglichen Punkten ausschneidet, wie die Schaar

$$\varphi_1 + \lambda \varphi_2 = 0.$$

Aber nach Formel (2) sind alsdann (vermöge $f=0$) $\Psi^{(\mu-1)}$ und $\Psi'^{(\mu-1)}$ von der Form:

$$\Psi^{(\mu-1)} \equiv \varphi_1 \Phi^{(\mu-2)}, \qquad \Psi'^{(\mu-1)} \equiv \varphi_2 \Phi^{(\mu-2)};$$

d. h., die linearen Relationen, welche zwischen den Gliedern von (3) existiren, bestehen *nur* darin, dass im zweiten Gliede das Stück

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1 \Phi^{(\mu-2)}$$

bei willkürlichem $\Phi^{(\mu-2)}$ schon im ersten Gliede von (3) enthalten ist. Da $\Phi^{(\mu-2)}$ für $\mu > 3$ dann noch $(2\mu-5)(p-1)$ Constanten homogen und linear enthält, so ergeben sich für den Ausdruck (3) genau:

$$2(2\mu-3)(p-1) - (2\mu-5)(p-1) = (2\mu-1)(p-1)$$

willkürliche Parameter, die homogen und linear eingehen.

Aber eine Curvenschaar, die in Gruppen von je $2\mu(p-1)$ Punkten trifft, kann für $\mu > 1$ überhaupt nur $2\mu(p-1)-(p-1)=(2\mu-1)(p-1)$ Parameter in der genannten Weise enthalten. *Daher besteht die ganze Schaar der* (3) *corresidualen Curven, die in Gruppen von je* $2\mu(p-1)$ *Punkten treffen soll, nur aus den Functionen* $\Phi'^{(\mu)}$ *der Schaar* (3) *selbst; und insbesondere sind alle Functionen* $\Phi^{(\mu)}$ *unter den Functionen* (3) *enthalten.*

Anders ausgedrückt:

Sei $\Psi^{(\mu)}$ *irgend eine gegebene Function* μ^{ter} *Ordnung der* φ. *Dieselbe verschwindet einfach in* $2\mu(p-1)$ *Punkten, und die allgemeinste algebr. Function, welche in diesen Punkten oder in irgend einem Theil derselben einfach unendlich wird, ist*

$$\frac{\Phi^{(\mu)}}{\Psi^{(\mu)}}.$$

Dieselbe kann für $\mu > 3$ auch schon in die Form gesetzt werden

$$\frac{\varphi_1 \Phi^{(\mu-1)} + \varphi_2 \Phi'^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}},$$

wo φ_1 und φ_2 fest gewählt werden können, wenn sie nur der Bedingung genügen, nicht einen gemeinsamen Nullpunkt zu besitzen.

Da man die p Functionen φ auf

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdots \mu}$$

Weisen zu $\Phi^{(\mu)}$ combiniren kann, von denen nur $(2\mu-1)(p-1)$ linear unabhängige existiren, so folgt noch:

Die Anzahl der von einander linear unabhängigen Relationen μ^{ter} Ordnung ($\mu > 1$) zwischen den p Functionen φ beträgt (immer nur den hyperelliptischen Fall ausgenommen)

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdots \mu} - (2\mu-1)(p-1).$$

§ 5.

Die Functionen $\Phi^{(\mu)}$ in einigen speciellen Fällen.

1. Legt man der algebraischen Classe eine solche ebene Curve n^{ter} Ordnung

$$f(s, z) = 0 \tag{1}$$

zu Grunde, bei welcher ein Geradenbüschel

$$A_1 + \lambda A_2 = 0$$

existirt, dessen Scheitel nicht auf f liegt und der in solchen Punktgruppen schneidet, die zugleich durch ein Büschel von Curven φ

$$\varphi_1 + \lambda \varphi_2 = 0$$

aus f ausgeschnitten werden, so hat man

$$A_1\varphi_2 - A_2\varphi_1 = 0, \tag{2}$$

wenn zugleich $f = 0$ ist. Aber da die linke Seite von (2) nur von der Ordnung $n - 2$, so muss diese Gleichung identisch, ohne Hülfe von $f = 0$, bestehen, und man hat

$$\varphi_1 = A_1\psi, \quad \varphi_2 = A_2\psi,$$

wo $\psi = 0$ eine f adjungirte Curve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung wird. In diesem Falle existiren also eine oder unendlich viele adjungirte Curven $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Transformirt man insbesondere eine Curve f der Classe durch die eindeutige Substitution

$$s' : z' : 1 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

wo die φ_1, φ_2, φ_3 beliebige Curven φ sind, die keinen Punkt auf f gemein haben, so geht $f = 0$ über in eine Normalcurve

(3) $$F = 0,$$

von der Ordnung $N = 2p - 2$, für welche alle Geraden der Ebenen in Gruppen treffen, die zugleich von Curven φ ausgeschnitten werden. In diesem Falle existirt also eine F adjungirte Curve $(N-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, Ψ, und zwar nur *eine*, weil sonst jede von ihnen, verbunden mit einer Geraden, *dieselben* $2p - 2$ Punkte aus F ausschneiden würde, was unmöglich. Ψ selbst trifft F ausser den singulären Punkten nicht mehr.

Für diese Curve F bestehen die $\Phi^{(\mu)}$ aus der Schaar der F adjungirten Curven $(N-4+\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung, verbunden mit der festen Curve $(\Psi)^{\mu-1}$.

Denn diese Curven schneiden in Gruppen von je μN Punkten und zwar in *allen* Gruppen, die einer von ihnen corresidual sind; ein Theil von diesen Curven, nämlich die Curve $(\Psi)^{\mu}$, verbunden mit μ Geraden, gehört aber jedenfalls zu den $\Phi^{(\mu)}$, also vermöge $F = 0$ alle Curven, nach den allgemeinen Sätzen der §§ 2., 3., 4.

2. In Bezug auf die Normalcurve f von der Ordnung

$$\nu = p + 1$$

ordnen sich die adjungirten Curven $(\nu - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung ebenfalls den $\Phi^{(2)}$ unter; sie stellen aber solche $\Phi^{(2)}$ dar, welche noch für $p - 3$ beliebig *ausgezeichnete* Punkte von f verschwinden. Die adjungirten Curven $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind Curven $\Phi^{(3)}$, welche für diese $p - 3$ Punkte doppelt verschwinden; etc.

3. In Bezug auf irgend eine Curve f, von der Ordnung n und dem Geschlecht p, lässt sich nicht allgemein angeben, welchen Curven $\Phi^{(\mu)}$ die adjungirten Curven der Ordnungen $n - 2$, $n - 1$, $\cdots$ unterzuordnen sind. Diese sind immer solche Curven $\Phi^{(\mu)}$, welche durch gewisse specielle Punktsysteme gehen, die eben nur durch diese Eigenschaft der $\Phi^{(\mu)}$, aber nicht an der Curve f selbst, auf invariante Weise zu definiren sind. Bei allgemeinen Untersuchungen, die sich an die durch f definirte algebraische Classe knüpfen, ist es daher nothwendig, von der speciellen Form f abzusehen, und nur die Beziehungen zwischen den φ allein, oder, was im Wesentlichen damit identisch ist, die Normalform (3) oder die Normalform $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, zu betrachten.

4. Nur ein Theil dieser Betrachtungen lässt sich auch noch an f selbst durchführen. Es lässt sich nämlich der bewegliche Schnitt

von f mit denjenigen adjungirten Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, χ, welche durch $n-2$ feste Punkte von f gehen, die zugleich auf einer Geraden A liegen, direct in invarianter Weise auffassen. Dieser Schnitt besteht aus Gruppen von je $2p$ beweglichen Punkten; und darunter befinden sich auch die Gruppen, welche aus den beiden übrigen Schnittpunkten a_1, a_2 der Geraden A mit f und aus dem Schnitt f mit den adjungirten Curven φ bestehen. Transformirt man nun f in f', von der Ordnung n', so gehen diese letzteren Gruppen über in solche, die aus zwei Punkten a_1', a_2', verbunden mit den Schnittpunkten der zu f' gehörigen φ, bestehen; sämmtliche obige Gruppen von je $2p$ Punkten gehen also über in diejenigen, welche diesen letzteren Gruppen corresidual sind, d. h. in den Schnitt von f' mit den f' adjungirten Curven $(n'-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, χ', welche ausserdem durch die $n'-2$ festen Punkte von f' gehen, die noch auf der Geraden A' durch a_1', a_2' liegen.

Transformirt man so f in eine der Normalformen, so sieht man, dass die genannte Schaar der χ übergeht in die Schaar der Functionen $\Phi^{(2)}$, welche noch für $2p-4$ feste Punkte verschwinden, für welche zugleich eine Function φ verschwindet.

Dieses invariante Verhalten der Curven χ ist der Grund ihres Auftretens bei den Integralen dritter Gattung über algebraische Functionen.

5. Wir wollen am Schlusse dieses Paragraphen noch das Verhalten der Functionen $\Phi^{(\mu)}$ in dem bisher ausgeschlossenen Falle, bei den *hyperelliptischen* Functionsclassen, erwähnen. Diese Functionen $\Phi^{(\mu)}$ verschwinden alsdann in Gruppen von je $2\mu(p-1)$ Punkten, von denen aber jede Gruppe aus $\mu(p-1)$ *Punktepaaren* besteht; und dieselben bilden eine $\infty^{\mu(p-1)}$-Schaar. Die Anzahl der Relationen μ^{ter} Ordnung zwischen den p Functionen φ beträgt daher hier

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdots\mu}-\mu(p-1)-1,$$

gültig für jedes μ.

§ 6.

Die in erster Ordnung berührenden Curven $X^{(\mu)}$.

Ich bezeichne im Folgenden mit

$$X^{(\mu)}$$

eine solche Function $\Phi^{(\mu)}$, also Function μ^{ter} Ordnung der φ, welche in $\mu(p-1)$ Punkten je in der zweiten Ordnung verschwindet, d. h. eine Curve $\Phi^{(\mu)}$, die f überall, wo sie f trifft, in der ersten Ordnung *berührt*, also in $\mu(p-1)$ Punkten. Ferner sage ich, dass zwei solche Berührungscurven, $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$, *zum selben System gehören*, wenn

eine Curve $\Phi^{\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$ existirt, deren $(\mu+\nu)(p-1)$ Nullpunkte aus den $\mu(p-1)$ Berührungspunkten von $X^{(\mu)}$ und den $\nu(p-1)$ Berührungspunkten $X^{(\nu)}$ bestehen.

Schon diese Definition zeigt, *dass für zwei Berührungscurven $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$, die zum selben System gehören, $\frac{\mu+\nu}{2}$ gerade, also beide Zahlen μ und ν gerade oder beide ungerade sein müssen.*

Um nun alle Berührungscurven zu erhalten, und nur diese, welche mit einer gegebenen solchen Curve $X^{(\mu)}$ zum selben System gehören, dient der folgende Satz:

I. *Legt man durch die Berührungspunkte einer $X^{(\mu)}$ irgend eine Curve $\Phi^{(\varrho)}$, so berührt in den übrigen Verschwindungspunkten der $\Phi^{(\varrho)}$ eine Berührungscurve $X^{(2\varrho-\mu)}$, welche also mit $X^{(\mu)}$ zum selben System gehört.*

Zum Beweise betrachte man die ganze Schaar der Curven $\Phi^{(2\varrho)}$, welche die $\mu(p-1)$ Berührungspunkte von $X^{(\mu)}$ ebenfalls zu Berührungspunkten haben. Diese Curven schneiden noch in beweglichen Gruppen von je $2(2\varrho-\mu)(p-1)$ Punkten, welche Gruppen aber auch von Curven $\Phi^{(2\varrho-\mu)}$ ausgeschnitten werden können. Denn unter diesen beweglichen Gruppen sind jedenfalls die von den Curven $\Phi^{(2\varrho-\mu)}$ ausgeschnittenen enthalten, welche also nach dem Satze des § 4. *alle* Gruppen bilden müssen. Insbesondere existirt unter diesen Gruppen die von der Curve $\Phi^{(\varrho)}\cdot\Phi^{(\varrho)}$ ausgeschnittene Gruppe; diese Gruppe besteht aber aus den weiteren $(2\varrho-\mu)(p-1)$ Verschwindungspunkten von $\Phi^{(\varrho)}$, für welche nicht $X^{(\mu)}=0$ wird, und zwar diese doppelt gerechnet; daher sind diese Punkte, doppeltgerechnet, auch die Verschwindungspunkte einer $\Phi^{(2\varrho-\mu)}$, d. h. die Berührungspunkte einer $X^{(2\varrho-\mu)}$, wie es der Satz aussagt.

Algebraisch ist dieser Beweis dasselbe, wie der Nachweis der Identität:

$$(\Phi^{(\varrho)})^2 \equiv A\cdot f + B\cdot X^{(\mu)},$$

wenn man eine ebene Curve f der Classe zu Grunde legt; dabei wird dann B die gesuchte Function $X^{(2\varrho-\mu)}$; und die Identität wird für $f=0$:

$$(\Phi^{(\varrho)})^2 - X^{(\mu)}X^{(2\varrho-\mu)} = 0.$$

Insbesondere können wir die ganze Schaar der Berührungscurven $X^{(\nu)}$ betrachten, welche *gleiches* ν haben und zum selben System gehören. Da deren Berührungspunkte aus denen einer und derselben Curve $X^{(\mu)}$ dadurch abgeleitet werden, dass man durch die letzteren die ganze lineare Schaar der $\Phi^{\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$ legt, so bilden jene, einfach genommen, eine *lineare* Schaar. Die Mannigfaltigkeit dieser Schaar ist

(Ann. VII, p. 278), da die Gruppen aus je $\nu(p-1)$ Punkten bestehen, im Allgemeinen eine $\infty^{\nu(p-1)-p}$-fache und wird *nur* und *immer* dann erhöht, wenn diese Gruppen zugleich von Curven φ ausgeschnitten werden. Dieser letztere Fall kann für $\nu > 2$ nicht eintreten. Für $\nu = 2$ können die Gruppen gerade aus sämmtlichen Verschwindungspunkten der φ bestehen, und dann hat man eine ∞^{p-1}-Schaar; die Schaar der $X^{(2)}$ lässt sich aber hier unmittelbar angeben: es ist die bei jeder Curve existirende Schaar $(\Phi^{(1)})^2$, d. h. die Schaar der Curven φ, jede doppelt gerechnet. Wir wollen dieses System $(\Phi^{(1)})^2$ als das *uneigentliche System* $X^{(2)}$ bezeichnen. Die aus diesem uneigentlichen System $(\Phi^{(1)})^2$ abgeleiteten Berührungscurven $X^{(2\varrho)}$ bestehen immer nur aus den doppelt zählenden Curven $\Phi^{(\varrho)}$, aber die Mannigfaltigkeit derselben erhöht sich nach dem Obigen für $\varrho > 1$ nicht. — Für $\nu = 1$ endlich berührt in der Gruppe von $p-1$ Punkten eine Curve φ, und zwar geht durch eine solche Gruppe im Allgemeinen nur eine einzige Curve φ, so dass diese Gruppe einer linearen Schaar von der Mannigfaltigkeit 0 angehört und mit keiner weiteren Gruppe von $p-1$ Punkten zum selben System gehört; im Speciellen aber kann durch eine solche Gruppe auch eine ganze Schaar von Curven φ gehen und dann gehört sie einer linearen ∞^{σ}-Schaar von je $p-1$ Punkten an, in denen je eine Curve $X^{(1)}$ desselben Systems berührt. Dabei kann aber σ höchstens $= \frac{p-2}{2}$, bez. $\frac{p-1}{2}$ sein; denn nimmt man irgend eine Gruppe von $p-1$ Punkten der ∞^{σ}-Schaar mit irgend einer zweiten zusammen, so erhält man $\infty^{2\sigma}$ verschiedene Gruppen von je $2p-2$ Punkten, durch welche auch $\infty^{2\sigma}$ von *einander verschiedene* Curven φ gehen müssen, und da es von diesen letzteren nur ∞^{p-1} giebt, kann 2σ höchstens $= p-1$ sein. Die obere Grenze von σ tritt übrigens ausser den einfachsten Fällen ($p = 4, 6$) nur im hyperelliptischen Falle auf.

Zusammenfassend haben wir so den Satz:

II. *Die Berührungspunkte aller $X^{(\nu)}$, welche gleiches ν haben und zum selben System gehören, bilden eine lineare Schaar von Gruppen von je $\nu(p-1)$ Punkten. Die Mannigfaltigkeit einer solchen Schaar ist für $\nu > 2$ immer $= \nu(p-1) - p$; für $\nu = 2$ bei einem System, dem uneigentlichen $(\Phi^{(1)})^2$, $= p-1$, bei den übrigen Systemen $= p-2$; für $\nu = 1$ im Allgemeinen $= 0$, in besonderen Fällen aber $= 1, 2, \cdots$, und höchstens $= \frac{p-1}{2}$, bez. $\frac{p-2}{2}$.*

Im Vorhergehenden sind alle zu *einem* System gehörigen Berührungscurven aus *einer* Curve des Systems, $X^{(\mu)}$, abgeleitet worden. Um nun diesen Systemsbegriff als in sich widerspruchsfrei zu erkennen, ist noch zu zeigen, dass man nur zu denselben Curven gelangt, wenn man sie aus irgend einer andern Curve des Systems ableitet.

Zu dem Zwecke bemerke man, dass die Gruppe $\Gamma_{(2\varrho-\mu)(p-1)}$ von $(2\varrho-\mu)(p-1)$ Punkten, in welchen eine $X^{(2\varrho-\mu)}$ berührt, zu der Gruppe $G_{\mu(p-1)}$ von $\mu(p-1)$ Punkten, aus welchen die erstere nach I. abgeleitet ist, *sowohl residual als corresidual* ist. Denn die beiden Gruppen sind einander residual, insofern, als sie zusammen die Verschwindungspunkte einer $\Phi^{(\varrho)}$ sind*); und corresidual, weil die Gruppe $G_{\mu(p-1)}$ zu sich selbst residual ist, indem sie, doppelt gerechnet, die Verschwindungspunkte der $X^{(\mu)}$ liefern. Ebenso ist irgend eine weitere Gruppe $\Gamma_{(2\sigma-\mu)(p-1)}$, die aus der $G_{\mu(p-1)}$ durch eine $\Phi^{(\sigma)}$ abgeleitet ist, dieser Ableitung nach zur Gruppe $\Gamma_{(2\varrho-\mu)(p-1)}$ corresidual, und ferner, da sie zu sich selbst residual ist, auch zur $\Gamma_{(2\varrho-\mu)(p-1)}$ residual; d. h. es existirt auch eine $\Phi^{\left(\sigma+\varrho-\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$, welche durch diese beiden Gruppen hindurchgeht, w. z. b. w.

§ 7.

Beziehungen zwischen den Systemen der $X^{(\mu)}$.

Aus dem am Schlusse des § 6. entwickelten Begriffe ergiebt sich sogleich eine Reihe von Sätzen über den Zusammenhang der verschiedenen Systeme, von denen ich nur die wichtigsten hervorheben will:

III. *Gehören $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$ demselben Systeme, $X^{(\lambda)}$ aber irgend einem weiteren System an, so gehören die beiden Berührungscurven $X^{(\lambda)}X^{(\mu)}$, $X^{(\lambda)}X^{(\nu)}$ ebenfalls einem und demselben Systeme an.*

Denn damit zwei Berührungscurven einem und demselben Systeme angehören, ist nur nöthig, dass die beiden Gruppen ihrer Berührungspunkte einander corresidual sind. Da dieses nun bei den beiden Gruppen, in welchen $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$ berühren, der Fall sein soll, so findet dasselbe auch bei den Gruppen statt, in welchen $X^{(\lambda)}X^{(\mu)}$ und $X^{(\lambda)}X^{(\nu)}$ berühren; denn diese Gruppen unterscheiden sich von den früheren nur um eine *feste* Gruppe, in welcher $X^{(\lambda)}$ berührt.

Man sieht hieraus, dass, wenn man die Curven eines Systems

$$X^{(\mu)},\ X^{(\nu)},\ \ldots$$

mit den Curven eines zweiten Systems

$$X'^{(\mu)},\ X'^{(\nu)},\ \ldots$$

zu neuen Berührungscurven

---

*) Dieser Begriff des „Residualen" ist nicht genau derjenige, welcher in den Math. Ann. VII gegeben ist und welcher sich auf die Schnittpunkte blos „adjungirter" Curven bezieht. Aber die vorhergehenden Paragraphen haben gezeigt, dass der Restsatz auch für die Curven $\Phi^{(\varrho)}$ genau in derselben Form gilt, wie für die rein adjungirten Curven.

$$X^{(\mu)}X'^{(\mu)},\quad X^{(\nu)}X'^{(\nu)},\ \ldots$$

zusammensetzen will, man immer *dasselbe* System erhält, gleichgültig welche Curve des ersten Systems man an Stelle von $X^{(\mu)}$ nimmt, etc. Bildet man aus zwei Curven des ersten Systems allein die Curve

$$X^{(\mu)}X^{(\nu)},$$

so gehört dieselbe mit $(X^{\mu})^2$ zum selben System, also zum „uneigentlichen“ System.

Man erhält indess schon alle überhaupt existirenden Systeme nach folgendem Satze:

IV. *Es giebt keine weiteren Systeme, als eine endliche Anzahl von Systemen der $X^{(3)}$ und eine endliche Anzahl von Systemen der $X^{(2)}$. Alle Berührungscurven $X^{(2\mu+1)}$ gehören mit Curven $X^{(3)}$, alle $X^{(2\mu)}$ mit Curven $X^{(2)}$ zu Systemen zusammen.*

Sei nämlich eine $X^{(2\mu+1)}$ gegeben. Diese Curve berührt in $(2\mu+1)(p-1)$ Punkten; aber durch diese Gruppe kann man immer eine $\Phi^{(\mu+2)}$ legen, da es eine $\infty^{2(\mu+2)(p-1)-p}$-Schaar dieser Curven giebt, durch die Gruppe also jedenfalls noch ∞^{2p-3} der $\Phi^{(\mu+2)}$ gehen. Eine solche Curve $\Phi^{(\mu+2)}$ verschwindet dann noch für $3(p-1)$ Punkte, in welchen eine $X^{(3)}$ berührt, die mit $X^{(2\mu+1)}$ zum selben System gehört.

Sei ferner eine $X^{(2\mu)}$ gegeben, die in einer Gruppe von $2\mu(p-1)$ Punkten berührt. Da es von den Curven $\Phi^{(\mu+1)}$ eine $\infty^{2(\mu+1)(p-1)-p}$-Schaar giebt, kann man durch diese Gruppe noch wenigstens ∞^{p-2} der $\Phi^{(\mu+1)}$ legen, und eine solche Curve verschwindet dann noch in $2(p-1)$ Punkten, in welchen eine $X^{(2)}$ berührt, die mit der $X^{(2\mu)}$ zum selben System gehört.

Nimmt man nun von den $3(p-1)$ Berührungspunkten einer $X^{(3)}$ $3(p-1)-p=2p-3$ derselben willkürlich, aber nicht speciell gelegen, an, so ist die $X^{(3)}$ auf eine *endliche* Anzahl von Weisen bestimmt, da es, wie wir in II. gesehen haben, genau ∞^{2p-3} solcher Gruppen von $3p-3$ Punkten giebt. Diese verschiedenen $X^{(3)}$, mit denselben $2p-3$ Berührungspunkten, gehören ebenso vielen verschiedenen Systemen an, da es nicht möglich ist, durch die Berührungspunkte zweier solcher $X^{(3)}$ eine $\Phi^{(3)}$ zu legen; und die sich so ergebenden Systeme von $X^{(3)}$ sind alle existirenden.

Diese Systeme der $X^{(3)}$ zerfallen nun weiter in zwei Hauptarten: je nachdem durch die $3(p-1)$ Berührungspunkte einer solcher $X^{(3)}$ eine $\Phi^{(2)}$ nicht geht, oder eine $\Phi^{(2)}$ hindurchgeht. Ich unterscheide dementsprechend die Systeme als solche *erster Art* und solche *zweiter Art.* Im zweiten Falle gehört die $X^{(3)}$ mit einer in $p-1$ Punkten berührenden $X^{(1)}$ zum selben System, und umgekehrt gehören nach IV. alle $X^{(1)}$ zu Systemen $X^{(3)}$. Da die Mannigfaltigkeit der Schaar der $X^{(1)}$, die zu *einem* Systeme gehören, auch eine unendliche sein kann,

so kann man die Systeme der zweiten Art auch noch in *Unterarten* theilen, je nachdem die zugehörige Schaar der $X^{(1)}$ die Mannigfaltigkeit ∞^0, ∞^1, ∞^2, etc. hat. Die Anzahlen der verschiedenen Systeme in diesen Unterarten seien bez. mit $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, ... bezeichnet; ebenso die Anzahl der Systeme erster Art mit R.

Wir bemerken dabei, dass nach der Theorie der Abel'schen Functionen die R, $R^{(1)}$, $R^{(3)}$, ... Systeme zu *einer* Art zusammengefasst werden, und die $R^{(0)}$, $R^{(2)}$, $R^{(4)}$, ... Systeme zu einer zweiten Art (vgl. Weber, Math. Ann. XIII).

Nimmt man ebenso von den $2(p-1)$ Berührungspunkten einer eigentlichen (nicht aus einer doppelt zählenden $\Phi^{(1)}$ bestehenden) $X^{(2)}$ $p-2$ derselben willkürlich und allgemein an, so ist auch die $X^{(2)}$ auf eine *endliche* Zahl von Weisen bestimmt, da es nach II. genau ∞^{p-2} solcher Gruppen von $2(p-1)$ Punkten giebt. Die verschiedenen $X^{(2)}$, mit denselben $p-2$ Berührungspunkten, gehören dann ebensovielen *verschiedenen* eigentlichen Systemen an, da eine $\Phi^{(2)}$, sobald sie durch die $p-2$ Punkte doppelt und durch die übrigen Berührungspunkte einer $X^{(2)}$ gehen soll, schon mit dieser $X^{(2)}$ identisch wird. Man erhält auf diese Weise *alle* eigentlichen Systeme von $X^{(2)}$.

Die Anzahl der sich so ergebenden eigentlichen Systeme von $X^{(2)}$ sei N.

Offenbar erhält man jedes dieser N Systeme auch durch Combinationen zu 2 von Systemen der $X^{(3)}$. Denn verbindet man eine $X^{(2)}$ z. B. mit irgend einer $X^{(1)}$, so bildet $X^{(2)} \cdot X^{(1)}$ eine $X^{(3)}$, und $X^{(2)}$ gehört zum selben System, wie die $X^{(1)}X^{(3)}$. Es genügt daher jedenfalls, die Systeme der $X^{(3)}$ zu kennen, um hieraus alle Systeme abzuleiten. — Da ferner ein Theil der N Systeme der $X^{(2)}$ schon durch Combination der $R^{(0)}$ Systeme der $X^{(3)}$, ein Theil durch Combination der $R^{(1)}$ Systeme der $X^{(3)}$, etc., sich ergeben wird, so zerfallen auch die N Systeme in *Unterarten.* Ebenso zerfallen auch die R Systeme *erster* Art der $X^{(3)}$ in Unterarten, je nachdem man ein solches System aus drei der $R^{(0)}$, bezüglich drei der $R^{(1)}$ etc. Systeme der $X^{(3)}$ combiniren kann.

Diese Betrachtungen seien nochmals in dem Satze zusammengefasst:

V. *Die Systeme $X^{(3)}$ zerfallen in zwei Arten: ein System der ersten Art besteht nur aus solchen Curven $X^{(3)}$, durch deren Berührungspunkte kein $\Phi^{(3)}$ geht; ein System der zweiten Art aus solchen, durch deren Berührungspunkte eine $\Phi^{(2)}$ gelegt werden kann. Zu einem System der zweiten Art gehört immer eine Berührungscurve $X^{(1)}$ oder eine Schaar solcher; und je nach der Mannigfaltigkeit dieser Schaar hat man wieder Unterarten der zweiten Art.*

Die Systeme der $X^{(2)}$ zerfallen ebenfalls in zwei Arten: die eine

Art enthält nur das eine uneigentliche System $(\Phi^{(1)})^2$ — *und die entsprechenden* $X^{(2\mu)}$ *sind identisch mit den Curven* $(X^{\mu})^2$ —; *die andere Art enthält alle übrigen, eigentlichen Systeme* $X^{(2)}$. *Alle Systeme lassen sich durch Combinationen von Systemen der* $X^{(3)}$ *ableiten.*

§ 8.

Specielle Fälle für die Berührungscurven $X^{(\mu)}$.

1. An Stelle der in der Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan auftretenden Berührungscurven, bei denen ein Punkt der Grundcurve ausgezeichnet ist, sind nach der hier angenommenen Auffassung folgende Curven zu setzen:

Sei a_0 ein Punkt der Grundcurve und φ_0 eine Curve φ, die in a_0 berührt; diese Curve φ verschwindet dann noch für $2p-4$ weitere Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_{2p-4}$. Man betrachte nun alle Berührungscurven $X^{(3)}$, welche in den Punkten $a_0, a_1, \cdots, a_{2p-4}$, sowie in p weiteren Punkten berühren. Dieselben bestehen aus der Curve φ_0, verbunden mit den $\Psi^{(2)}$, welche durch $a_1, a_2, \cdots, a_{2p-4}$ gehen und noch in p weiteren Punkten berühren:

$$X^{(3)} \equiv \varphi_0 \cdot \Psi^{(2)}.$$

Die beiden Arten von Systemen von $X^{(3)}$ drücken sich nun hier so aus: bei der *ersten* Art giebt es keine $\Phi^{(2)}$, welche durch die Punkte $a_0, a_1, \cdots, a_{2p-4}$, sowie die p Berührungspunkte der $\Psi^{(2)}$, hindurchgeht; d. h., da nach dem ersten Beweise im § 3. eine $\Phi^{(2)}$, die durch die Punkte $a_0, a_1, \cdots, a_{2p-4}$ der φ_0 hindurchgelegt ist, zugleich noch durch den letzten Verschwindungspunkt der φ_0, nämlich wiederum a_0, hindurchgehen müsste, während dann durch die übrigen $p-1$ Punkte immer eine φ ginge: bei der *ersten* Art fällt keiner der p Berührungspunkte der $\Psi^{(2)}$ in den Punkt a_0.

Bei der *zweiten* Art muss dagegen nothwendig einer der p Berührungspunkte der $\Psi^{(2)}$ in den Punkt a_0 fallen und diese Curve selbst besteht aus φ_0, verbunden mit irgend einer der in $p-1$ Punkten berührenden $X^{(1)}$:

$$X^{(3)} \equiv \varphi_0^2 \cdot X^{(1)}.$$

2. Eine Curve $\Psi^{(\mu)}$, welche in einer Anzahl von Punkten *einfach* verschwindet, in einer weiteren Anzahl von Punkten aber doppelt, d. h. in der ersten Ordnung berührt, lässt sich *für sich* auf keine Weise in eines der angegebenen Systeme von Berührungscurven einreihen; und man kann die Curven dieser Art nicht einmal nach analogen Systemen anordnen, so dass diese Anordnung einen invarianten Charakter erhält. Sobald man aber zwei Curven $\Psi^{(\mu)}$, $\Psi^{(\nu)}$ zusammennimmt, welche *in denselben einfachen Punkten verschwinden*, deren weitere *Berührungspunkte* aber verschieden sein können, erhält man

eine völlig bestimmte Zuordnung zu einem der in § 6., 7. angegebenen Systeme von $X^{(3)}$ oder der Systeme von $X^{(2)}$. In der That stellt eine solche Curve

$$\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)}$$

eine Berührungscurve $X^{(\mu+\nu)}$ vor, die eine bestimmte Zuordnung hat. Ist insbesondere $\nu = \mu$, so hat man in

$$\psi^{(\mu)}\, \psi'^{(\mu)},$$

wo $\psi^{(\mu)}$ und $\psi'^{(\mu)}$ die einfachen Verschwindungspunkte gemein haben, eine Curve $X^{(2\mu)}$, welche entweder einem der N Systeme von $X^{(2)}$ zugeordnet ist, oder speciell dem uneigentlichen Systeme, wenn sie sich in die Form setzen lässt

$$(\Phi^{(\mu)})^2.$$

In dasselbe System, wie $\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)}$ gehört auch die algebraische Function

$$\frac{\psi^{(\nu)}}{\psi^{(\mu)}},$$

die sich von der vorhergehenden nur um den Factor $(\psi^{(\mu)})^2$, welcher dem uneigentlichen System angehört, unterscheidet.

Ersetzt man nämlich die beiden Curven $\psi^{(\mu)}$ und $\psi^{(\nu)}$, welche die Verschwindungspunkte α gemein haben sollen, während $\psi^{(\mu)}$ ausserdem in den Punkten γ, $\psi^{(\nu)}$ in den Punkten δ berühre, nach dem Restsatze (diese Ann. VII, p. 271) durch die beiden Curven $\psi^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho+\nu-\mu)}$, welche die Verschwindungspunkte β gemein haben sollen, während $\psi^{(\varrho)}$ ausserdem noch in den Punkten γ, $\psi^{(\varrho+\nu-\mu)}$ in den Punkten δ berühre, so hat man

$$\psi^{(\nu)}\, \psi^{(\varrho)} - \psi^{(\mu)}\, \psi^{(\varrho+\nu-\mu)} = 0,$$

und die beiden Functionen

$$\frac{\psi^{(\nu)}}{\psi^{(\mu)}} \quad \text{und} \quad \frac{\psi^{(\varrho+\nu-\mu)}}{\psi^{(\varrho)}}$$

sind ganz identisch. Aber die beiden Berührungscurven

$$\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \psi^{(\varrho)} \cdot \psi^{(\varrho+\nu-\mu)}$$

gehören zum selben System, weil durch ihre Berührungspunkte eine $\varphi^{(\nu+\varrho)}$ geht, nämlich die Curve $\psi^{(\nu)} \cdot \psi^{(\varrho)}$, d. h. weil

$$[\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)}] \cdot [\psi^{(\varrho)} \cdot \psi^{(\varrho+\nu-\mu)}] - [\psi^{(\nu)} \cdot \psi^{(\varrho)}]^2 = 0.$$

3. Die in § 6. zur Definition von Systemen von Berührungscurven $X^{(\mu)}$ angegebenen Operationen lassen sich auch direct auf blos *adjungirte* Curven (Math. Ann. VII) anwenden. Man erhält dann ebenfalls Beziehungen zwischen Schaaren von solchen berührenden adjungirten Curven. Aber einmal wird der Ausdruck dieser Be-

ziehungen dann von einem nicht invarianten Elemente, der Ordnung der Grundcurve, abhängig; sodann kann man auch nicht allgemein angeben, ob sich diese Curven zu reinen Berührungscurven $X^{(\mu)}$ ergänzen lassen und somit ihre Zuordnung zu den Systemen der §§ 6., 7. gegeben ist, oder ob dieselben nur zu den Curven $\Psi^{(\mu)}$ in (2) § 8. gehören. Das Erstere wird nur für die adj. Curven der Ordnung $n-3+2\sigma$ immer stattfinden, wie nachher gezeigt wird, sowie in speciellen Fällen, z. B. wenn die Grundcurve von der Form (3), § 5.

Sei hier f die Grundcurve n^{ter} Ordnung, $\Psi_{(r)} X_{(r)}$ etc. adjungirte Curven r^{ter} Ordnung.

Die Curve $X_{(r)}$ möge nun $f=0$ in allen Punkten α, wo sie f trifft, in der ersten Ordnung berühren, die singulären Punkte von f ausgenommen, wo $X_{(r)}$ blos adjungirt ist. Damit dieses überhaupt möglich ist, muss $n \cdot r$ gerade sein. Legt man durch die Punkte α eine adjungirte Curve $\Psi_{(s)}$, so hat man nach dem Restsatze, vermöge $f=0$:

$$(1) \qquad \Psi_{(s)}^{2} - X_{(r)} X_{(2s-r)} = 0,$$

wo auch $X_{(2s-r)}$ eine adjungirte Curve wird. Ferner zeigt diese Relation, dass $X_{(2s-r)}$ in den weiteren Schnittpunkten β von $\Psi_{(s)}$ mit f die Grundcurve f berührt. *Wenn* man also $X_{(r)}$ einem bestimmten System von Berührungscurven zugeordnet hatte, so wird man auch $X_{(2s-r)}$ demselben System zuzuordnen haben, und man hat, dem Satze I., § 6. analog:

Legt man durch die Berührungspunkte einer adjungirten $X_{(r)}$ irgend eine adjungirte $X_{(s)}$, so berührt in den übrigen Verschwindungspunkten der $X_{(s)}$ eine adj. $X_{(2s-r)}$, vom selben System, dem $X_{(r)}$ eventuell zugeordnet war. Für zwei solche Curven ist also jedenfalls die Summe der Ordnungen gerade. Die Gruppen von Berührungspunkten derjenigen Curven $X_{(r)}$, welche gleiches r haben und zum selben System gehören, bilden die ganze corresiduale lineare Schaar, die zugleich irgend einer Gruppe dieser Schaar residual ist.

Ich betrachte nun speciell eine adjungirte Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $X_{(n-1)}$; welche f in $n+p-1$ Punkten α berühre. Sei F eine Curve der Ordnung $\mu(n-3)-1$, welche jeden i-fachen Punkt der Grundcurve f zum $\mu(i-1)$-fachen Punkt besitze; Curven, die immer existiren, wenn man nur μ genügend gross nimmt. Dann stellt die Curve

$$(2) \qquad (F)^2 \cdot X_{(n-1)}$$

eine Curve $X^{(2\mu+1)}$ (§ 6.) vor, welche in den Punkten α und in den Schnittpunkten von F mit f berührt. Diese Curve (2) hat eine ganz bestimmte Zuordnung zu einem der Systeme der §§ 6., 7., welche auch

dadurch nicht geändert wird, dass man die Curve F beliebig variirt; denn setzt man

(3) $$(F'^2) \cdot X_{(n-1)}$$

an Stelle von (2), so geht durch die Berührungspunkte von (2) und (3) die $\Phi^{(\mu)}$-Curve $F \cdot F' \cdot X_{\nu-1}$.

Gehören nun nach Formel (1) dieser Nummer, für $r = n - 1$, $s = n + \sigma - 1$

$$X_{(n-1)} \text{ und } X_{(n-1+2\sigma)}$$

zum selben System, so gehören auch

$$(F)^2 \cdot X_{(n-1)} \text{ und } (G)^2 \cdot X_{(n-1+2\sigma)}$$

nach § 6. zum selben System, wo G eine adj. Curve der Ordnung $\nu(n-3) - (\sigma+1)$, welche jeden i-fachen Punkt von f zum $\nu(i-1)$-fachen Punkt hat; denn aus (1) folgt sogleich auch:

$$[F \cdot G \cdot \Psi_{(n+\sigma-1)}]^2 - [(F)^2 \cdot X_{(n-1)}] \cdot [(G)^2 \cdot X_{(n-1+2\sigma)}] = 0.$$

Daher hat man die adjungirten Berührungscurven $X_{(n-1)}$, allgemeiner die adjungirten Berührungscurven $X_{(n-1+2\sigma)}$, ganz bestimmten, in § 6. und § 7. bezeichneten Systemen von Berührungscurven $X^{(2\mu+1)}$ oder $X^{(3)}$, zuzuordnen, nämlich $X_{(n-1+2\sigma)}$ demselben System, welchem die oben bezeichnete Curve $(G)^2 \cdot X_{(n-1+2\sigma)}$ angehört.

Den Systemen $X^{(2)}$ ist das Product oder der Quotient aus zweien solchen adjungirten $X_{(n-1+2\sigma)}$, $X_{(n-1+2\tau}$ zuzuordnen.

4. Der letzte Theil des vorigen Satzes führt dazu, noch weitere specielle Curvenschaaren anzugeben, welche den Systemen $X^{(2)}$ der §§ 6., 7. zuzuordnen sind. Sei

$$K_{2(n-3)+2\sigma}$$

eine Curve der Ordnung $2(n-3)+2\sigma$, welche jeden i-fachen Punkt a der Grundcurve f (n^{ter} Ordnung) zum i-fachen Punkte besitzt, jeden der i Zweige von f in a noch in $i-2$ *weiteren* Punkten trifft (also z. B. in a einen $2(i-1)$-fachen Punkt hat), und f in allen weiteren Schnittpunkten in der ersten Ordnung *berührt*. Für diese Curven kann man dann eine der Formel (1) von Nr. 3. dieses Paragraphen analoge Formel und folglich einen analogen Satz, wie den ersten dieser Nr. 3., ableiten. — Wenn dann H eine Curve der Ordnung $(\mu-1)(n-3)-\sigma$ bedeutet, welche jeden i-fachen Punkt a von f zum $(\mu-1)(i-1)$-fachen Punkt hat, so erhält man in

$$(H)^2 \cdot K_{2(n-3+\sigma)}$$

eine Curve $X^{(2\mu)}$, welche einem bestimmten System der $X^{(2)}$ angehört, und diesem selben System kann man schon die Curve $K_{2(n-3+\sigma)}$ allein zuordnen.

Das am Schlusse der Nr. 3. angegebene Product $X_{(n-1+2\sigma)} \cdot X_{(n-1+2\tau)}$ ist ein specieller Fall der Curve K. Sobald überhaupt K in das Product zweier adjungirter Curven $L \cdot M$ zerlegbar ist, welche ihre *einfachen* Schnittpunkte mit f gemeinsam haben müssen, die Berührungspunkte dagegen verschieden haben können, gehört auch $\frac{M}{L}$ in dasselbe System, wie K selbst.

Unter die in 3. und 4. dieses Paragraphen angegebenen speciellen Fälle der $X^{(\mu)}$ sind alle bisher behandelten Schaaren von in erster Ordnung berührenden Curven zu subsumiren, und dieselben sind daher nach den hier gegebenen Principien in die Systeme einzuordnen.

Mannheim, im August 1880.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

A. V. Bäcklund in Lund.

Es ist, wie ich glaube, zum ersten Male von Lie in einer Note in den Gött. Nachrichten für 1872, Nr. 25, bemerkt worden, dass eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und einer unbekannten Function z unter Umständen eine vollständige Lösung besitzen kann, die durch zwei oder drei oder vier ... Gleichungen zwischen $z, x_1, x_2, \cdots, x_n$ und n willkürlichen Constanten auszudrücken ist. Ein Weg zur Ermittelung einer solchen Lösung einer derartigen partiellen Differentialgleichung 1. O. wird auch in der nämlichen Note von Lie angegeben, aber eine eingehende Discussion der betreffenden Differentialgleichungen ist meines Wissens noch nicht unternommen worden. Und doch ist eine Charakterisirung jener Gleichungen, wenn nicht aus anderen Gründen, wenigstens deshalb wichtig, weil sie lehrt, von einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 1. O. durch Differentiationen und Eliminationen allein zu entscheiden, ob sie eine durch zwei oder eine durch drei oder durch mehrere Gleichungen zwischen $z, x_1, x_2, \cdots, x_n$ ausdrückbare Lösung besitzt. Zu den folgenden auf eine nähere Charakterisirung der fraglichen Differentialgleichungen abzielenden Ueberlegungen bin ich zum Theil durch meine in diesen Annalen veröffentlichten Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung veranlasst worden, wie aus mehreren Stellen im Folgenden erhellen dürfte; jedoch haben die folgenden Ueberlegungen so wenige Berührungspunkte mit jenen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung gemein, dass zu ihrem Verständniss die Kenntniss der letzteren nicht nothwendig ist.

Freilich werde ich nur die Fälle $n = 3$, $n = 4$ behandeln, und ausführlich nur diejenigen partiellen Differentialgleichungen 1. O. zwischen drei Variablen x_1, x_2, x_3 und der unbekannten Function z besprechen, die eine durch zwei Gleichungen zwischen z, x_1, x_2, x_3 ausgedrückte Lösung gestatten, aber Alles, was für diese Fälle ent-

wickelt wird und auf die Charakterisirung der genannten partiellen Differentialgleichungen hinausläuft (insbes. § 1., Nr. 7, § 6.), lässt sich ohne Mühe auf die Fälle $n = 5$, $n = 6$, etc. ausdehnen.

§ 1.

Ueber die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des Raumes von vier Dimensionen, die ein erst durch zwei Gleichungen ausdrückbares Integral besitzen.

1. Wenn die Variablen z, x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes von vier Dimensionen interpretirt werden, so stellt jede Gleichung zwischen z, x_1, x_2, x_3 eine Punktmannigfaltigkeit von drei Dimensionen und jedes System von zwei Gleichungen zwischen denselben Grössen eine Punktmannigfaltigkeit von zwei Dimensionen in diesem Raume dar. Betrachten wir irgend eine Punktmannigfaltigkeit von zwei Dimensionen in diesem Raume, kurzgesagt eine $M_2{}^0$ dieses R_4:

$$z = f(x_2, x_3), \quad x_1 = \varphi(x_2, x_3),$$

und bezeichnen wir durch p_1, p_2, p_3 derart gewählte Parameter einer Tangentenebene derselben in einem Punkte (z, x_1, x_2, x_3), dass die Gleichung jener Ebene wird:

$$\text{(a)} \qquad \zeta - z = p_1(\xi_1 - x_1) + p_2(\xi_2 - x_2) + p_3(\xi_3 - x_3),$$

so finden wir leicht, dass alle die Punkte der $M_2{}^0$, die dem Punkte $(z x_1 x_2 x_3)$ unendlich benachbart sind, in der Axe eines ganzen Büschels von Tangentenebenen liegen. Man hat nämlich für jene Punkte die Gleichungen:

$$dz - df = 0, \quad dx_1 - d\varphi = 0,$$

oder, wenn man p, q, p', q' resp. statt $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ schreibt, kurz:

$$\text{(a')} \qquad dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3 = 0$$

für alle diejenigen Werthe von p_1, p_2, p_3, *die den beiden Relationen:*

$$\text{(1)} \qquad p_2 = p - p'p_1, \quad p_3 = q - q'p_1$$

Genüge leisten. Wenn, wie gewöhnlich, der Inbegriff derjenigen Punkte der Ebene (a), die dem Punkte (zx) unendlich benachbart sind, — und die auch allen Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen $(M_3{}^0)$, welche die Ebene im Punkte (zx) berühren, gemeinsam sind, — als Flächenelement bezeichnet wird, so können wir sagen, dass alle einem Punkte (zx) einer $M_2{}^0$ unendlich benachbarten Punkte derselben $M_2{}^0$ den Schnitt zweier und somit einfach unendlich vieler Flächenelemente bilden. Einen jeden solchen Inbegriff von unendlich naheliegenden Punkten einer $M_2{}^0$ dürfen wir als Element der $M_2{}^0$ auffassen; die

verschiedenen Elemente unterscheiden sich durch die Werthe ihrer Parameter $(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$, in derselben Weise wie die Flächenelemente des Raumes durch ihre Parameterwerthe $(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ sich unterscheiden. *Ein jedes Element* $(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$ *ist,* wie eben gezeigt, *der Schnitt von zwei und somit von einfach unendlich vielen Elementen* $(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$.

2. Jedem Punkte einer M_2^0 wird hiernach ein ganz bestimmtes Element $(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein ganz bestimmter Büschel (1) von Flächenelementen $(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ zugeordnet. Die Gleichungen (1) repräsentiren aber, wenn p_1, p_2, p_3 als Punktcoordinaten eines Raumes von drei Dimensionen gedeutet werden, eine Gerade in diesem Raume, den ich im Folgenden mit R_3' bezeichnen werde. Demgemäss können wir die eben gemachte Bemerkung auch so ausdrücken: *jedem Punkte einer* M_2^0 *des Raumes* R_4 *wird eine Gerade des Raumes* R_3' *zugeordnet.* Die Grössen p, q, p', q' haben wir als Coordinaten dieser Geraden aufzufassen.

Einfach unendlich viele M_2^0 erzeugen eine M_3^0. Unter zweifach unendlich vielen M_2^0 giebt es also im Allgemeinen wenigstens eine, die durch einen beliebig gewählten Punkt des R_4 hindurchgeht. *Jedem Punkte des* R_4 *wird daher vermittelst einer zweifach unendlichen Schaar von* M_2^0 *eine Gerade in* R_3' *zugeordnet. Durch Schaaren von dreifach, vierfach, fünffach unendlich vielen* M_2^0 *wird jedem beliebigen Punkte des* R_4 *eine einfach, zweifach resp. dreifach unendliche Schaar von Geraden in* R_3', *d. h. eine Linienfläche, eine Congruenz resp. ein Complex von Geraden zugeordnet.*

3. Die Gleichung in Punktcoordinaten p_1, p_2, p_3 derjenigen Linienfläche in R_3', welche die dreifach unendlich vielen M_2^0:

$$(2) \qquad z = f(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu), \qquad x_1 = \varphi(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu),$$

(wo λ, μ, ν variable Parameter bezeichnen)

dem Punkte (z, x_1, x_2, x_3) zuordnen, und die, nach dem Obigen, durch Elimination von λ, μ, ν zwischen den Gleichungen (2) und den Gleichungen

$$p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \qquad p_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

(d. i. den Gleichungen (1)) erhalten wird, sei die folgende:

$$(3) \qquad F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0;$$

durch sie werden auch, wenn man $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ als Parameter der Flächenelemente in R_4 auffasst, alle diejenigen Flächenelemente dieses Raumes R_4 angegeben, die sich an die vorgelegten dreifach unendlich vielen M_2^0 (2) anschliessen (so dass jedes derselben ∞^1 (unendlich nahe liegende) Punkte mit einer dieser M_2^0 gemein hat).

In Folge dessen wird die Gleichung (3) eine solche partielle Differentialgleichung 1. O. des Raumes R_4, welche die M_2^0 (2) als Integrale besitzt. *Eine erste Bedingung für eine partielle Differentialgleichung 1. O.: $F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$, welche eine vollständige Lösung besitzen soll, die sich geometrisch durch ∞^3 M_2^0 darstellt, ist daher die, dass die Differentialgleichung, falls z, x_1, x_2, x_3 als (beliebige) Constanten, p_1, p_2, p_3 als Coordinaten der Punkte in R_3' interpretirt werden, eine Linienfläche in R_3' repräsentiren muss.*

Indem man zwei von den Grössen p_1, p_2, p_3, etwa p_2, p_3, aus den Gleichungen (1) und (3) eliminirt, muss daher, falls die Gleichung (3) nicht linear in den p, aber dennoch eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit ∞^3 Integral-M_2^0 sein soll, eine Gleichung von der Form resultiren:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') + \alpha\varphi(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') \\ + \beta\psi(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') = 0,$$

wo nur α, β von p_1 abhängen. Das System der Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

stellt in den Liniencoordinaten p, q, p', q' die durch die Gleichung (3) in den Punktcoordinaten p_1, p_2, p_3 ausgedrückte Fläche des R_3' dar. Dass für diese Darstellung der Fläche drei Gleichungen erfordert werden, zeigt an, dass die Fläche geradlinig, aber keine Ebene ist.

4. Drei Gleichungen zwischen den Liniencoordinaten p, q, p', q' bestimmen immer eine Linienfläche, wie auch die Gleichungen unter sich beschaffen sein mögen. Man erhält die Gleichung derselben Fläche in Punktcoordinaten p_1, p_2, p_3 durch blosse Elimination von p, q, p', q' zwischen jenen drei Gleichungen und den Gleichungen (1). Aber eine so erhaltene Gleichung: $F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$, die drei beliebig gewählten Gleichungen:

$$\begin{aligned} &f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') = 0, \\ &\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ &\psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{aligned}$$

äquivalent ist, so dass sie geometrisch für alle Werthe von z, x_1, x_2, x_3 eine Linienfläche repräsentirt, hat im Allgemeinen keine durch ∞^3 M_2^0: $z = F(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$, $x_1 = \Phi(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$ darstellbare Lösung, sogar im Allgemeinen keine einzige Integral-M_2^0. Soll nämlich eine Integral-M_2^0 vorhanden sein, so müssen die angegebenen drei Gleichungen zwischen p, q, p', q', wenn man für diese Grössen setzt resp. $\frac{\partial z}{\partial x_2}$, $\frac{\partial z}{\partial x_3}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$, von Werthen von z, x_1 von der Form:

$z = F(x_2, x_3)$, $x_1 = \Phi(x_2, x_3)$ befriedigt werden. Diese zwei Gleichungen müssten die Integral-M_2^0 darstellen. Ebenso würde eine dreifach unendliche Schaar von Integral-M_2^0, die eine vollständige Lösung bildete, von einem Gleichungspaare: $z = F(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$, $x_1 = \Phi(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$ mit drei arbiträren Constanten λ, μ, ν bedingt, durch welches den genannten drei partiellen Differentialgleichungen für z, x_1 identisch genügt würde.

Soll also die nicht-lineare Gleichung (3) ∞^3 *Integral-*M_2^0 (2) *besitzen, so müssen die Gleichungen* (4), *als partielle Differentialgleichungen für* z, x_1 *aufgefasst, eine gemeinsame Lösung* (2) *mit drei arbiträren Constanten gestatten.*

§ 2.

Partielle Differentialgleichungen der obigen Art, welche in R_3' Linienflächen darstellen, die zu einer beliebig gegebenen Congruenz gehören.

5. Ich werde mich hier vornehmlich mit dem Gleichungssysteme:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') = 0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad) = 0,$$

wo $f = 0$, $\varphi = 0$ ganz beliebig gewählt sind, beschäftigen, und zunächst zeigen, dass dasselbe immer unendlichfach unendlich viele Lösungen:

$$z = F(x_2, x_3), \quad x_1 = \Phi(x_2, x_3),$$
$$p = F'(x_2), \quad q = F'(x_3), \quad p' = \Phi'(x_2), \quad q' = \Phi'(x_3)$$

besitzt. Statt x_1, x_2, x_3 werde ich jedoch hinfort schreiben z', x, y, wodurch p, q, p', q' partielle Differentialquotienten von z, z' nach x, y werden, und die vorgelegten zwei Gleichungen die Form erhalten:

$$(5) \qquad \begin{cases} f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad) = 0. - \end{cases}$$

Die Frage, ob es Functionen z, z' von x, y giebt, die diese Gleichungen erfüllen, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob es eine Function z' von x, y giebt, durch welche, wenn man sie in die Gleichungen einführt und zugleich für p', q' ihre partiellen Differentialquotienten in Bezug auf x, y setzt, die vorgelegten Gleichungen verwandelt werden in zwei solche partielle Differentialgleichungen 1. O. für z:

$$A(z, x, y, p, q) = 0, \quad B(z, x, y, p, q) = 0,$$

die eine gemeinsame Lösung: $z = F(x, y)$ besitzen. Und diese Frage erledigt sich auf die folgende Weise. Man stelle die Gleichungen auf:

(6) $$[f\varphi]_{zxp} = 0,^{*)}$$

(7) $$[f[f\varphi]]_{zxp} = 0, \quad [\varphi[f\varphi]]_{zxp} = 0,$$

von denen die letzteren, durch Elimination von z, p, q vermittelst (5) und (6) in zwei partielle Differentialgleichungen 3. O. für z' übergehen. Wenn diese zwei Gleichungen eine gemeinsame Lösung z' gestatten, — und ich werde gleich zeigen, dass sie das stets thun, — so ist diese Lösung eine Function z' der gesuchten Art; denn durch Substitution derselben in die Gleichungen (5), (6) erhalten diese, auf Grund der jetzigen Identitäten (7), den durch Elimination aus ihnen sich ergebenden Ausdruck für z in x, y als gemeinsame Lösung.

Aus den ersten Derivirten der Gleichungen (5) und (7) nach x, y setzen sich in linearer Weise die Gleichungen:

(8) $$\begin{aligned}&\Big[f\big[f[f\varphi]\big]\Big]_{zxp} = 0, \quad \Big[f\big[\varphi[f\varphi]\big]\Big]_{zxp} = 0,\\ &\Big[\varphi\big[\qquad\big]\Big]_{zxp} = 0, \quad \Big[\varphi\big[\qquad\big]\Big]_{zxp} = 0^{**)}\end{aligned}$$

zusammen. Aber auf Grund der Jacobi'schen Identität:

$$\begin{aligned}&\big[f[\varphi\psi]\big] + \big[\varphi[\psi f]\big] + \big[\psi[f\varphi]\big]\\ &= -\frac{\partial f}{\partial z}[\varphi\psi] - \frac{\partial\varphi}{\partial z}[\psi f] - \frac{\partial\psi}{\partial z}[f\varphi]^{***)}\end{aligned}$$

---

*) $$\begin{aligned}[f\varphi]_{zxp} = &\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + p'\frac{\partial f}{\partial z'} + r'\frac{\partial f}{\partial p'} + s'\frac{\partial f}{\partial q'}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial p}\\ &+\Big(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + q'\frac{\partial f}{\partial z'} + s'\frac{\partial f}{\partial p'} + t'\frac{\partial f}{\partial q'}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial q}\\ &-\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p'\frac{\partial\varphi}{\partial z'} + r'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + s'\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\Big)\frac{\partial f}{\partial p}\\ &-\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + q'\frac{\partial\varphi}{\partial z'} + s'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + t'\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\Big)\frac{\partial f}{\partial q}.\end{aligned}$$

Mit r', s', t' sind die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}$$

bezeichnet.

Allgemeiner:

$$[f\psi]_{zxp} = \frac{df}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{df}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d\psi}{dy}\frac{\partial f}{\partial q},$$

ψ eine beliebige Function von z, x, y, p, q, z', 1., 2., 3. etc. Differentialquotienten von z' in Bezug auf x, y.

**) Wegen (6) und (7) ziehen diese Gleichungen die folgenden nach sich:

$$\Big[[f\varphi]\,[f[f\varphi]]\Big]_{zxp} = 0, \quad \Big[[f\varphi]\,[\varphi[f\varphi]]\Big]_{zxp} = 0.$$

***) Sie ist in dieser Weise von Mayer (in d. A. Bd. IX, p. 370) formulirt worden.

erhält man, wenn $[f\varphi]$ statt ψ gesetzt wird, und überdies die Gleichungen (6) und (7) berücksichtigt werden:

$$\Big[f\big[\varphi[f\varphi]\big]\Big] = \Big[\varphi\big[f[f\varphi]\big]\Big]\cdot$$

Also reduciren sich die Gleichungen (8) auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen. Dennoch vertreten sie vollständig diejenigen Gleichungen, die durch Differentiation der aus den Gleichungen (7) hergeleiteten Gleichungen 3. O. für z' folgen, — denn die Gleichungen (8) sind durch Elimination von r, s, t [den zweiten Differentialquotienten von z] zwischen den ersten Derivirten von (5) und (7) hervorgegangen und werden daher, nach Substitution der oben angewandten aus (5), (6) zu bestimmenden Werthe von z, p, q den genannten Derivirten der Gleichungen für z' völlig äquivalent. Die ersten Derivirten der zwei Gleichungen 3. O. für z' reduciren sich also auf drei von einander unabhängige Gleichungen, d. i. zwischen den ersten Derivirten der Gleichungen für z' findet eine lineare Relation identisch statt.

Dann aber stehen die Gleichungen für z' in derselben Beziehung zu einander, wie zwei erste Integrale verschiedener Classen einer linearen partiellen Differentialgleichung 4. O., eine Beziehung, die ich in diesen Annalen Bd. XIII, p. 90—93 näher beschrieben habe. *Die zwei Gleichungen 3. O. für z' haben also ∞^{∞} Integrale: $z' = \Phi(x, y)$ gemein. Durch jeden Streifen von Elementen (z', x, y, p', q') geht eine einfach unendliche Schaar von Integralen.*

Ein jedes Integral $z' = \Phi(x, y)$ bestimmt, nach dem Obigen, eine einzige Function z von x, y, mit der es zusammen eine Lösung des Systems (5) bildet.

6. Den Gleichungen (5) kann man immer solche Gleichungen:

$$(9) \qquad \psi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0$$

hinzufügen, deren jede mit (5) eine dreifach unendliche Schaar von Lösungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ gemein hat. Es ist nämlich möglich, die Function ψ so zu bestimmen, dass es Werthe $z' = \Phi(x, y)$, $p' = \Phi'(x)$, $q' = \Phi'(y)$ giebt, die, in die Gleichungen (5), (9) eingeführt, diese zu drei solchen partiellen Differentialgleichungen 1. O. für z machen, die ein gemeinsames Integral: $z = F(x, y)$ besitzen. Denn hierfür ist nur erforderlich, dass die drei Gleichungen:

$$(10) \qquad [f\varphi]_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi]_{zxp} = 0, \quad [\psi f]_{zxp} = 0,$$

nachdem man aus ihnen vermittelst (5) und (9) z, p, q eliminirt hat, wodurch sie in drei partielle Differentialgleichungen 2. O. für z' übergehen, eine gemeinsame Lösung mit drei arbiträren Constanten zulassen. Und dass in der That ψ so bestimmt werden kann, dass dies eintrifft, zeigt sich folgendermassen:

Die ersten Derivirten der Gleichungen (10) sind, unter gehöriger Berücksichtigung jener Gleichungen selbst, äquivalent den Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{array}{lll} \big[f[f\varphi]\big]_{zxp}=0, & \big[f[\varphi\psi]\big]_{zxp}=0, & \big[f[\psi f]\big]_{zxp}=0, \\ \big[\varphi[\quad]\big]_{zxp}=0, & \big[\varphi[\quad]\big]_{zxp}=0, & \big[\varphi[\quad]\big]_{zxp}=0, \end{array}$$

und jedes Paar von unter einander stehenden Gleichungen zieht auf Grund von (10) respective nach sich:

$$\big[\psi[f\varphi]\big]_{zxp}=0,\quad \big[\psi[\varphi\psi]\big]_{zxp}=0,\quad \big[\psi[\psi f]\big]_{zxp}=0.$$

Aber nach der in der vorangehenden Nummer benutzten Jacobi'schen Identität ist die Gleichung $\big[f[\varphi\psi]\big]=0$ eine Folge von

$$\big[\varphi[\psi f]\big]=0 \quad\text{und}\quad \big[\psi[f\varphi]\big]=0.$$

Also reduciren sich die sechs Gleichungen (11) auf nur fünf. D. h. von den ersten Derivirten der Gleichungen (10), — diese Gleichungen als Gleichungen 2. O. für z' betrachtet, — ist die eine eine algebraische Folge der anderen. Daher drückt sich die Bedingung, dass jene ersten Derivirten von einem gemeinsamen Werthsysteme der dritten Differentialquotienten von z' befriedigt werden, durch eine einzige Gleichung aus. *Und diese Gleichung wird* — nachdem man die dritten Differentialquotienten von z' aus (11) eliminirt, und die Werthe von r', s', t', wie sie aus (10) hervorgehen, eingesetzt hat — *eine lineare partielle Differentialgleichung* 2. *Ordnung für* ψ. Als Variablen fungiren hierbei $z, z', x, y, p, q, p', q'$, die aber nur für sechs von einander unabhängige gelten, denn es bestehen ja die Gleichungen (5). — Wenn jene Gleichung für ψ durch die Gleichung (9) erfüllt wird, so haben die Gleichungen (10), in partielle Differentialgleichungen 2. O. für z' verwandelt, ∞^3 gemeinsame Integrale: $z'=\Phi(x,y)$. Denn im angenommenen Falle, wo die Gleichungen für die vier, jenen Gleichungen 2. O. zugehörenden dritten Differentialquotienten von z' auf nur vier Gleichungen sich reduciren, reduciren sich die Gleichungen für die fünf, denselben Gleichungen 2. O. zugehörenden vierten Differentialquotienten von z' auf nur fünf Gleichungen u. s. w. So dass jedem Elemente (z', x, y, p', q') ein einziges Werthsystem von r', s', t', 3., 4. etc. Differentialquotienten von z' zugeordnet wird. D. h. es giebt Flächen: $z'=\Phi(x,y)$, zu einer solchen Anzahl (∞^3), dass durch die Flächenelemente derselben alle (∞^5) Elemente (z', x, y, p', q') des Raumes $(z'xy)$ erfüllt werden.*)

*) Das Gleichungssystem:

$$dz'-p'dx-q'dy=0,\quad dp'-r'dx-s'dy=0,\quad dq'-s'dx-t'dy=0,$$

$(r', s', t'$ bestimmte Functionen von $x, y, z', p', q')$

Ein jedes Integral der linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ kann also als linkes Glied einer Gleichung (9) der geforderten Eigenschaft hinsichtlich der gegebenen, beliebig gewählten Gleichungen (5), gebraucht werden.

Eine jede der in dieser Weise bestimmten Gleichungen:

$$\psi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0$$

bildet mit den Gleichungen (5) *ein System* (4), *das eine partielle Differentialgleichung* 1. *O. in* R_4 *mit* ∞^3 *Integral*-$M_2{}^0$, *so wie in Nr.* 3., 4. *beschrieben ist, begründet.*

---

ist gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare:

$$(q'r' - p's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial q'} - s'\frac{\partial f}{\partial x} + r'\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$(p't' - q's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial p'} + t'\frac{\partial f}{\partial x} - s'\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

so dass die Möglichkeit, das erste System in der Form: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu)$, $p' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $q' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, zu integriren, auf der Existenz einer grösstmöglichen Zahl von gemeinsamen Lösungen (derselben Form) der beiden partiellen Differentialgleichungen 1. O. beruht.

Die Bedingung für die grösstmögliche Zahl gemeinsamer Lösungen:

$$A(Bf) - B(Af) = \lambda Af + \mu Bf$$

drückt sich in unserem Falle, wo

$$Af \equiv (q'r' - p's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial q'} - s'\frac{\partial f}{\partial x} + r'\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$Bf \equiv (p't' - q's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial p'} + t'\frac{\partial f}{\partial x} - s'\frac{\partial f}{\partial y},$$

durch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx}\right)(q's' - p't') + \left(\frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx}\right)(p's' - r'q') = 0,\\
&\left(\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx}\right)t' \qquad - \left(\frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx}\right)s' \qquad = 0,\\
&\left(\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx}\right)s' \qquad - \left(\frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx}\right)r' \qquad = 0
\end{aligned}$$

$\Big($der Kürze halber ist $\frac{dr'}{dx}$ etc. geschrieben statt $\frac{\partial r'}{\partial x} + p'\frac{\partial r'}{\partial z'} + r'\frac{\partial r'}{\partial p'} + s'\frac{\partial r'}{\partial q'}$, etc.$\Big)$

aus. Von ihnen ist aber die eine Gleichung eine algebraische Folge der zwei anderen, so dass die fragliche Bedingung durch die zwei Gleichungen:

$$\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx} = 0, \quad \frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx} = 0$$

vollständig dargestellt ist. Hieraus schliessen wir, dass die Bedingung dafür, dass drei partielle Differentialgleichungen 2. O. ∞^3 Integralflächen gemeinsam haben, durch zwei Gleichungen allein zu formuliren ist. Was ich hier, im Anschlusse an die im Texte angestellte Betrachtung, bemerkt haben wollte.

7. Wie die ∞^3 Integral-M_2^0 der letzterwähnten partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_4 herzuleiten sind, ist nun leicht ersichtlich. Aus (5), (9) und (10) werden z, p, q eliminirt. Die drei entstehenden Gleichungen geben r', s', t' in Function von z', x, y, p', q'. Diese Werthe von r', s', t' in das Gleichungssystem:

$$dp' = r'dx + s'dy, \quad dq' = s'dx + t'dy, \quad dz' = p'dx + q'dy$$

eingesetzt, machen, nach dem Nächstvorangehenden, dasselbe zu einem durch Gleichungen von der Form

$$\text{(a)} \qquad \begin{gathered} z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu), \\ p' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q' = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{gathered}$$

integrirbaren Systeme.

Wenn ferner diese Werthe für z', p', q' in die Gleichungen (5) und (9) eingetragen und sodann p, q eliminirt werden, so entsteht eine völlig bestimmte Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad z = F(x, y, \lambda, \mu, \nu).$$

Durch das System der Gleichungen (a) und (b) sind dann die fraglichen Integral-M_2^0 dargestellt.

8. Ist ψ ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung 2. O., zu der wir in Nr. 6. gelangten, so hat jede Gleichung: $\psi = C$, für jeden beliebigen constanten Werth von C ∞^3 Integrale mit den Gleichungen (5) gemeinsam. Es seien durch die Gleichungen:

$$\text{(12)} \qquad z = F(x, y, C, C', C'', C'''), \quad z' = \Phi(x, y, C, C', C'', C''')$$

diese Integrale ausgedrückt. C', C'', C''' sind die neuen arbiträren Constanten, die Parameter jener dreifachen Integralschaar. Durch Elimination*) aller vier Constanten C, C', C'', C''' kommt man auf die Gleichungen (5) zurück; durch Elimination von je drei derselben erhält man nebst den Gleichungen (5) nach einander diese vier:

$$\text{(13)} \qquad \left| \begin{aligned} \psi(z, z', x, y, p, q, p', q') &= C, \\ \psi'(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= C', \\ \psi''(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= C'', \\ \psi'''(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= C''', \end{aligned} \right.$$

deren jede also eine in der Schaar (12) enthaltene dreifach unendliche Integralschaar mit (5) gemein hat.

Aus der vierfach unendlichen Schaar (12) mögen ∞^3 Integrale durch die Gleichung:

$$\text{(14)} \qquad \text{eine arb. Funct. von } (C, C', C'', C''') = 0$$

ausgeschieden werden. Dieselben werden nach (13) den Gleichungen (5) und der Gleichung:

*) aus (12) und aus den Derivirten dieser Gleichungen in Bezug auf x, y.

(15) eine arb. Funct. von $(\psi, \psi', \psi'', \psi''') = 0$

gemeinsam zugehören.

Die Functionen $\psi, \psi', \psi'', \psi'''$, *aus denen die Gleichungen* (13) *gebildet sind, sind solche Integrale der anfangs erwähnten linearen partiellen Differentialgleichung* 2. O. *für* ψ, *dass jene Gleichungen* (13) *für alle Werthe von* C, C', C'', C''' *mit einander und mit den Gleichungen* (5) *ein Integral:*

$$\text{(a)} \qquad z = F(x, y), \quad z' = \Phi(x, y)$$

gemein haben. Jetzt habe ich bewiesen, dass aus ihnen Gleichungen von der Form (15) beliebig sich zusammensetzen, deren jede mit (5) ∞^3 Integrale (a) gemein hat. Oder, *es ist nun auch*

(15') eine arb. Funct. von $(\psi, \psi', \psi'', \psi''')$

ein Integral der betrachteten linearen partiellen Differentialgleichung 2. *O.*

9. Zwei der Variablen $z, z', x, y, p, q, p', q'$, etwa z, z', werden vermittelst (5) aus der Differentialgleichung, die ψ definirt, entfernt. Die Integrale ψ sind dann als Functionen von x, y, p, q, p', q' allein darzustellen, und das Integral (15') wird das vollständige Integral eines involutorischen Systems:

$$(16)\begin{cases} A_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y} + A_3 \dfrac{\partial\psi}{\partial p} + A_4 \dfrac{\partial\psi}{\partial q} + A_5 \dfrac{\partial\psi}{\partial p'} + A_6 \dfrac{\partial\psi}{\partial q'} = 0, \\ B_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y} + B_3 \dfrac{\partial\psi}{\partial p} + B_4 \dfrac{\partial\psi}{\partial q} + B_5 \dfrac{\partial\psi}{\partial p'} + B_6 \dfrac{\partial\psi}{\partial q'} = 0, \end{cases}$$

wo $A_1, A_2, \cdots, A_6, B_1, B_2, \cdots, B_6$ gewisse Functionen von x, y, p, q, p', q' sind.

Der letzt angeführte Satz kann dann so ausgesprochen werden:

Die lineare partielle Differentialgleichung 2. *O. in* x, y, p, q, p', q' *als unabhängigen Variablen, die* ψ *definirt, hat unendlichfach unendlich viele intermediäre Integrale, deren jedes ausgedrückt ist durch ein involutorisches System von der Form* (16). *Ein jedes Integral* ψ *giebt zu den Integralen* ψ', ψ'', ψ''' *und demnach zu einem bestimmten Systeme* (16), *in dem es enthalten ist, Anlass.*

Die partielle Differentialgleichung 2. O. für ψ hat also in dem Sinne ein *vollständiges* intermediäres Integral von der Form (16), dass jedes Integral ψ derselben eben ein Integral eines Systemes (16) wird. Aber zu zeigen, welchen Nutzen man aus diesem Satze für die Erledigung der partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ ziehen könnte, sehe ich mich gegenwärtig nicht im Stande. Eine solche Darlegung würde auch bei dieser Gelegenheit insofern von geringerem Interesse sein, weil die Herstellung der Integrale (12) des Systemes (5) oben in der 5. Nummer umständlich auseinandergesetzt worden ist. Diese Herstellung erfordert nach dem, was in der erwähnten Nummer 5., verglichen mit der Nummer 14. meiner Abhandlung in diesen Annalen

Bd. XIII, p. 92, erörtert worden ist, einen Integrationsprocess, welcher der Form nach demjenigen sehr ähnlich ist, der für eine partielle Differentialgleichung 2. O. mit zwei Variablen gilt.

10. Wie man, wenn ψ gegeben ist, die zugehörigen ψ', ψ'', ψ''', die zusammen mit ψ die Gleichungen (13) bilden, zu ermitteln habe, geht aus dem jetzt Entwickelten leicht hervor. Man stelle die Gleichungen auf:

$$(5) \quad \begin{cases} f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

$$(10) \quad [f\varphi]_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi]_{zxp} = 0, \quad [\psi f]_{zxp} = 0,$$

$$(17) \quad [f\psi']_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi']_{zxp} = 0, \quad [\psi\psi']_{zxp} = 0,$$

und verwandele durch Elimination von z, z', r', s', t', vermittelst der Gleichungen (5) und (10), die letzten Gleichungen (17) in drei lineare partielle Differentialgleichungen 1. O. für ψ' mit x, y, p, q, p', q' als unabhängigen Variablen. Diese Gleichungen werden, nach dem in der vorangehenden Nummer Erörterten, von den drei Functionen ψ', ψ'', ψ''', wie auch von einer jeden Function dieser ψ', ψ'', ψ''', befriedigt. *Daher bilden die genannten drei linearen partiellen Differentialgleichungen* (17) *ein vollständiges System. Durch die Lösungen desselben werden die gesuchten Functionen ψ', ψ'', ψ''' erhalten.*

11. Wird die Gleichung (9), nachdem vermittelst (5) z, z' entfernt sind, nach x (oder y, p, q, p', q') aufgelöst, also auf die Form gebracht:

$$(9') \qquad x - f(y, p, q, p', q') = 0,$$

so tritt an Stelle der in Nummer 6. entwickelten linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ eine ebenfalls lineare partielle Differentialgleichung 2. O. für f, in der jedoch f explicite (neben ihren Differentialquotienten) auftritt.

Die zwei Gleichungen (5) stellen im Raume R_3' (Nr. 2.) eine Liniencongruenz dar. Daher kann man den Satz, dass die Bestimmung der Gleichungen (9′) auf die Integration einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. führt, auch so aussprechen: *die Bestimmung aller derjenigen partiellen Differentialgleichungen* 1. O. *in R_4, die eine aus M_2^0 bestehende vollständige Lösung besitzen und die in R_3' Linienflächen* (*Nr.* 3.) *repräsentiren, die zu einer gegebenen, beliebig genommenen Liniencongruenz gehören, wird durch Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung* 2. *O. in fünf unabhängigen Variablen mit einem vollständigen, durch zwei involutorische lineare partielle Differentialgleichungen* 1. *O. ausgedrückten intermediären Integrale bewirkt.*

12. Wenn bei der in der 3. Nr. angezeigten Elimination von p_2, p_3 zwischen den Gleichungen (1) und (3) eine Gleichung von der Form:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p' q') + p_1^k \varphi(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$$
$$+ p_1^l \psi(\qquad\qquad) + p_1^m \psi'(\qquad\qquad) = 0$$

resultirt, so hat die Gleichung (3) keine dreifach unendliche Schaar von Integral-M_2^0. Aber sie wird eine zweifach unendliche Schaar derartiger M_2^0 besitzen, falls die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(z, z', x, y, p, q, p', q') &= 0, \\ \varphi(\qquad\qquad) &= 0, \\ \psi(\qquad\qquad) &= 0, \\ \psi'(\qquad\qquad) &= 0 \end{aligned}$$

von einem Gleichungspaare:

$$z = F(x, y, \lambda, \mu), \quad z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu),$$
(wo λ, μ arbiträre Constanten)

befriedigt werden. Es müssen dann die in der 7. Nr. erörterten drei partiellen Differentialgleichungen 2. O. (10) für z' zweifach unendlich viele Integrale mit der partiellen Differentialgleichung 1. O., die durch Elimination von z, p, q zwischen den vier Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\psi' = 0$ entsteht, gemein haben. Und das Gleiche muss in Bezug auf z gelten.

Oder es entstehen die fraglichen Lösungen in folgender anderen Weise. Man substituire in $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\psi' = 0$ αx statt y und resp. $\frac{dz}{dx} - q\alpha$, $\frac{dz'}{dx} - q'\alpha$ statt p, p', wodurch die genannten Gleichungen in vier Gleichungen zwischen $z, z', x, \alpha, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}, q, q'$ übergehen. Die Elimination von q, q' führt auf zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_0\left(z, z', x, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}\right) &= 0, \\ \varphi_0(\qquad\qquad) &= 0, \end{aligned}$$

die die Grösse α als Constante enthalten. Eine folgende Elimination von z, $\frac{dz}{dx}$ zwischen diesen Gleichungen: $f_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ und der Gleichung:

$$[f_0 \varphi_0]_{zx\frac{dz}{dx}} = 0$$

leitet zu einer Differentialgleichung 2. O., die z' als Function von x, von der Constante α und von zwei arbiträren Parametern bestimmt. Die zwei arbiträren Parameter denke ich mir durch (α und durch) zwei (arbiträre) dem Werthe $x = 0$ entsprechende Werthe z_1', z_2' von z' ausgedrückt. Es wird sodann α entfernt vermittelst der Gleichung $y = \alpha x$; die so entstehende Gleichung in z', x, y mit z_1', z_2' als arbi-

tären Constanten, ist die der fraglichen Lösung zugehörende Gleichung: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$.

Denn, — die zuletzt erwähnte Differentialgleichung 2. O. für z' hat die Projectionen der Schnitte zwischen der Ebene: $y = \alpha x$, und den Flächen: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$ auf der $z'x$ Ebene zu Integralcurven. Durch bestimmte Werthe von z_1', z_2' sind, unabhängig von dem Werthe von α, zwei Punkte auf der z'-Axe bestimmt, durch welche die Integralcurve, die diesen Werthen z_1', z_2' der arbiträren Constanten entspricht, hindurchgeht. Durch dieselben Punkte geht selbstverständlich auch der Schnitt, dessen Projection die Integralcurve ist. Wird nun in unseren Gleichungen α ins Unendliche variirt, dagegen die Werthe von z_1', z_2' festgehalten, so wird algebraisch diejenige Fläche beschrieben, die den Ort derjenigen Schnitte in den durch die z'-Axe gelegten Ebenen bildet, die durch dieselben zwei bestimmten Punkte (z_1', z_2') hindurchgehen. Dieser Ort ist aber nach dem kurz vorher beim Anfange dieses Beweises Bemerkten, eine gewisse der Flächen: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$. Daher u. s. w.

Die der Gleichung: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$ zugehörige Gleichung: $z = F(x, y, \lambda, \mu)$ wird, wie in dem früheren Falle, sobald die erstere Gleichung, die für z', gefunden ist, eindeutig, durch rein algebraische Operationen bestimmt.

13. Die Elimination von p_1, p_2, p_3 zwischen (1) und (3) würde zu fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(z, z', x, y, p, q, p', q') &= 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0, \\ \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0, \\ \psi'(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0, \\ \psi''(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0 \end{aligned}$$

führen können, und diese könnten durch ein Gleichungspaar:

$$z = F(x, y, \lambda), \quad z' = \Phi(x, y, \lambda),$$

wo λ einen arbiträren Parameter bezeichnet, befriedigt werden. Dann müssten u. A. die zwei partiellen Differentialgleichungen 1. O. für z', die aus den eben hingeschriebenen Gleichungen durch Elimination von z, p, q entspringen, einfach unendlich viele gemeinsame Lösungen besitzen. Dieselben würden die Gleichung:

$$z' = \Phi(x, y, \lambda)$$

darstellen.

14. Endlich würde die mehrmals besprochene Elimination von p_1, p_2, p_3 zu sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(z, z', x, y, p, q, p', q') &= 0,\\
\varphi(\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi(\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi'(\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi''(\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi'''(\qquad\qquad\qquad) &= 0
\end{aligned}$$

führen können. Hat dann die partielle Differentialgleichung (3) eine Integral-M_2^0, so ist es diejenige, welche durch die Gleichungen:

$$z = F(x, y), \quad z' = \Phi(x, y)$$

(es sollen nachher x_1, x_2, x_3 für z', x, y gesetzt werden)

ausgedrückt ist, die durch Elimination von z', p', q', p, q bez. z, p, q, p', q' aus den sechs gegebenen Gleichungen erhalten werden. Jene zwei Gleichungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ müssen alsdann eine gemeinsame Lösung der sechs Gleichungen: $f = 0$, $\varphi = 0, \cdots, \psi''' = 0$ ausmachen.

§ 3.

Von Umhüllungsgebilden von Schaaren von M_2^0.

15. Die vier Gleichungen, durch welche zwei M_2^0 in R_4 zu repräsentiren sind, werden im Allgemeinen nur von einem Werthsysteme (oder einigen Werthsystemen) von (z, x_1, x_2, x_3) befriedigt. Demgemäss schneiden sich zwei M_2^0 im Allgemeinen nur in einem Punkte (oder in einigen Punkten). Von einer einfach unendlichen Schaar von M_2^0:

$$\begin{aligned}
f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda) &= 0,\\
\varphi(\qquad\qquad\qquad) &= 0
\end{aligned}$$

gilt daher Folgendes: Sie bilden zusammen eine M_3^0. Die Punktgleichung derselben wird durch Elimination von λ aus $f = 0$, $\varphi = 0$ erhalten. Die Parameter p_1, p_2, p_3 ihres Flächenelements in einem beliebigen Punkte (z, x_1, x_2, x_3) haben die Werthe:

$$p_i = -\frac{f'(x_i)\varphi'(\lambda) - \varphi'(x_i)f'(\lambda)}{f'(z)\varphi'(\lambda) - \varphi'(z)f'(\lambda)}, \quad (i=1,2,3)$$

und jenes Flächenelement schliesst sich daher einem Elemente (N. 1.) derjenigen M_2^0 an, die durch den Punkt (z, x_1, x_2, x_3) hindurchgeht. Ziehen wir aber insbesondere einen Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter M_2^0 unserer Schaar in Betracht. Die Elemente der beiden M_2^0 in ihrem Schnittpunkte liegen nur ausnahmsweise in einer Ebene [d. i. in einer ebenen M_3^0], und deshalb hat die von der Schaar der M_2^0 gebildete M_3^0 zwei Tangentenebenen in jenem Punkte, die eine Ebene an das Element der einen M_2^0 in jenem Punkte, die andere an

das Element der anderen M_2^0 in demselben Punkte sich anschliessend. Die Glieder rechts in den obigen Formeln für p_i nehmen nun auch die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, indem nämlich für den fraglichen Punkt $f'(\lambda)=0$, $\varphi'(\lambda)=0$. Die Tangentenebenen der M_3^0 in zwei dem Schnittpunkte unendlich benachbarten Punkten der bezüglichen M_2^0 weichen nur unendlich wenig von einander ab. Deshalb bezeichne ich den in Rede stehenden Punkt, einen Schnittpunkt zweier consecutiver M_2^0 der Schaar, als einen Cuspidalpunkt der M_3^0, in dem dieselbe zwei unendlich benachbarte Tangentenebenen hat. Die Aufeinanderfolge dieser Punkte bildet eine Art von Cuspidal-M_1^0 der M_3^0. — Trifft es sich aber, dass je zwei unendlich benachbarte M_2^0 der Schaar eine ganze Punktmannigfaltigkeit von einer Dimension, eine M_1^0, gemein haben, so erhält unsere M_3^0, statt einer Cuspidal-M_1^0, eine aus den Schnitt-M_1^0 gebildete Cuspidal-M_2^0. Da mit dieser M_2^0 jede M_2^0 der anfänglichen Schaar zwei unendlich benachbarte M_1^0 gemein hat, so wird dieselbe von einer jeden M_2^0 der Schaar nach einer ganzen M_1^0 berührt. In diesem Falle giebt es also eine M_2^0, die ein Umhüllungsgebilde der vorgelegten einfachen Schaar von M_2^0 bildet, nämlich die eben genannte Cuspidal-M_2^0. — Ein Beispiel einer Schaar von M_2^0, die eine Umhüllungs-M_2^0 gestattet, wird von der durch ein Gleichungspaar der Form:

$$f(z, x_1, x_2, x_3 \quad)=0,$$
$$\varphi(z, x_1, x_2, x_3, \lambda)=0$$

darzustellenden Schaar geliefert. Die Gleichungen der Umhüllungs-M_2^0 werden durch Elimination von λ zwischen den Gleichungen: $f=0$, $\varphi=0$, $\varphi'(\lambda)=0$, erhalten.

16. Eine jede aus einer zweifach unendlichen Schaar von M_2^0:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu)=0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad)=0$$

durch eine beliebige Gleichung: $\lambda = F(\mu)$ ausgeschiedene einfach unendliche Schaar hat, nach dem Nächstvorangehenden, eine M_3^0 als Umhüllungsgebilde. Ausnahmsweise würde die zweifache Schaar so beschaffen sein können, dass sie eine einfache Schaar einschlösse, die eine Umhüllungs-M_2^0 hätte. Eine M_2^0 könnte es auch geben, die sämmtliche M_2^0 der zweifachen Schaar umhüllte. In diesem Falle müsste eine jede M_2^0 der Schaar von allen ∞^1 unendlich benachbarten M_2^0 derselben Schaar in dem nämlichen Punkte geschnitten werden; d. h. es müsste den sechs Gleichungen:

$$f=0, \quad f'(\lambda)=0, \quad f'(\mu)=0,$$
$$\varphi=0, \quad \varphi'(\lambda)=0, \quad \varphi'(\mu)=0$$

für alle Werthe von λ, μ allen durch dasselbe Werthsystem von (z, x_1, x_2, x_3) genügt werden. Durch Elimination von λ, μ zwischen jenen sechs Gleichungen würden alsdann zwei Gleichungen in z, x_1, x_2, x_3 resultiren, und diese gerade müssten die Gleichungen der fraglichen Umhüllungs-M_2^0 sein. Für eine zweifache Schaar allgemeiner Art giebt es folglich keine Umhüllungs-M_2^0.

17. Ebensowenig lässt sich aus den M_2^0 einer dreifach unendlichen Schaar allgemeiner Art, gegeben durch die Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu) = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

eine Schaar von zweifach unendlich vielen M_2^0 ausscheiden, die eine M_2^0 als Umhüllungsgebilde hat. Nehmen wir an, dass durch die Gleichung:

$$\lambda = \Phi(\mu, \nu)$$

eine zweifache Schaar mit einer Umhüllungs-M_2^0 bestimmt würde. Die sechs Gleichungen:

$$f = 0, \quad f'(\mu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 0, \quad f'(\nu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = 0,$$

$$\varphi = 0, \quad \varphi'(\mu) + \varphi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 0, \quad \varphi'(\nu) + \varphi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = 0$$

geben durch Elimination von z, x_1, x_2, x_3 zwei Gleichungen in λ, μ, ν, $\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}$, welche im angenommenen Falle von derselben Function $\lambda = \Phi(\mu, \nu)$ erfüllt sein müssten. Die Bedingung für die Existenz einer solchen Function lässt sich leicht finden. Wir schreiben die sechs Gleichungen so:

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} &f = 0, \quad f'(\mu)\varphi'(\lambda) - \varphi'(\mu)f'(\lambda) = 0, \quad f'(\mu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 0, \\ &\varphi = 0, \quad f'(\nu)\varphi'(\lambda) - \varphi'(\nu)f'(\lambda) = 0, \quad f'(\nu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = 0, \end{aligned}$$

und wenden die vier ersten Gleichungen zur Elimination von z, x_1, x_2, x_3 an. Es muss dann mit den zwei letzten der Gleichungen (b) die folgende Gleichung

$$\text{(c)} \quad f'(\lambda)\left[\frac{d}{d\nu}f'(\mu) - \frac{d}{d\mu}f'(\nu)\right] = f'(\mu)\frac{d}{d\nu}f'(\lambda) - f'(\nu)\frac{d}{d\mu}f'(\lambda)$$

verträglich sein, also ebenfalls durch $\lambda = \Phi(\mu, \nu)$ erfüllt werden, in der $\frac{d}{d\mu}$, $\frac{d}{d\nu}$ resp. die Operationen bezeichnen:

$$-\frac{f'(\mu)}{f'(\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{dz}{d\mu}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{dx_1}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$-\frac{f'(\nu)}{f'(\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{dz}{d\nu}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{dx_1}{d\nu}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{d\nu}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{d\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{dz}{d\mu}, \frac{dx_1}{d\mu}, \frac{dx_2}{d\mu}, \frac{dx_3}{d\mu}, \frac{dz}{d\nu}, \ldots, \frac{dx_3}{d\nu}$$

erhält man durch Differentiation der vier ersten von den Gleichungen (b).

Die Gleichung (c) können wir als eine Gleichung für φ betrachten. Sie wird eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit $x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu$ als unabhängigen Variablen, falls man sich z durch die Gleichung $f=0$ eliminirt denkt. Ist die Gleichung $f=0$, d. i. die erste der Gleichungen (a), gegeben und ein Integral $\varphi(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$ der partiellen Differentialgleichung 2. O. (c) gefunden, so stellt die Gleichung: $\varphi=0$ eine Gleichung dar, die zusammen mit $f=0$ eine Schaar von M_2^0 darstellt, *die sich in* ∞^1 *Schaaren von je* ∞^2 M_2^0 *auflöst, Schaaren, die jede eine Umhüllungs-*M_2^0 *besitzen.* Wir sehen auch, dass es keine dreifache Schaar von M_2^0 giebt, die sich durch zwei Gleichungen, die beide dreifach unendlich in Bezug auf λ, μ, ν sind, darstellen lässt, und sich in mehr als ∞^1 Schaaren von je ∞^2 M_2^0 spaltet, deren jede eine Umhüllungs-M_2^0 hat.

18. Eine partielle Differentialgleichung 1. O. in R_4, die eine durch ∞^3 M_2^0 (a) ausgedrückte vollständige Lösung besitzt, muss folglich, falls die Gleichungen:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)=0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad)=0$$

jener Integralschaar in der durch die Gleichung (c) formulirten Beziehung zu einander stehen, noch ∞^1 andere Integral-M_2^0 besitzen, die Umhüllungsgebilde von je ∞^2 der ersteren Integrale darstellen. In diesem Falle müssen die Gleichungen (10) für ein jedes einer Umhüllungs-M_2^0 zugehörende Element $(z, z', x, y, p, q, p', q')$ von mehr als einem Werthsysteme von r', s', t', nämlich von einem, das der umhüllenden, und von einem, das einer umhüllten M_2^0 zukommt, — befriedigt werden. Die Bedingung hierfür drückt sich durch zwei Gleichungen:

$$\alpha(z, z', x, y, p, q, p', q')=0,$$
$$\beta(\qquad\qquad\qquad)=0$$

aus. Also: *wenn eine partielle Differentialgleichung* 1. *O. in* R_4, *die in den Grössen* $z, z', x, y, p, q, p', q'$ *durch die drei Gleichungen* (5), (9) *repräsentirt ist, einfach unendlich viele Integral-*M_2^0 *hat, die Umhüllungsgebilde von je* ∞^2 *der* ∞^3 *Integral-*M_2^0 *einer vollständigen Lösung ausmachen, so erhält man erstens die Gleichungen dieser Umhüllungs-*M_2^0, *vermittelst Elimination zwischen* (5), (9) *und den eben angemerkten Gleichungen:* $\alpha=0$, $\beta=0$, *in der Form:*

$$p=\bar{f}(z, x, y), \quad q=\bar{\varphi}(z, x, y), \quad z'=\bar{\psi}(z, x, y),$$

und hat hernach, — was jetzt möglich sein muss, — die Gleichung:

$$dz - \overline{f} \cdot dx - \overline{\varphi} \cdot dy = 0,$$

in der Form: $z = F(x, y, C)$*), *wo* C *eine arbiträre Constante bedeutet, zu integriren. Durch die beiden Gleichungen:*

$$z = F(x, y, C), \quad z' = \overline{\psi}\,(F(x, y, C), x, y)$$

sind dann die fraglichen Integral-M_2^0 *gegeben.*

Man ersieht ohne Weiteres hieraus, wie man eine vorgelegte partielle Differentialgleichung 1. O. in R_4 darauf zu prüfen hat, ob sie derartige Umhüllungsintegral-M_2^0 zulässt oder nicht.

19. Der Umstand, dass die Rechnung, die zu jenen Umhüllungs-M_2^0 führt, einfacher ist als diejenige, welche die Integral-M_2^0 der vollständigen Lösung giebt, findet in dem folgenden Satze seine Erklärung. — Aus den dreifach unendlich vielen M_2^0 einer vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_4 scheide man beliebig einfach unendlich viele aus. Die aus ihnen gebildete Punktmannigfaltigkeit dreier Dimensionen ist eine Integral-M_3^0 der nämlichen Gleichung 1. O. Aus in dieser Weise gebildeten Integral-M_3^0 setzen sich als deren Umhüllungsgebilde alle andere Integralmannigfaltigkeiten der Gleichung 1. O. zusammen. Giebt es nun einfach unendlich viele Umhüllungsintegral-M_2^0 der eben angegebenen Art, so werden diese, oder wenigstens einige von diesen, von jeder Integral-M_3^0 der partiellen Differentialgleichung berührt. *Die in Rede stehenden* M_2^0 *bilden daher eine singuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung* 1. *O.*

20. Der Fall, dass eine der Gleichungen (a) nur zwei oder nur einen der Parameter λ, μ, ν enthält, ist bisher ausgeschlossen geblieben. Enthält $f = 0$ nur die Parameter λ, μ, so entstehen durch blosse Elimination von ν zwischen den Gleichungen:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = 0, \quad \varphi(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu) = 0, \quad \varphi'(\nu) = 0$$

zwei Gleichungen:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = 0,$$
$$\overline{\varphi}(\qquad\qquad\qquad) = 0,$$

durch welche eine zweifache Schaar von Umhüllungs-M_2^0 von der in

---

*) Es braucht sich selbstverständlich keine der Gleichungen:

$$p = \overline{f}\,(z, x, y), \cdots, z = F\,(x, y, C)$$

in diesen expliciten Formen zu ergeben. Die betreffenden Rechnungsoperationen werden im Allgemeinen auf Gleichungen von der Form

$$\overline{f}\,(z, x, y, p) = 0, \cdots F\,(x, y, z, C) = 0$$

führen.

der Nr. 15. erörterten Art ausgedrückt wird. — Enthält die Gleichung $f=0$ nur einen Parameter, z. B. λ, so kann man beliebig $\mu=$ Funct (ν (und λ)) nehmen, und sodann eine Umhüllungs-M_2^0: $f=0$, $\bar{\varphi}=0$ bilden. Es existiren also jetzt ∞^∞ Umhüllungs-M_2^0. Die partielle Differentialgleichung 1. O. in R_4, die eine durch: $f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda)=0$, $\varphi(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)=0$ ausgedrückte vollständige Lösung hat, wird geometrisch durch eine Kegelschaar in R_3' (Nr. 2., 3.) repräsentirt.

21. In einer vierfach unendlichen Schaar von M_2^0:

$$\text{(d)}\qquad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu, \varrho)=0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad)=0 \end{cases}$$

sind unendlich viele zweifache Schaaren enthalten, die Umhüllungs-M_2^0 besitzen. Werden nämlich ν, ϱ so als Functionen von λ, μ bestimmt, dass die sechs Gleichungen:

$$\text{(e)}\qquad \begin{aligned} f=0,\quad & f'(\lambda)+f'(\nu)\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}+f'(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}=0, \\ & f'(\mu)+f'(\nu)\frac{\partial\nu}{\partial\mu}+f'(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial\mu}=0, \\ \varphi=0,\quad & \varphi'(\lambda)+\varphi'(\nu)\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}+\varphi'(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial\lambda}=0, \\ & \varphi'(\mu)+\varphi'(\nu)\frac{\partial\nu}{\partial\mu}+\varphi'(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial\mu}=0 \end{aligned}$$

für alle Werthe von λ, μ verträglich werden, etwa: $\nu=F(\lambda,\mu)$, $\varrho=\Phi(\lambda,\mu)$, so bekommt man eine zweifache Schaar, die von einer M_2^0 umhüllt wird, nämlich die folgende:

$$\begin{aligned} & f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, F, \Phi)=0, \\ & \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad)=0. \end{aligned}$$

Und es können wirklich ν, ϱ so bestimmt werden. Durch Elimination von z, x_1, x_2, x_3 zwischen den eben hingeschriebenen sechs Gleichungen entstehen nämlich zwei Gleichungen in λ, μ, ν, ϱ, $\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}, \cdots, \frac{\partial\varrho}{\partial\mu}$. Dass zwei solche Gleichungen immer ∞^∞ Lösungen: $\nu=F(\lambda,\mu)$, $\varrho=\Phi(\lambda,\mu)$ zulassen, ist aber in der 5. Nr. erwiesen.

Die Lösungen der zwei Gleichungen von der Form (5), die durch Elimination von λ, μ, ν, ϱ aus den Gleichungen (d)*) entspringen, werden sämmtlich aus den Gleichungen (d) selbst und aus Umhüllungsgebilden von ∞^2 derselben bestehen.

Die zwei Gleichungen, die in der oben erwähnten Art durch Elimination von z, x_1, x_2, x_3 aus (e) entstehen, haben Lösungen von derselben Beschaffenheit. Die Gleichungen (d) selbst, — jetzt z, x_1, x_2, x_3

*) diese verbunden mit ihren ersten Derivirten in Bezug auf x_2, x_3 ($-z, x_1$ als Functionen dieser Grössen aufgefasst).

als arbiträre Parameter betrachtet, — machen eine besondere Lösung jener Gleichungen aus.

Das erste der genannten Gleichungspaare von der Form (5), — das in $z, x_1, x_2, \cdots, \frac{\partial x_1}{\partial x_3}$, — nenne ich Ω, das zweite, — das in $\lambda, \mu, \nu, \cdots, \frac{\partial \varrho}{\partial \mu}$, — nenne ich Ω'. Die Lösungen von Ω, Ω' entsprechen einander eindeutig, so dass aus den Lösungen des einen Gleichungspaares die des anderen durch rein algebraische Operationen hervorgehen. Denn, fassen wir, um uns kürzer ausdrücken zu können, z, x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4, $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4' auf: einem jeden Punkte in R_4' entspricht eine Integral-M_2^0 von Ω, einem jeden Punkte in R_4 eine Integral-M_2^0 von Ω', so dass zwei unendlich benachbarten Punkten einer Integral-M_2^0 von Ω, die einem Punkte $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entspricht, zwei Integral-M_2^0 von Ω' entsprechen, die beide durch den Punkt $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ hindurchgehen. In Folge dessen wird einer jeden M_2^0 in R_4, die ∞^2 der den Punkten $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entsprechenden Integral-M_2^0 von Ω umhüllt und die folglich selbst ein Integral von Ω ausmacht, eine M_2^0 in R_4' entsprechen, die ∞^2 der den Punkten (z, x_1, x_2, x_3) entsprechenden Integral-M_2^0 von Ω' umhüllt und also auch eine Integral-M_2^0 dieses selben Gleichungspaares Ω' bildet, und umgekehrt. Einer zufälliger Weise vorhandenen Umhüllungs-M_2^0 von ∞^1 der den Punkten $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entsprechenden Integralen von Ω entspricht eine Punktmannigfaltigkeit von einer Dimension als Integral von Ω'.

Diese Correspondenz zwischen den Integralen von Ω, Ω' ist genau diejenige, die von der durch die Gleichungen (d) begründeten Berührungstransformation der Räume R_4, R_4' bewirkt wird.

§ 4.

Verallgemeinerung der in § 2. behandelten Probleme.

22. Von den zwei Gleichungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, durch welche eine Lösung der Gleichungen (5) ausgedrückt wird, ist im Allgemeinen die eine Gleichung unzweideutig bestimmt durch die andere. Nun ist jedes System von vier Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ f(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') &= 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0 \end{aligned}$$

äquivalent einem Gleichungspaare (5). Fassen wir x, y, z, x', y', z' als Punktcoordinaten zweier Gebiete R, R' eines Raumes von drei Dimensionen auf, so definirt jenes System eine Transformation von

R, R' in einander. Durch die Lösungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, d. i. $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$, werden diejenigen Flächen in R (oder R') angegeben, die hierbei in Flächen in R' (oder R) umgeformt werden. *Es giebt nur* ∞^4 *Flächen in* R *(oder* R'*), so wie* *gewisse* *unter den Umhüllungsgebilden von zweifach unendlich vielen derselben, denen wiederum Flächen in* R' *(oder* R*) entsprechen.* Und das Entsprechen der Flächen in R und R' ist ein eindeutiges.*) — Wie diese Flächen zu bestimmen sind, ist oben (Nr. 5.) erörtert worden, wo gezeigt wurde, wie man die Gleichungen: $z' = \Phi(x, y)$ zu ermitteln hat.

Dieses Problem ist selbstverständlich enthalten in dem folgenden weit mehr umfassenden:

Eine Transformation von R, R' *in einander wird definirt durch die* k *Gleichungen:*

$$\begin{aligned} &F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0,\\ &F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F_k(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0; \end{aligned}$$

man fragt nach dem Bezirke, innerhalb dessen diese Transformation eine Flächentransformation ist. Ich bespreche nur die Fälle $k = 3$, $k = 4$.

23. Drei Gleichungen:

$$(18)\qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0,\\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0,\\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

ordnen einer (beliebigen) Fläche in R alle diejenigen Flächen in R' zu, welche Integrale einer gewissen (der Fläche entsprechenden) partiellen Differentialgleichung 1. O. sind. Wenn $z = F(x, y)$ die Gleichung der Fläche in R ist, so erhält man die entsprechende partielle Differentialgleichung 1. O. in R', indem man in $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ resp. $F(x, y)$, $F'(x)$, $F'(y)$ statt z, p, q setzt und hierauf x, y eliminirt. Ein ähnliches Verfahren führt für eine jede Fläche in R' zu einer entsprechenden partiellen Differentialgleichung 1. O. in R. — Einem jeden Flächenelemente (z, x, y, p, q) entspricht ein durch die Gleichungen (18), diese als partielle Differentialgleichungen 1. O. in R' aufgefasst, bestimmter Complex von Flächenelementen in R'. Einem jeden Streifen:

$$z = f(x),\quad y = \varphi(x),\quad p = \psi(x),\quad q = \frac{f'(x) - \psi(x)}{\varphi'(x)} = \chi(x)$$

entspricht folglich der Complex der gemeinsamen Flächenelemente zweier partieller Differentialgleichungen 1. O. in R'. Diese Flächen-

*) Man bemerke jedoch den am Schlusse der Nr. 25. cursiv gedruckten Satz.

elemente ordnen sich im Allgemeinen nicht zu Flächen zusammen. Denn, wie ich zeigen werde, sind jene partielle Differentialgleichungen 1. O. nur ausnahmsweise involutorisch. Man erhält nämlich die fraglichen Gleichungen durch Elimination von x zwischen den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &F_1(f(x), x, \varphi(x), \psi(x), \chi(x), z', x', y', p', q') = 0, \\ &F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ &F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0. \end{aligned}$$

Der Werth von x, der aus der ersten Gleichung folgt, wird in die zwei anderen Gleichungen eingetragen. Bezeichnen wir die so erhaltenen Gleichungen, die gerade die in Rede stehenden ausmachen, oder wenigstens ihnen äquivalent sind, durch $F_2' = 0$, $F_3' = 0$, so haben wir:

$$[F_2' F_3'] = [F_2 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[x F_3] + \frac{dF_3}{dx}[F_2 x],^{*)}$$

$[F_1'$ identisch Null, also:]

$$0 = [F_1' F_2]_{z'x'p'} = [F_1 F_2]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[x F_2],$$

$$0 = [F_1' F_3]_{z'x'p'} = [F_1 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[x F_3],$$

woraus

$$\frac{dF_1}{dx}[F_2' F_3'] = \frac{dF_1}{dx}[F_2 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[F_3 F_1]_{z'x'p'} + \frac{dF_3}{dx}[F_1 F_2]_{z'x'p'}.$$

Hier steht

$$\frac{dF_i}{dx} \text{ statt } \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial z} f'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial p}\psi'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial q}\chi'(x).$$

Die Bedingung $[F_2' F_3'] = 0$ dafür, dass unsere zwei Gleichungen in Involution liegen, lautet dann so:

$$(19) \quad \frac{dF_1}{dx}[F_2 F_3]_{z'x'p} + \frac{dF_2}{dx}[F_3 F_1]_{z'x'p'} + \frac{dF_3}{dx}[F_1 F_2]_{z'x'p'} = 0,$$

und sie ist offenbar im Allgemeinen nicht erfüllt.

Im Falle:

$$[F_2 F_3]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_3 F_1]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_1 F_2]_{z'x'p'} = 0,$$

---

*) $$[F_i F_k]_{z'x'p'} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial q'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial q'}.$$

und nur in diesem Falle, wird *einem jeden* Streifen in R eine einfach unendliche Flächenschaar in R' zugeordnet. In diesem Falle wird einem jeden Flächenelemente in R eine Fläche in R' entsprechen. Die Gleichungen (18) können dann durch eine Gleichung:

$$F(z, x, y, p, q, z', x', y') = 0,$$

oder durch zwei oder drei solche Gleichungen ersetzt werden. *Sie begründen folglich jetzt eine solche Flächentransformation, wie ich sie in einer Abhandlung in diesen Annalen Bd. XI, p.* 199 *aufgestellt habe.*

Dagegen kann man andere Transformationen (18) aufstellen, die jeden Streifen einer beliebig gegebenen vierfach unendlichen Streifenschaar in R in ∞^1 Flächen in R' überführen. Sei nämlich die Streifenschaar definirt durch die Gleichungen:

$$(20)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dy = \overline{\varphi}(z, x, y, p, q)\, dx, \\ dp = \overline{\psi}(\qquad\qquad)\, dx, \\ dq = \overline{\chi}(\qquad\qquad)\, dx, \end{cases}$$

wo $\overline{\varphi}, \overline{\psi}, \overline{\chi}$ ganz beliebige Functionsformen bezeichnen, so führe man nur in den in (19) eingehenden $\frac{dF_i}{dx}$ statt $[f'(x)=]\,\frac{dz}{dx}, [\varphi'(x)=]\,\frac{dy}{dx}$, etc. $p + q\overline{\varphi}, \overline{\varphi}$, etc. ein. Für F_1, F_2 nehme man beliebige Functionen von $z, x, y, p, q, z', x', y', p', q'$ und für F_3 ein Integral der so modificirten Gleichung (19). Durch die Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ ist dann eine Transformation der fraglichen Beschaffenheit bestimmt.

24. Wir behandeln etwas näher die zuletzt genannte Transformation. Aus den Differentialen der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ erhält man nach Elimination von dx', dy':

$$\begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy & \frac{dF_1}{dx'} & \frac{dF_1}{dy'} \\ \frac{dF_2}{dx}dx + \frac{dF_2}{dy}dy & \frac{dF_2}{dx'} & \frac{dF_2}{dy'} \\ \frac{dF_3}{dx}dx + \frac{dF_3}{dy}dy & \frac{dF_3}{dx'} & \frac{dF_3}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Hier ist

$$\frac{dF_i}{dx} = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial z}p + \frac{\partial F_i}{\partial p}r + \frac{\partial F_i}{\partial q}s, \quad \frac{dF_i}{dy} = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z}q + \frac{\partial F_i}{\partial p}s + \frac{\partial F_i}{\partial q}t,$$

$$\frac{dF_i}{dx'} = \frac{\partial F_i}{\partial x'} + \frac{\partial F_i}{\partial z'}p' + \frac{\partial F_i}{\partial p'}r' + \frac{\partial F_i}{\partial q'}s', \quad \frac{dF_i}{dy'} = \frac{\partial F_i}{\partial y'} + \frac{\partial F_i}{\partial z'}q' + \frac{\partial F_i}{\partial p'}s' + \frac{\partial F_i}{\partial q'}t'.$$

Zwischen r, s, t, r', s', t', hat man also den durch folgende zwei Gleichungen ausgedrückten Zusammenhang:

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dx} & \frac{dF_1}{dx'} & \frac{dF_1}{dy'} \\ \frac{dF_2}{dx} & \frac{dF_2}{dx'} & \frac{dF_2}{dy'} \\ \frac{dF_3}{dx} & \frac{dF_3}{dx'} & \frac{dF_3}{dy'} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dy} & \frac{dF_1}{dx'} & \frac{dF_1}{dy'} \\ \frac{dF_2}{dy} & \frac{dF_2}{dx'} & \frac{dF_2}{dy'} \\ \frac{dF_3}{dy} & \frac{dF_3}{dx'} & \frac{dF_3}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass, wenn (z', x', y', p', q') eines der Flächenelemente ist, die dem Flächenelemente (z, x, y, p, q) entsprechen, einem jeden dem ersten Flächenelemente zugeordneten Werthsysteme von r', s', t' ein Büschel*) von dem letzten Elemente zugeordneten Werthen von r, s, t entspricht.

Durch die Streifenschaar (20) kommt einem jeden Flächenelemente (z, x, y, p, q) ein Büschel von r, s, t zu, nämlich der folgende:

$$r + \overline{\varphi} s = \overline{\psi},$$
$$s + \overline{\varphi} t = \overline{\chi},$$

und derselbe fällt mit dem Büschel (21):

$$r + m(z,x,y,p,q,z',x',y',p',q',r',s',t')\, s = \mu\, (z,x,y,p,q,z',x',y',p',q',r',s',t'),$$
$$s + m(\qquad)\, t = \nu\, (\qquad),$$

zusammen, falls:

$$(22)\qquad m = \overline{\varphi}, \quad \mu = \overline{\psi}, \quad \nu = \overline{\chi}$$

die drei neuen Gleichungen zwischen $z, x, y, p, q, z', x', y', p', q', r', s', t'$ bilden.

Die Elimination von z, x, y, p, q zwischen den sechs Gleichungen (18) und (22) führt zu einer Gleichung:

$$(23)\qquad \Phi(z', x', y', p', q', r', s', t') = 0,$$

die in folgender Weise das Bild in R' von der Streifenschaar (20) ausmacht. Einem jeden Flächenelemente (z, x, y, p, q) entspricht eine Schaar von ∞^1 Streifen, nämlich die durch die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, als Gleichungen in z', x', y', p', q' aufgefasst, gegebene Streifenschaar. Zwei unendlich benachbarten Flächenelementen in R, die vereinigt liegen, entsprechen zwei Streifenschaaren, die so auf einander bezogen sind, dass jedes Flächenelement eines Streifens der einen Schaar mit einem Flächenelemente eines Streifens der anderen Schaar

---

*) Werthe von r, s, t, die zwei Gleichungen: $r + ms = \mu$, $s + mt = \nu$, wo m, μ, ν von r, s, t frei sind, befriedigen, bilden ein einfach unendliches System, das ich einen Büschel nenne. Vgl. meine Abh. im XI. und XIII. Band d. Ann.

vereinigt liegt. Und dies gilt in gleicher Weise von denjenigen Figuren, die den Flächenelementen in R' entsprechen. Ist nun aber die Transformation (18) von der am Schlusse der vorangehenden Nummer angezeigten Beschaffenheit und S' irgend einer der Streifen, die vermittelst einer solchen Transformation aus einem Flächenelemente (z, x, y, p, q) in R entstehen, so muss, wenn das Flächenelement (z, x, y, p, q) einen der Streifen (20) durchläuft, der entsprechende Streifen S' *eine Fläche beschreiben*. Seien (z, x, y, p, q), (z', x', y', p', q') zwei einander entsprechende Flächenelemente unserer Figuren; dann kommt, wegen (22), dem letzten Flächenelemente ein gewisses Werthsystem von r', s', t' zu. Es werden nun diese p', q', r', s', t' die von der Gleichung der eben erwähnten Fläche gelieferten Werthe der ersten und zweiten Differentialquotienten von z' in Bezug auf x', y' für den Punkt (x', y', z').

Die ∞^4 *den Streifen* (20) *entsprechenden einfach unendlichen Flächenschaaren sind folglich Integrale der partiellen Differentialgleichung* 2. *O.* (23).

Jeder Fläche in R' entspricht eine partielle Differentialgleichung 1. O. in R. Einem Elemente $(z', x', y', p', q', r', s', t')$ der Fläche entsprechen ∞^2 Büschel (z, x, y, p, q, r, s, t). Daher entsprechen der Fläche in R' im Ganzen ∞^4 Büschel (z, x, y, p, q, r, s, t). Es muss nun, wenn $dp' = r'dx' + s'dy'$, $dq' = s'dx' + t'dy'$, auch sein: $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, und umgekehrt. Also erhält man alle diejenigen Elemente $(z + dz, x + dx, \cdots, q + dq)$ von der, der Fläche entsprechenden partiellen Differentialgleichung 1. O., die mit dem Elemente (z, x, y, p, q) vereinigt liegen, wenn man die Gleichungen $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$ für solche Werthe von r, s, t anwendet, die den genannten Büscheln zugehören. Deshalb werden aber die Linienrichtungen*) jener Büschel charakteristische Richtungen für die partielle Differentialgleichung 1. O.

Wenn die Fläche in R' ein Integral von (23) ist, so muss die ihr entsprechende partielle Differentialgleichung 1. O. ∞^2 Charakteristiken haben, die je einen Streifen (20) berühren.

Anm. Für Räume mehrerer Dimensionen gelten ähnliche Sätze. Man findet somit durch eine leichte Uebertragung des Vorangehenden auf den Raum von vier Dimensionen Folgendes. Durch drei Gleichungen zwischen $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', x_2', x_3', p_1', p_2', p_3'$, von denen zwei beliebig sind, ist es möglich, solche Transformationen zweier Gebiete eines Raumes von vier Dimensionen zu bestimmen, die jeden Streifen (M_1, Reihe von ∞^1 vereinigt liegenden Flächenelementen)

*) Die Linienrichtung des Büschels, dessen Gleichungen: $r + ms = \mu$, $s + mt = \nu$ sind, wird durch die Gleichungen: $dy = mdx$, $dz = pdx + qdy$ bestimmt.

einer gegebenen sechsfach unendlichen Schaar des einen Gebietes in zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. des anderen Gebietes überführen. Durch vier Gleichungen zwischen $z, x_1, \cdots, p_3, z', x_1', \cdots, p_3'$, von denen drei ganz beliebig sind, kann eine Transformation begründet werden, die jede M_2 (Reihe von ∞^2 vereinigt liegenden Flächenelementen) einer gegebenen fünffach unendlichen Schaar in zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. verwandelt. —

25. Wenn, wie oben näher auseinandergesetzt worden ist, durch drei Gleichungen zwischen den Parametern der Flächenelemente zweier Gebiete R, R' eines Raumes von drei Dimensionen die Flächen des einen Gebietes stets in Flächen des anderen verwandelt werden, so führt dagegen eine durch vier Gleichungen zwischen denselben Parametern ausgedrückte Transformation nur eine beschränkte Zahl von Flächen des einen Gebietes in Flächen des anderen über. (Vergl. Nr. 22.) Seien

$$(24)\qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_4(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

die vier Gleichungen einer Transformation. Jede Fläche in R (oder R') geht in Streifenschaaren in R' (oder R) über. Nur dann vereinigen sich diese zu Flächen, wenn die zwei partiellen Differentialgleichungen 1. O., die sie definiren, involutorisch werden. Die Bedingung dafür, dass die Fläche: $z = f(x, y)$ zu zwei solchen partiellen Differentialgleichungen in R' Anlass gebe, erhalten wir auf folgende Weise. Wir setzen in die zwei ersten der Gleichungen (24) für z, p, q die Werthe $f(x, y)$, $f'(x)$, $f'(y)$ ein, und denken uns sodann die Grössen x, y eliminirt. — Dadurch, — durch Substitution der so erhaltenen Werthe von z, x, y, p, q in z', x', y', p', q', — sind die zwei letzten Gleichungen (24) auf die Form:

$$F_3'(z', x', y', p', q') = 0,$$
$$F_4'(\qquad\qquad\qquad) = 0$$

zu bringen. Nun hat man:

$$(25)\qquad [F_3'F_4'] = [F_3F_4]_{z'x'p'} + \frac{dF_3}{dx}[xF_4] + \frac{dF_3}{dy}[yF_4]$$
$$+ \frac{dF_4}{dx}[F_3x] + \frac{dF_4}{dy}[F_3y]$$
$$+ \left(\frac{dF_3}{dx}\frac{dF_4}{dy} - \frac{dF_4}{dx}\frac{dF_3}{dy}\right)[xy].$$

Es sind F_1', F_2' identisch Null, daher:

$$[F_1'F_3] = 0 = [F_1F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[xF_3] + \frac{dF_1}{dy}[yF_3],$$

$$[F_2'F_3] = 0 = [F_2F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[xF_3] + \frac{dF_2}{dy}[yF_3],$$

$$[F_1'F_4] = 0 = [F_1F_4]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[xF_4] + \frac{dF_1}{dy}[yF_4],$$

$$[F_2'F_4] = 0 = [F_2F_4]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[xF_4] + \frac{dF_2}{dy}[yF_4],$$

$$[F_1'F_2] = 0 = [F_1F_2]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[xF_2] + \frac{dF_1}{dy}[yF_2],$$

$$[F_2'x] \quad = 0 = [F_2x]_{z'x'p'} \quad + \frac{dF_2}{dy}[yx],$$

$$[F_2'y] \quad = 0 = [F_2y]_{z'x'p'} \quad + \frac{dF_2}{dx}[xy].$$

Zur Abkürzung ist resp. $\frac{dF_i}{dx}$, $\frac{dF_i}{dy}$ statt:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial z}f'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial F_i}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z}f'(y) + \frac{\partial F_i}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

geschrieben.

Ich setze weiter:

$$\frac{dF_m}{dx}\frac{dF_n}{dy} - \frac{dF_m}{dy}\frac{dF_n}{dx} = (mn).$$

Durch Elimination von $[xF_3]$, $\cdots$, $[xy]$ aus (25) erhält man dann:

$$(12)\,[F_3'F_4'] = (34)\,[F_1F_2]_{z'x'p'} + (42)\,[F_1F_3]_{z'x'p'} + (23)\,[F_1F_4]_{z'x'p'} + (12)\,[F_3F_4]_{z'x'p'} + (13)\,[F_4F_2]_{z'x'p'} + (14)\,[F_2F_3]_{z'x'p'};$$

und die fragliche Involutionsbedingung nimmt also folgende Form an:

$$(26)\quad \begin{gathered}(34)\,[F_1F_2]_{z'x'p'} + (42)\,[F_1F_3]_{z'x'p'} + (23)\,[F_1F_4]_{z'x'p'}\\ + (12)\,[F_3F_4]_{z'x'p'} + (13)\,[F_4F_2]_{z'x'p'} + (14)\,[F_2F_3]_{z'x'p'} = 0.\end{gathered}$$

Wenn sie identisch erfüllt ist, so besteht die Figur in R', die der Fläche: $z = f(x, y)$ entspricht, aus ∞^1 Flächen. Wenn sie nicht erfüllt ist, so kann es doch geschehen, dass die drei Gleichungen:

$$F_3' = 0, \quad F_4' = 0, \quad [F_3'F_4'] = 0$$

eine, aber nur eine Integralfläche gemein haben. Hierzu ist nöthig, dass gleichzeitig mit jenen drei Gleichungen diese zwei:

$$(27)\quad \begin{aligned}\big[F_3'[F_3'F_4']\big] &= 0,\\ \big[F_4'[F_3'F_4']\big] &= 0\end{aligned}$$

erfüllt werden. In diesem Falle kommt eine Fläche in derjenigen Figur in R' vor, die der Fläche: $z = f(x, y)$ entspricht.

Sehen wir $f(x, y)$ als unbekannt an; es ist leicht zu sehen, dass, wie auch die Gleichungen (24) beschaffen sein mögen, sich immer Functionen $f(x, y)$ bestimmen lassen, für welche die Bedingungen (27) erfüllt werden. Stellen wir nämlich die Gleichungen (27) in der nämlichen Weise in einer Form dar, die auf F_1, F_2, F_3, F_4 explicite sich bezieht, wie wir vorher die Gleichung $[F_3' F_4'] = 0$ in der Form (26) dargestellt haben, und eliminiren wir dann zwischen (24), (26) und den neuen Gleichungsformen (27) die Grössen z', x', y', p', q', so erhalten wir zwei partielle Differentialgleichungen der 3. O. zur Bestimmung von $z(= f(x, y))$. Diese zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. sind immer mit einander verträglich; sie hängen sogar in der besonderen Weise zusammen, dass von den vier Gleichungen, die ihre ersten Derivirten in Bezug auf x, y bilden, eine Gleichung eine algebraische Folge der anderen ist. Vgl. Nr. 22., 5.

Die Transformation (24) *führt also eine jede Fläche, welche einer gewissen Flächenschaar zugehört, die durch zwei solche partielle Differentialgleichungen* 3. *O. definirt wird, deren erste Derivirten sich auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen reduciren, wiederum in eine bestimmte Fläche über.*

Die vierte der Gleichungen (24) könnte so bestimmt werden, dass F_4 ein Integral derjenigen Gleichung würde, auf welche die Gleichung (26) sich reducirt, falls man statt der in derselben eingehenden $f(x, y)$, $f'(x)$, $f'(y)$ setzt z, p, q und statt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ irgend welche mögliche Functionen (desselben Charakters) φ_1, φ_2, φ_3 von z, x, y, p, q. *Eine jede der dreifach unendlich vielen Integralflächen:*

$$r = \varphi_1, \quad s = \varphi_2, \quad t = \varphi_3$$

wird von der so bestimmten Transformation (24) *in eine ganze Schaar von* ∞^1 *Flächen verwandelt.* —

Die Gleichungen (24) würden schliesslich im Verein mit einer fünften Gleichung auf eine Berührungstransformation führen können. Eine solche Transformation führt bekanntlich eine jede Fläche wiederum in eine Fläche über.

§ 5.

Eine specielle Art von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der in § 1. behandelten Beschaffenheit.

26. Die partiellen Differentialgleichungen 1. O. in R_4, von denen oben die Rede gewesen ist, deren jede ∞^3 Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen zu Integralen hat, gehen bei einer dualistischen

Umformung in solche partielle Differentialgleichungen 1. O. über, deren jede ∞^3 durch je zwei Gleichungen in Ebenencoordinaten ausgedrückte Mannigfaltigkeiten zu Integralen hat. Es giebt einen Fall, in dem die partielle Differentialgleichung 1. O. ∞^3 Integrale hat, deren jedes für ihre analytische Darstellung zwei Gleichungen in Punktcoordinaten, sowie zwei Gleichungen in Ebenencoordinaten erfordert. Jeder Punkt einer solchen Integralmannigfaltigkeit hat ∞^1 Tangentenebenen und jede Tangentenebene derselben hat ∞^1 Berührungspunkte. Diese Berührungspunkte bilden eine *gerade* Mannigfaltigkeit einer Dimension, wesshalb jede der fraglichen Integralmannigfaltigkeiten aus ∞^1 Geraden zusammengesetzt ist, von denen jede eine Berührungslinie für ∞^1 Tangentenebenen bildet.

Ist durch die Gleichung:

$$F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung jener Art gegeben, so muss erstens, wenn z, x_1, x_2, x_3 als Constanten und p_1, p_2, p_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_3' aufgefasst werden, die Gleichung $F = 0$ eine Linienfläche in R_3' darstellen (Nr. 3.), weiter muss, wenn p_1, p_2, p_3 als Constanten betrachtet werden, und wenn man

$$z - z^0 = p_1(x_1 - x_1^0) + p_2(x_1 - x_2^0) + p_3(x_3 - x_3^0)$$

setzt und sodann x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_3'' auffasst, die Gleichung $F = 0$ eine Linienfläche in R_3'' repräsentiren. Hierzu treten jedoch ferner noch gewisse Integrabilitätsbedingungen, die erfüllt sein müssen.

§ 6.

Von partiellen Differentialgleichungen 1. O. in R_5 mit durch mehrere Gleichungen zwischen z, x_1, x_2, x_3, x_4 ausgedrückten Lösungen.

27. In derselben Weise, in der wir in Nr. 5. die zwei Gleichungen (5) behandelt haben, lassen sich auch die folgenden zwei Gleichungen:

$$(28) \qquad \begin{cases} f(z, z', x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \ \frac{\partial z'}{\partial x_i} = p_i'\right)$ behandeln. Es werden z, p_1, p_2, p_3 aus den Gleichungen:*)

*) in denen $[f\psi]_{zxp} = \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{df}{dx_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{d\psi}{dx_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$. Vgl. Nr. 5.

$$(29)\quad \begin{gathered} f=0,\ \varphi=0,\ [f\varphi]_{zxp}=0,\ \Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp}=0,\ \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp}=0, \\ \Big[f\big[f[f\varphi]\big]\Big]_{zxp}=0,\ \Big[\varphi\big[f[f\varphi]\big]\Big]_{zxp}=0,\ \Big[[f\varphi]\big[f[f\varphi]\big]\Big]_{zxp}=0 \end{gathered}$$

eliminirt. Die resultirenden vier partiellen Differentialgleichungen für z', von denen die erste: $\Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp}=0$, nachdem man für die Grössen z, p_1, p_2, p_3 ihre aus den vier ersten Gleichungen (29) hervorgehenden Werthe in z', x_i, p_i', p_{ik}', p_{ikl}' eingesetzt hat, von der dritten, die drei übrigen von der vierten Ordnung werden, haben desshalb ∞^∞ Integrale gemeinsam, weil sie, mit ihren Derivirten vereint, ergeben:

für die vierten Differentialquotienten von z', deren Anzahl 15 ist,
fünf Gleichungen,

für die fünften Differentialquotienten von z', deren Anzahl 21 ist,
neun Gleichungen,

für die sechsten Differentialquotienten von z', deren Anzahl 28 ist,
vierzehn Gleichungen,

u. s. w.,

also stets eine Anzahl von Gleichungen, die kleiner ist als die Anzahl der zu bestimmenden Differentialquotienten von z'.

Ein jedes Integral: $z'=\overline{f}(x_1, x_2, x_3)$ dieser Differentialgleichungen gehört mit einer gewissen Gleichung: $z=\overline{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ zusammen. Die eine dieser Gleichungen ist durch die andere eindeutig bestimmt. Jene Gleichung für z wird aus den vier ersten Gleichungen (29) durch Einsetzung des Werthes $\overline{f}$ von z' und durch Elimination von p_1, p_2, p_3 erhalten. Durch gleichzeitige Substitution von:

$$\begin{aligned} z' &= \overline{f}(x_1, x_2, x_3), \\ z &= \overline{\varphi}(\qquad\qquad), \end{aligned}$$

in die Gleichungen (28) werden diese identisch erfüllt. Die zuletzt hingeschriebenen zwei Gleichungen stellen daher, sagen wir, eine Lösung von (28) dar.

28. Gesetzt man habe eine Lösung mit sechs arbiträren Constanten gefunden:

$$(30)\quad \begin{cases} z' = \overline{f}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6), \\ z = \overline{\varphi}(\qquad\qquad\qquad\qquad), \end{cases}$$

deren Elemente $\left(z, z', x_1, x_2, x_3, p_i\left(=\frac{\partial z}{\partial x_i}\right), p_i'\left(=\frac{\partial z'}{\partial x_i}\right)\right)$ sämmtliche Elemente der Gleichungen (28) umfassen: die übrigen Lösungen, deren Existenz eben nachgewiesen worden ist, werden dann Umhüllungs-

gebilde von dreifach (oder zufällig zweifach, einfach) unendlich vielen der Lösungen (30), nämlich in folgender Weise. Wenn z, z', x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_5 von fünf Dimensionen interpretirt werden, so bilden die Gleichungen (30) den analytischen Ausdruck einer völlig bestimmten sechsfach unendlichen Schaar von Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen in R_5. Dreifach unendlich viele werden vermittelst der Gleichungen:

$$(31)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = F(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6), \\ \lambda_2 = \Phi(\qquad\quad), \\ \lambda_3 = \Psi(\qquad\quad) \end{cases}$$

ausgeschieden. Wir bilden jetzt die Gleichungen:

$$z' = \bar{f},\quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_4} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_4) = 0,$$

$$z = \bar{\varphi},\quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_4} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_4) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_5} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_5) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_5} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_5) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_6} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_6) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_6} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_6) = 0,$$

und eliminiren z, z', x_1, x_2, x_3 aus denselben. Wenn die dann resultirenden drei Gleichungen in den λ durch (31) identisch erfüllt werden, so bekommen wir, indem wir λ_4, λ_5, λ_6 eliminiren, zwei Gleichungen:

$$z' = \bar{F}(x_1, x_2, x_3),$$
$$z = \bar{\Phi}(\qquad\quad),$$

die eine Punktmannigfaltigkeit dreier Dimensionen in R_5 darstellen, welche eben die betrachtete dreifache Schaar umhüllt. Es werden nämlich die Differentialquotienten $\bar{F}'(x_i)$, $\bar{\Phi}'(x_i)$, resp. gleich $\bar{f}'(x_i)$, $\bar{\varphi}'(x_i)$ für passend gewählte Werthe von λ_4, λ_5, λ_6. Aus diesem Grunde stellt das letzte Gleichungspaar eine Lösung von (28) dar. Wir haben oben gesehen, dass es ∞^∞ Lösungen von (28) giebt, weiter ist ersichtlich, dass jede Lösung, die nicht in der Schaar (30) enthalten ist, ein Umhüllungsgebilde von der jetzt angemerkten Beschaffenheit sein muss. In Uebereinstimmung hiermit werden auch die drei oben erwähnten Gleichungen für F, Φ, Ψ von ∞^∞ Functionssystemen (31) befriedigt.

29. Fünffach unendlich viele Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen in R_5 (dem Raume, dessen Punkte z, z', x_1, x_2, x_3 zu

Coordinaten haben) führen zu drei Gleichungen zwischen z, z', x_i, p_i, p_i'; vierfach unendlich viele führen zu vier derartigen Gleichungen:

$$(32)\qquad \begin{cases} f_1(z, z', x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3') = 0, \\ f_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ f_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ f_4(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'$ zwischen diesen Gleichungen und den drei folgenden:

$$(33)\qquad \begin{cases} \pi_2 = p_1 - \pi_1 p_1', \\ \pi_3 = p_2 - \pi_1 p_2', \\ \pi_4 = p_3 - \pi_1 p_3', \end{cases}$$

und indem man hierauf z, x_1, x_2, x_3, x_4 statt z, z', x_1, x_2, x_3 setzt, resultirt eine Gleichung:

$$(34)\qquad F(z, x_1, x_2, x_3, x_4, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0,$$

welche diejenige partielle Differentialgleichung 1. O. in R_5 ist, die jene ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen zu Integralen hat. Umgekehrt muss jede nicht-linear partielle Differentialgleichung 1. O. in R_5, die eine, aus ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen bestehende vollständige Lösung besitzt, vermöge der Gleichungen (33) auf vier, oder unter Umständen nur drei Gleichungen (32) gebracht werden können. Ich betrachte nur den Fall, dass vier Gleichungen (32) resultiren.

Jene Gleichungen (32) sind keineswegs beliebig. Denn sie sollen mit einander so verbunden sein, dass sie ∞^4 gemeinsame Lösungen von der Form:

$$(35)\qquad \begin{cases} z' = \overline{F}(x_1, x_2, x_3), \\ z = \overline{\Phi}(\qquad\qquad) \end{cases}$$

gestatten. Es ist leicht, die Bedingungen hierfür zu erkennen, wie auch, wenn dieselben erfüllt sind, die gemeinsamen Lösungen zu ermitteln. Man stelle nämlich neben den Gleichungen (32) die Gleichungen:*)

*) in denen wie in Nr. 27.

$$\begin{aligned} [f_i f_k]_{zxp} = \sum_{m=1}^{m=3} \Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial f_i}{\partial z} + p_m' \frac{\partial f_i}{\partial z'} + p_{1m}' \frac{\partial f_i}{\partial p_1'} + p_{2m}' \frac{\partial f_i}{\partial p_2'} \\ + p_{3m}' \frac{\partial f_i}{\partial p_3'} \Big) \frac{\partial f_k}{\partial p_m} \\ - \sum_{m=1}^{m=3} \Big(\frac{\partial f_k}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial f_k}{\partial z} + p_m' \frac{\partial f_k}{\partial z'} + p_{1m}' \frac{\partial f_k}{\partial p_1'} + p_{2m}' \frac{\partial f_k}{\partial p_2'} \\ + p_{3m}' \frac{\partial f_k}{\partial p_3'} \Big) \frac{\partial f_i}{\partial p_m}. \end{aligned}$$

$$[f_1 f_2]_{zxp}=0, \quad [f_1 f_3]_{zxp}=0, \quad [f_1 f_4]_{zxp}=0, \quad [f_2 f_3]_{zxp}=0, \quad [f_2 f_4]_{zxp}=0,$$
$$[f_3 f_4]_{zxp}=0$$

auf, die nach Elimination von z, p_1, p_2, p_3 mit Hülfe der Gleichungen (32) sechs partielle Differentialgleichungen 2. O. zur Bestimmung von z' $(=\overline{F})$ ergeben. Die Anzahl der zweiten Differentialquotienten p'_{ik} von z' ist eben sechs. Daher werden durch die genannten Gleichungen 2. O. bestimmte Werthe für die p'_{ik} in $z', x_1, x_2, x_3, p_1', p_2', p_3'$ geliefert. Man hat nun auszudrücken, dass diese Werthe die Gleichungen:

$$(36) \quad dz'=p_1'dx_1+p_2'dx_2+p_3'dx_3, \quad dp_i'=p'_{i1}dx_1+p'_{i2}dx_2+p'_{i3}dx_3,$$
$$(i=1,2,3)$$

durch ein Gleichungssystem: $z'=\overline{F}(x_1, x_2, x_3)$, $p_i'=\overline{F}'(x_i)$ integrabel machen. Hieraus ergiebt sich sowohl der analytische Ausdruck des zwischen vier Gleichungen von der Form (32) und von der Eigenschaft, ∞^4 gemeinsame Integrale von der Form (35) zu besitzen, nothwendig bestehenden Zusammenhangs, wie auch — durch Integration eines Systems von Differentialgleichungen (36) — die Bestimmung der ∞^4 Integrale (35) solcher vier Gleichungen wie (32).

Eine Lösung wird also erhalten, die sich durch zwei Gleichungen mit vier arbiträren Parametern λ:

$$z'=\overline{F}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),$$
$$z=\overline{\Phi}(\qquad\qquad\qquad\qquad),$$

ausdrückt; d. i. der Repräsentant der vierfach unendlich vielen Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen, von denen ausgehend wir zu den Gleichungen (32) gelangt sind. Jede andere Lösung von der Form (35) würde ein Umhüllungsgebilde von dreifach oder zweifach, einfach unendlich vielen dieser Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen darstellen. [Ein solches Umhüllungsgebilde giebt es aber im Allgemeinen nicht, — ähnliche Betrachtungen wie die der Nr. 18. zeigen es; daher giebt es im Allgemeinen keine andere Lösungen von der Form (35) als die schon angemerkten.]

30. Wie überhaupt alle Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_5 die Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen darstellen, erhalten werden, leuchtet hiernach ohne Weiteres ein. Vgl. auch die Nr. 12.—14. In ähnlicher Weise bestimmen sich diejenigen, zufälliger Weise vorhandenen Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. O., die Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen desselben Raumes R_5 repräsentiren. Jedem Punkte einer Punktmannigfaltigkeit zweier Dimensionen:

$$\begin{aligned} z &= f(x_3, x_4),\\ x_1 &= \varphi(\quad),\\ x_2 &= \psi(\quad),\end{aligned}$$

schliesst sich eine zweifache Schaar von Flächenelementen*) an, die die Punktmannigfaltigkeit berühren. Die Parameter $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ dieser Flächenelemente sind gebunden an die Bedingungen:

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - \pi_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \pi_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} - \pi_3 = 0,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x_4} - \pi_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_4} - \pi_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_4} - \pi_4 = 0.\end{cases}$$

Desshalb bilden die Flächenelemente, die sich an die Mannigfaltigkeiten einer vierfach unendlichen Schaar von Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen als Berührende anschliessen, ein durch eine Gleichung:

$$(38)\quad F(z, x_1, x_2, x_3, x_4, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

zu definirendes System. Diese Gleichung wird durch Elimination der vier Parameter der Mannigfaltigkeitsschaar zwischen den drei Gleichungen derselben:

$$(39)\quad \begin{cases} z = f(x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),\\ x_1 = \varphi(\qquad\qquad),\\ x_2 = \psi(\qquad\qquad),\end{cases}$$

und den hierzu gehörigen Gleichungen (37) erhalten.

Andererseits, wenn wir z, z', z'', x, y statt z, x_1, x_2, x_3, x_4 schreiben und resp. durch p, q, p', q', p'', q'' die ersten Differentialquotienten von z, z', z'' in Bezug auf x, y bezeichnen, so wird durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ zwischen (39) und den aus ihnen folgenden Gleichungen:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_3},\quad q = \frac{\partial f}{\partial x_4},\quad p' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3},\ \cdots,\ q'' = \frac{\partial \psi}{\partial x_4}$$

ein System von fünf Gleichungen abgeleitet:

$$(40)\quad \begin{cases} f_1(z, z', z'', x, y, p, q, p', q', p'', q'') = 0,\\ f_2(\qquad\qquad) = 0,\\ f_3(\qquad\qquad) = 0,\\ f_4(\qquad\qquad) = 0,\\ f_5(\qquad\qquad) = 0,\end{cases}$$

*) Die Inbegriffe aller einem Punkte einer Punktmannigfaltigkeit von vier Dimensionen unendlich benachbarter Punkte derselben Mannigfaltigkeit werden Flächenelemente im Raume R_5 genannt.

welches also mit der partiellen Differentialgleichung 1. O. (38) äquivalent ist, — nämlich in dem Sinne, dass die Elimination von $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ zwischen der Gleichung (38) und den beiden folgenden:

$$(41) \qquad \begin{cases} p - \pi_1 p' - \pi_2 p'' - \pi_3 = 0, \\ q - \pi_1 q' - \pi_2 q'' - \pi_4 = 0 \end{cases}$$

zu einer Gleichung:

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 + ef_5 = 0,$$

wo nur a, b, c, d, e von π abhängen, — führen muss. Dies ist des Näheren folgendermassen zu verstehen. $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ werden als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4' gedeutet. Die Gleichung (38) ist dann als Repräsentant einer gewissen Flächenschaar in R_4' aufzufassen, jede Fläche als eine Punktmannigfaltigkeit dreier Dimensionen dieses Raumes betrachtet. Im vorliegenden Falle ist aber jede der Flächen aus ∞^1 ebenen Mannigfaltigkeiten zweier Dimensionen (41) erzeugt, und stellt sich daher auch in den sechs Parametern p, q, p', q', p'', q'' dieser ebenen Mannigfaltigkeiten durch fünf Gleichungen (40) dar. Eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung 1. O. in R_5, die ein vollständiges Integral von der Form (39) besitzt, muss also in den Parametern p, q, p', q', p'', q'' durch fünf Gleichungen sich darstellen lassen; weiterhin müssen solche Beziehungen zwischen den fünf Gleichungen statthaben, dass dieselben, als partielle Differentialgleichungen 1. O. für z, z', z'' betrachtet, ∞^4 gemeinsame Lösungen von der Form:

$$z = f(x, y), \quad z' = \varphi(x, y), \quad z'' = \psi(x, y)$$

gestatten.

31. Denken wir uns die fünf Gleichungen (40) nach p', q', z'', p'', q'' aufgelöst, also auf die Form gebracht:

$$\begin{aligned} p' &= f(z', z, x, y, p, q), \\ q' &= f_1(\qquad\qquad\quad), \\ z'' &= \varphi(\qquad\qquad\quad), \\ p'' &= \psi(\qquad\qquad\quad), \\ q'' &= \psi_1(\qquad\qquad\quad); \end{aligned}$$

und stellen wir die folgenden Gleichungen in $z', z, x, y, p, q, r, s, t$ auf:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \psi_1, \quad \frac{df}{dy} = \frac{df_1}{dx},$$

so muss die Elimination von z' aus ihnen zwei partielle Differentialgleichungen der 2. O. für z ergeben, die ∞^4 Lösungen gemein haben. Als eine gemeinsame Lösung muss nämlich die erste der Gleichungen (39): $z = f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ herauskommen; die zwei übrigen Glei-

chungen (39): $z' = \varphi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $z'' = \psi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ werden hernach durch blosse Elimination erhalten.

Die Gleichungen $[f_i f_k]_{zxp} = 0$, die sich aus fünf Gleichungen $f_i(z, z', z'', x, y, p, q, p', q', p'', q'') = 0$ bilden lassen, müssen also, wenn die fünf Gleichungen $f_i = 0$ einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_5 angehören, die ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen als Integrale besitzt, u. A. durch geeignete Elimination zwei und nicht mehr als zwei von einander unabhängige partielle Differentialgleichungen 2. O. für z' ergeben, und diese Gleichungen 2. O. müssen ausserdem ∞^4 gemeinsame Integrale besitzen.

Ist die Anzahl derartiger particulärer Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_5, die geometrisch Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen repräsentiren, kleiner als ∞^4, so findet man sie durch etwas einfachere Rechnungen als die jetzt beschriebenen, was manchmal darauf beruht, dass zu den Gleichungen (40) eine oder mehrere Gleichungen derselben Form hinzukommen.

§ 7.

Angabe einiger specieller Fälle der vorangehenden Probleme.

32. Ein System von zwei Gleichungen:

$$(5^*) \qquad F(x, y, z, z', p, q, q') = 0, \quad p' - q = 0$$

ist einer partiellen Differentialgleichung 2. O.:

$$F\left(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0$$

äquivalent. Indem man in den Gleichungen (5*) z, z' durch $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ ersetzt, wird die zweite dieser Gleichungen von selbst erfüllt. Einer jeden Lösung: $V = \int (A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy)$ der partiellen Differentialgleichung 2. O. entspricht eine Lösung: $z = A(x, y)$, $z' = B(x, y)$ des Systems (5*).

Die allgemeine partielle Differentialgleichung 2. O.:

$$F\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0$$

ist äquivalent dem Gleichungspaare:

$$(28^*) \quad \left\{ \begin{array}{c} F(x_1, x_2, x_3, z, z', \; p_1 + z p_3, \; p_2 + z' p_3, \; p_2' + z' p_3') = 0, \\ p_2 + z' p_3 - p_1' - z p_3' = 0, \\ \text{(wo } x_1, x_2, x_3 \text{ an Stelle von } x, y, V \text{ stehen),} \end{array} \right.$$

so dass jeder Lösung: $z = f(x_1, x_2, x_3)$, $z' = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ dieses Systems das folgende involutorische Gleichungspaar entspricht:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f(x, y, V), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \varphi(x, y, V),$$

dessen allgemeines Integral eine Schaar von Integralen (Integralflächen) der partiellen Differentialgleichung 2. O. darstellt. Jede Schaar von Integralen (Integralflächen) der partiellen Differentialgleichung 2. O.: $f(x, y, V) =$ eine arb. Const., ist in dieser Weise einer Lösung von (28*) äquivalent.

Jetzt betrachte ich diejenige partielle Differentialgleichung 2. O. des Raumes $R_4(zx_1 x_2 x_3)$, die eine durch das *involutorische* Gleichungspaar:

$$(42) \quad \begin{cases} p_1 - f(x_1, x_2, x_3, z, p_3, c_1, c_2, \cdots, c_6) = 0, \\ p_2 - \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

($c_1, c_2, \cdots, c_6$ bezeichnen arbiträre Constanten),

ausgedrückte Lösung besitzt. In erster Hand ist diese partielle Differentialgleichung 2. O. folgendermassen ausgezeichnet. Wenn für den Augenblick $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ als Constanten, und die p_{ik} als Coordinaten der Punkte eines Raumes $R^{(6)}$ aufgefasst werden, so stellt die fragliche partielle Differentialgleichung 2. O. eine Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen, eine Fläche in $R^{(6)}$ dar, *die von* ∞^4 *Geraden:*

$$\begin{aligned} p_{11} - f'(p_3)p_{31} - f'(x_1) - p_1 f'(z) &= 0, \\ p_{12} - f'(p_3)p_{32} - f'(x_2) - p_2 f'(z) &= 0, \\ p_{13} - f'(p_3)p_{33} - f'(x_3) - p_3 f'(z) &= 0, \\ p_{22} - \varphi'(p_3)p_{32} - \varphi'(x_2) - p_2 \varphi'(z) &= 0, \\ p_{23} - \varphi'(p_3)p_{33} - \varphi'(x_3) - p_3 \varphi'(z) &= 0 \end{aligned}$$

erzeugt wird. Diese Geraden gehören dem Liniensysteme an:

$$(43) \quad \begin{cases} p_{11} - mp_{31} - \mu_1 = 0, & p_{21} - np_{31} - \nu_1 = 0, \\ p_{12} - mp_{32} - \mu_2 = 0, & p_{22} - np_{32} - \nu_2 = 0, \\ p_{13} - mp_{33} - \mu_3 = 0, & p_{23} - np_{33} - \nu_3 = 0, \end{cases}$$

wo $m, n, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ Parameter und nur an die eine Bedingung gebunden sind:

$$(44) \qquad \mu_2 - n\mu_3 = \nu_1 - m\nu_3.$$

Dieses System ist u. A. so beschaffen, dass durch jeden Punkt des Raumes $R^{(6)}$ ∞^2 Gerade des Systemes gehen, auf jeder Punktmannigfaltigkeit von vier Dimensionen des Raumes ∞^3 im Allgemeinen völlig bestimmte Curven, Mannigfaltigkeiten einer Dimension, verlaufen, deren Tangenten Gerade des Systemes sind, und dass es also auf jeder Punktmannigfaltigkeit von fünf Dimensionen, jeder Fläche, eine unendlichfach unendliche Schaar derartiger Curven giebt. Nur ausnahmsweise finden sich Gerade unter diesen Curven, ausnahmsweise kann die Fläche aus ∞^4 solchen Geraden bestehen. Ist die Fläche eben, so

läuft auf derselben von jedem Punkte aus ein Büschel von ∞^1 derartigen Geraden.

Eine erste Forderung für eine partielle Differentialgleichung 2. O.:

$$F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{33}) = 0, \tag{45}$$

die erfüllt sein muss, damit sie eine Lösung von der Form (42) besitze, ist daher die, dass, durch Elimination der p_{ik} zwischen (43) und (45), neben der Gleichung (44) drei Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, m, n, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0, \\ f_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ f_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{array}\right. \tag{46}$$

oder eine kleinere Anzahl derartiger Gleichungen resultiren. Hierdurch wird nur ausgedrückt, dass jede der Flächen (45) in $R^{(6)}$ aus wenigstens ∞^4 Geraden des Systemes (43) besteht. Es kommt aber noch das hinzu, dass die Gleichungen (44), (46), wenn sie durch die folgenden Substitutionen:

$$m = \frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \quad \mu_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \mu_2 = \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z},$$

$$\mu_3 = \frac{\partial p_1}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_1}{\partial z},$$

$$n = \frac{\partial p_2}{\partial p_3}, \quad \nu_1 = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z}, \quad \nu_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_2}{\partial z},$$

$$\nu_3 = \frac{\partial p_2}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_2}{\partial z}$$

in vier Gleichungen für p_1, p_2 verwandelt werden, eine gemeinsame Lösung mit sechs arbiträren Constanten, ausgedrückt durch ein Gleichungspaar (42), gestatten müssen.

Anstatt

$$x_1, x_2, x_3, z, p_3, p_1, p_2$$

schreibe ich

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z, z',$$

und statt

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial p_3}$$

$$p_i, p_4, p_5, p_i', p_4', p_5'.$$

Die in Rede stehenden Gleichungen erhalten dann die Form:

$$p_2 + z'p_4 - p_5'(p_3 + x_5 p_4) = p_1' + zp_4' - p_5(p_3' + x_5 p_4'), \tag{44'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(z, z', x_1, x_2, \cdots, x_5, p_1 + zp_4, p_2 + z'p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + zp_4', \\ \qquad p_2' + z'p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \\ f_2(z, z', x_1, x_2, \cdots, x_5, p_1 + zp_4, p_2 + z'p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + zp_4', \\ \qquad p_2' + z'p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \\ f_3(z, z', x_1, x_2, \cdots, x_5, p_1 + zp_4, p_2 + z'p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + zp_4', \\ \qquad p_2' + z'p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \end{array}\right. \tag{46'}$$

und jede ihnen gemeinsame Lösung:

$$(47)\qquad \begin{cases} z = f(x_1, x_2, \cdots, x_5), \\ z' = \varphi(\qquad\qquad\qquad) \end{cases}$$

stellt ein involutorisches Paar von partiellen Differentialgleichungen 1. O.

$$p_1 = f(x_1, x_2, x_3, z_1, p_3),$$
$$p_2 = \varphi(\qquad\qquad\qquad)$$

dar, dessen sämmtliche Integral-M_3 Integrale der partiellen Differentialgleichung (45) werden.

Die partielle Differentialgleichung 1. O. im Raume $R_7(zz'x_1\cdots x_5)$, welche die ∞^6 Punktmannigfaltigkeiten von fünf Dimensionen:

$$(42')\qquad \begin{cases} z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, c_1, c_2, \cdots, c_6), \\ z' = \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \end{cases}$$

zur vollständigen Lösung hat, ist durch die Gleichungen (44'), (46') im Verein mit zwei anderen Gleichungen von der Form:

$$(48)\qquad \begin{cases} f_4(z, z', x_1, \cdots, x_5, p_1, \cdots p_5, p_1', \cdots, p_5') = 0, \\ f_5(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

darzustellen. Vgl. Nr. 3., 29. Wenn die Gleichung (45) keine andere Lösungen von der Form (42) als die schon angenommenen besitzt, so müssen also die Gleichungen (44'), (46') in eindeutiger Weise durch ein Gleichungspaar (48) zu einem, eine partielle Differentialgleichung 1. O. in R_7 begründenden Systeme vervollständigt werden können. Die Lösung (42), wenn nicht von vornherein gegeben, wird daher jetzt durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten. (Die Ermittelung der Punktmannigfaltigkeiten von fünf Dimensionen, die Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_7 ausmachen, erfordert nämlich Operationen derselben Beschaffenheit wie die in Nr. 7. und 29. beschriebene Ermittelung von Integralmannigfaltigkeiten zweier, dreier Dimensionen von partiellen Differentialgleichungen 1. O. in R_4, R_5 resp.)

Eine *lineare* partielle Differentialgleichung 2. O. (45) wird durch (44) und zwei andere solche Gleichungen, wie zwei der Gleichungen (46), vollständig dargestellt. Die Frage nach ihren Lösungen von der Form (42) ist daher mit der Frage nach den gemeinsamen Lösungen von der Form (47) von gewissen drei Gleichungen:

$$(44')\qquad p_2 + z'p_4 - p_5'(p_3 + x_5 p_4) = p_1' + zp_4' - p_5(p_3' + x_5 p_4'),$$

$$46'')\qquad \begin{cases} f_1(z, z', x_1, \cdots, x_5, p_1 + zp_4, p_2 + z'p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + zp_4', \\ \qquad p_2' + z'p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \\ f_2(z, z', x_1 \cdots, x_5, p_1 + zp_4, p_2 + z'p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + zp_4', \\ \qquad p_2' + z'p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0 \end{cases}$$

äquivalent.

33. Eine partielle Differentialgleichung 2. O. mit einer Lösung (42), die in der oben genannten Weise durch vier Gleichungen (44), (46) dargestellt werden kann, hat im Allgemeinen keine Lösungen von der Form (42), die eine beliebig gewählte Integral-M_3^0 der Differentialgleichung 2. O. als eigenes Integral enthält. Denn wenn es ein involutorisches Gleichungspaar gäbe, das keines der Gleichungspaare (42) wäre, dessen sämmtliche Integral-M_3^0 dennoch der Gleichung 2. O. genügten, so hätten wir auf jeder dieser M_3^0 eine einfache Schaar von M_2, die für jenes involutorische Gleichungspaar charakteristische M_2 wären und deren jede desshalb ∞^2 Büschel von Werthen der p_{ik} (43) enthielte, die sämmtlich der Gleichung 2. O. zugehörten. In Folge dessen würde jede jener M_2, als Inbegriff von ∞^2 Flächenelementen (z, x_i, p_i) betrachtet, zweifach unendlich viele charakteristische M_2 der anfänglichen Gleichungspaare (42) umhüllen. Aber wir sehen in folgender Weise, dass es im Allgemeinen, auf einer beliebigen Integral-M_3^0 der Gleichung 2. O., keine solche Umhüllungs-M_2 giebt. Wir bestimmen zu jedem Elemente (z, x_i, p_i, p_{ik}) einer (beliebig gewählten) Integral-M_3^0 der Gleichung 2. O. (44), (46) ein Gleichungspaar (42), das eben dasselbe Element (für sich und für die ersten Derivirten der Gleichungen des Paares) besitzt. Die so entstehenden dreifach unendlich vielen Gleichungspaare mögen heissen:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0.$$

Das Umhüllungsgebilde der ∞^3 Gleichungen $f = 0$ nenne ich $F(z, x_i, p_i) = 0$, dasjenige der ∞^3 Gleichungen $\varphi = 0$ nenne ich $\Phi(z, x_i, p_i) = 0$. Es besteht die Gleichung $[F\Phi] = 0$ für alle Elemente (z, x_i, p_i) der betrachteten Integral-M_3^0. Durch irgend ein Element (z, x_i, p_i) der M_3^0 legen wir die Mannigfaltigkeit einer Dimension:

(49) $$dz = \Sigma p_i\, dx_i, \quad dx_i = \varrho F'(p_i) + \sigma\Phi'(p_i),$$
$$dp_i = -[\varrho(F'(x_i) + p_i F'(z)) + \sigma(\Phi'(x_i) + p_i\Phi'(z))],$$

wo ϱ, σ Constanten bedeuten. Entsprechend den ∞^1 Zahlenwerthen von $\frac{\sigma}{\varrho}$ erhalten wir ∞^1 derartige Elementenmannigfaltigkeiten, deren Inbegriff eine auf der M_3^0 verlaufende M_2 wird. Dieselbe hat nur dann in jedem anderen Punkte als dem obigen Ausgangspunkte einen Tangentenbüschel, der die Gleichungen:

(50) $$dx_i = \varrho F'(p_i) + \sigma\Phi'(p_i)$$

befriedigt, wenn diese letzteren Gleichungen, — z, p_i mit Hülfe der Gleichungen der M_3^0 entfernt gedacht, — ein Integral von der Form: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ gestatten. Durch die Gleichung der M_3^0: $z = f(x_1, x_2, x_3)$,

vereint mit der letzten Gleichung: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$, muss alsdann die fragliche M_2 ausgedrückt sein.

Es sind $F'(p_i)$, $\Phi'(p_i)$ resp. proportional $f'(p_i)$, $\varphi'(p_i)$, und solche Gleichungen wie:

$$dx_i = \varrho f'(p_i) + \sigma\varphi'(p_i), \quad dz = \Sigma p_i dx_i,$$
$$dp_i = -\varrho[f'(x_i) + p_i f'(z)] - \sigma[\varphi'(x_i) + p_i\varphi'(z)],$$

— wo $\frac{\sigma}{\varrho}$ einen unbestimmten, herauszueliminirenden Parameter bezeichnet, — gehören einer charakteristischen M_2 von einem der Gleichungspaare:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0$$

an. Desshalb wird die eben angemerkte $M_2 : z = f(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$, aufgefasst als Inbegriff von ∞^2 Flächenelementen (z, x_i, p_i), in einem beliebigen ihrer Elemente (z, x_i, p_i), von einer Mannigfaltigkeit [von ∞^2 Flächenelementen] berührt, die eine charakteristische M_2 eines Gleichungspaares: $f = 0$, $\varphi = 0$ ist. Im vorliegenden Falle, — und nur in solchem Falle, — ist also jene M_2 (49) ein Umhüllungsgebilde von ∞^2, für ebensoviele der anfänglichen Gleichungspaare (42) charakteristischen M_2.

Sollen auf der betrachteten M_3^0 ∞^1 M_2 (49) von der zuletzt besprochenen Eigenschaft liegen, so müssen die Gleichungen (50) ein Integral: $\varphi(x_1, x_2, x_3) =$ eine arb. Const., besitzen. Dafür ist aber erforderlich, dass die folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}[F\Phi] & F'(p_1) & \Phi'(p_1) \\ \frac{\partial}{\partial p_2}[F\Phi] & F'(p_2) & \Phi'(p_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_3}[F\Phi] & F'(p_3) & \Phi'(p_3) \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt werde, wenn man, nach vollendeten Differentiationen, für z, p_i ihre aus der Gleichung: $z = f(x_1, x_2, x_3)$ der vorgelegten M_3^0 folgenden Ausdrücke in x_1, x_2, x_3 substituirt.

Weil dies eine neue Bedingung ist, so sind im Allgemeinen die M_2 (49) keine Umhüllungsgebilde von für Paare (42) charakteristischen M_2.*) Und also kann es im Allgemeinen kein involutorisches Paar

*) Ich habe mich früher in diesem Punkte geirrt, da ich in meiner Abh. in diesen Annalen Bd. XV, pp. 83, 84 den Satz aufstellte, dass sich auf jeder Integralfläche der partiellen Differentialgleichung 2. O. ∞^1 Umhüllungs-M_2 von der im Texte besprochenen Art, die daher besondere charakteristische M_2 für die Gleichung 2. O. werden würden, finden sollten. Aus dem oben Auseinander-

von partiellen Differentialgleichungen 1. O. geben, das jene jetzt betrachtete M_3^0 als Integral enthält und dessen sämmtliche übrige Integral-M_3^0 zugleich Integrale der partiellen Differentialgleichung 2. O. werden. Wie im Anfange dieser Nummer behauptet war.

In Betreff der partiellen Differentialgleichungen 2. O. in Räumen von mehreren Dimensionen, die intermediäre Integrale, ausgedrückt durch je zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O., besitzen, will ich nur an die in Nr. 11. und der vorangehenden Nr. 9. erörterte partielle Differentialgleichung 2. O. für ψ erinnern als Beispiel einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. in einem Raume von sechs Dimensionen, die ∞^∞ derartige intermediäre Integrale besitzt.

34. Schaaren von Integral-M_3^0 der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 2. O. in R_4 sind erst durch Schaaren von je drei involutorischen partiellen Differentialgleichungen 1. O. darzustellen. Wenn $F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{33}) = 0$ die Gleichung ist, so wird sie also äquivalent dem Systeme der vier Gleichungen:

$$F\Big(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \; \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \cdots, \frac{\partial p_3}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_3}{\partial z}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{\partial p_3}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_3}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{\partial p_3}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_3}{\partial z}$$

in dem Sinne, dass jede Lösung:

$$p_1 = f(z, x_1, x_2, x_3),$$
$$p_2 = \varphi(\qquad),$$
$$p_3 = \psi(\qquad)$$

dieses Systems eben eine Schaar Integral-M_3^0:

$$\int (dz - f\,dx_1 - \varphi\,dx_2 - \psi\,dx_3) = 0$$

der partiellen Differentialgleichung 2. O. liefert. Die allgemeine partielle Differentialgleichung 2. O. in R_4 bildet daher einen speciellen Fall eines Systems von der Form:

---

gesetzten leuchtet das Fehlerhafte einer solchen Behauptung ein. Ich habe auch schon in XVI. Bd. dieser Annalen (zweite Seite des Inhaltsverzeichnisses) jenen von mir in der erwähnten Abhandlung begangenen Fehler angemerkt.

$$f_1(z,z',z'',x_1,\cdots,x_4,p_1+zp_4,\cdots,p_3+z''p_4,p_1'+zp_4',\cdots,p_3'+z''p_4',$$
$$p_1''+zp_4'',\cdots,p_3''+z''p_4'')=0,$$
$$f_2(z,z',z'',x_1,\cdots,x_4,p_1+zp_4,\cdots,p_3+z''p_4,p_1'+zp_4',\cdots,p_3'+z''p_4',$$
$$p_1''+zp_4'',\cdots,p_3''+z''p_4'')=0,$$
$$f_3(z,z',z'',x_1,\cdots,x_4,p_1+zp_4,\cdots,p_3+z''p_4,p_1'+zp_4',\cdots,p_3'+z''p_4',$$
$$p_1''+zp_4'',\cdots p_3''+z''p_4'')=0,$$
$$f_4(z,z',z'',x_1,\cdots,x_4,p_1+zp_4,\cdots,p_3+z''p_4,p_1'+zp_4',\cdots,p_3'+z''p_4',$$
$$p_1''+zp_4'',\cdots,p_3''+z''p_4'')=0,$$

und zwar hat das der partiellen Differentialgleichung 2. O. in R_4 entsprechende System ∞^{∞} Lösungen:

$$z=f(x_1,\cdots,x_4),\quad z'=\varphi(x_1,\cdots,x_4),\quad z''=\psi(x_1,\cdots,x_4).$$

Helsingborg im Juli 1880.

Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung.

Von

J. Freyberg in Dresden.

Im siebenten Bande der Math. Annalen p. 497 ff. hat Hr. Dersch die Aufgabe, eine Curve anzugeben, die durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten läuft, mit symbolischer Rechnung behandelt. Nachstehend soll gezeigt werden, dass sich die von ihm erhaltenen Resultate für Curven 4. Ordnung vereinfachen lassen, indem hier der von Hesse eingeschlagene Gedankengang auch die kürzeste symbolische Darstellung gestattet.

Die gesuchte Gleichung ist zu entwickeln aus der Discriminante:

$$3a_x^2a_y^2 \cdot a_y^4 - 2\,(a_xa_y^3)^2 = 0$$

unter den Bedingungen:

$$a_x^4 = 0, \quad a_x^3a_y = 0, \quad u_y = 0,$$

indem man aus den beiden letzten der Bedingungsgleichungen die y vermittelst x und u ausdrückt, und im Weiteren zeigt, dass alle willkürlichen Grössen u herausgehen und nur eine Gleichung 14. Grades in x allein zurückbleibt.

Für den Schnittpunkt der Tangente $a_x^3a_y = 0$ und der beliebigen Geraden $u_y = 0$ erhält man die Coordinaten

$$y_i = b_x^3 \widehat{b u_i},$$

so dass

$$a_y = b_x^3\,(abu)$$

wird.

Vermittelst der Werthe von y_i stellt man den Ausdruck $a_x^2a_y^2$ direct her, und leitet daraus durch Polarisirung $a_xa_y^3$ und a_y^4 ab, wobei zu beachten ist, dass

$$\sum \frac{da_y}{dx_i}\, y_i = 3b_x^2b_y(abu).$$

Es sei voraus bemerkt, dass es nicht nöthig ist, in den nachfolgenden Rechnungen die mit $a_x^4 = b_x^4 = \cdots = 0$ multiplicirten Ausdrücke mitzuführen, da aus denselben durch den später anzuwendenden Polarisationsprocess nur Ausdrücke erhalten werden, welche verschwinden.

Man erhält für:

$$a_x^2 a_y^2 = a_x^2 b_x^3 c_x^3 (abu)(acu)$$
$$= -\tfrac{1}{2} a_x^2 b_x^2 c_x^2 \left\{b_x(acu) - c_x(abu)\right\}^2$$
$$= -\tfrac{1}{2} a_x^2 b_x^2 c_x^2 \left\{a_x(cbu) + u_x(abc)\right\}^2$$
$$= a_x^3 b_x^2 c_x^2 (bcu)(abc) \cdot u_x - \tfrac{1}{2} a_x^2 b_x^2 c_x^2 (abc)^2 \cdot u_x^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\, \alpha_x^6 \cdot u_x^2 - \tfrac{1}{2}\, \alpha_x^6 \cdot u_x^2,$$

also

(I) $$a_x^2 a_y^2 = -\tfrac{1}{6}\, \alpha_x^6 \cdot u_x^2.$$

Durch Polarisirung des Ausdrucks für $a_x^2 a_y^2$ in Bezug auf x ergiebt sich:

$$2 a_x a_y^3 + 2 a_x^2 a_y \cdot 3 b_x^2 b_y (abu) = -\, \alpha_x^5 \alpha_y u_x^2 - \tfrac{1}{3}\, \alpha_x^6 u_x u_y$$

oder:

(II) $$a_x a_y^3 = -\tfrac{1}{2}\, \alpha_x^5 \alpha_y \cdot u_x^2.$$

Wird jetzt noch die Gleichung (II) polarisirt, so bekommt man:

$$a_y^4 + 9\, a_x a_y^2\, b_x^2 b_y\, (abu)$$
$$= -\tfrac{5}{2}\, \alpha_x^4 \alpha_y^2 \cdot u_x^2 - \alpha_x^5 \alpha_y \cdot u_x u_y - \tfrac{3}{2}\, \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u) \cdot u_x^2.$$

Das zweite Glied der linken Seite lässt sich folgendermassen umformen:

$$a_x a_y^2\, b_x^2 b_y\, (abu)$$
$$= a_x \cdot b_x^2 b_y (abu)\, c_x^3 d_x^3 (acu)(adu)$$
$$= -\tfrac{1}{2} a_x b_x^2 b_y (abu)\, c_x^2 d_x^2 \left\{c_x(adu) - d_x(acu)\right\}^2$$
$$= -\tfrac{1}{2} a_x b_x^2 b_y (abu)\, c_x^2 d_x^2 \left\{a_x(dcu) + u_x(acd)\right\}^2$$
$$= -\tfrac{1}{2} a_x^3 b_x^2 b_y c_x^2 d_x^2 (abu)(cdu)^2$$
$$+ a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2 b_y (abu)(cdu)(acd) \cdot u_x$$
$$- \tfrac{1}{2} a_x b_x^2 c_x^2 d_x^2 b_y (abu)(acd)^2 \cdot u_x^2.$$

In dieser Gleichung wird das erste Glied

$$\tfrac{1}{2} b_x^2 b_y^2 \cdot c_x^2 d_x^2 (cdu)^2 = -\tfrac{1}{12}\, \alpha_x^6 a_x^2 b_x^2 (abu)^2 \cdot u_x^2,$$

das zweite

$$\tfrac{1}{3}\, a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2 (acd) \left\{(cdu)(abu) + (dau)(cbu) + (acu)(dbu)\right\} \cdot u_x.$$

Dieser Ausdruck wird Null, da die Summe der drei Determinantenproducte diesen Werth hat. Das letzte Glied lässt sich auf die Form bringen:

$$-\tfrac{1}{2}\, \alpha_x^5 b_x^2 b_y\, (\alpha b u) \cdot u_x^2,$$

daher

$$9 a_x a_y^2 b_x^2 b_y (abu)$$
$$= u_x^2 \left\{-\tfrac{3}{4} \alpha_x^6 a_x^2 b_x^2\, (abu)^2 - \tfrac{9}{2}\, \alpha_x^5\, b_x^2 b_y\, (\alpha b u)\right\},$$

mithin

(III) $$a_y^4 = u_x^2 \left\{\tfrac{3}{4}\, \alpha_x^6\, a_x^2 b_x^2 (abu)^2 + 3 \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u) - \tfrac{5}{2}\, \alpha_x^4 \alpha_y^2\right\}.$$

Mit Hilfe der drei vorstehend entwickelten Ausdrücke lässt sich nun die Discriminante angeben zu:.

$$u_x^4 \cdot \tfrac{1}{2}\left\{-\tfrac{3}{4}\alpha_x^6 \cdot \beta_x^6 \cdot a_x^2 b_x^2 (abu)^2 - 3\beta_x^6 \cdot \alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u)\right.$$
$$\left. - \alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_y \beta_y + \tfrac{5}{2}\beta_x^6 \cdot \alpha_x^4 \alpha_y^2\right\} = 0.$$

Es verbleibt also die in der Klammer stehende Gleichung 16. Grades zur Betrachtung.

Ersetzt man in derselben die y überall durch die x, so wird:

$$\begin{aligned}
&\alpha_x^5 b_x^2 b_y (\alpha b u)\\
=\ &\alpha_x^5 b_x^2 (\alpha b u)\, a_x^3 (b a u)\\
=\ &-\tfrac{1}{2}\alpha_x^6 \cdot a_x^2 b_x^2 (abu)^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_x^5 a_x^2 b_x^2 (abu)(\alpha a b)\cdot u_x,\\
&\alpha_x^5 \beta_x^5 \alpha_y \beta_y\\
=\ &\alpha_x^5 \beta_x^5 a_x^3 b_x^3 (\alpha a u)(\beta b u)\\
=\ &-\tfrac{1}{2}\alpha_x^6 \cdot \beta_x^6 \cdot a_x^2 \cdot b_x^2 (abu)^2 + \beta_x^6 \cdot \alpha_x^5 a_x^2 b_x^2 (abu)(\alpha a b)\cdot u_x\\
&-\tfrac{1}{2}\alpha_x^5 \beta_x^5 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)(\beta a b)\cdot u_x^2,\\
&\alpha_x^4 \alpha_y^2\\
=\ &\alpha_x^4 a_x^3 b_x^3 (\alpha a u)(\alpha b u)\\
=\ &-\tfrac{1}{2}\alpha_x^6 \cdot a_x^2 b_x^2 (abu)^2 + \alpha_x^5 a_x^2 b_x^2 (abu)(\alpha a b)\cdot u_x\\
&-\tfrac{1}{2}\alpha_x^4 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)^2 \cdot u_x^2.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung dieser Werthe reducirt sich die gesuchte Gleichung nach Absonderung des Factors $\frac{1}{4}u_x^2$ auf:

$$2\alpha_x^5 \beta_x^5 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)(\beta a b) - 5\beta_x^6 \cdot \alpha_x^4 a_x^2 b_x^2 (\alpha a b)^2 = 0\,.$$

Dresden, Anfang August 1880.

Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie.

Von

A. Mayer in Leipzig.

Für die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten, das nur inneren Anziehungen ausgesetzt ist und das sich wie ein freier starrer Körper zu bewegen vermag, liefern die allgemeinen Principe der Mechanik 10 Integrale. Diese 10 Integrale zerfallen in zwei Gruppen von ganz verschiedenem Charakter. Die erste Gruppe besteht nur aus dem Einen Integrale der lebendigen Kraft, welches (verbunden selbstverständlich mit den etwaigen Bedingungsgleichungen des Systems und den gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte) alle Daten enthält, die zur eindeutigen Bestimmung der Bewegung erforderlich sind, und welches daher nothwendig einzig, oder so zu sagen der analytische Ausdruck des dynamischen Problems selbst ist. Die zweite Gruppe dagegen wird gebildet von den 3 Flächen — und den 6 Schwerpunkts-Integralen, die unverändert gelten, wie sich auch die Kräftefunction durch die gegenseitigen Entfernungen der Punkte ausdrücken mag. Diese letzteren Integrale, da sie nicht nur Einem, sondern unendlich vielen dynamischen Problemen angehören, brauchen nicht nothwendig einzig zu sein und die wichtige Frage, ob es noch andere allgemeine Integrale dieser zweiten Art gebe, wird natürlich bloss durch den Einwurf, dass man dieselben sonst schon längst würde gefunden haben, noch nicht erledigt. Mit ihrer Beantwortung beschäftigt sich der erste Paragraph der vorliegenden Arbeit, in der ich mich immer auf die Betrachtung solcher Kräfte beschränke, die nur von den Lagen, nicht aber auch von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte abhängen.

An den Beweis, dass es keine anderen allgemeinen Principe der Mechanik von derselben Natur giebt, wie die drei bekannten Principe der lebendigen Kraft, der Flächen und des Schwerpunkts, reiht sich dann in den folgenden Paragraphen die zweite Frage an, wie weit man bei der jetzigen Ausbildung der Integrationsmethoden durch diese

allgemeinen Integrale ein jedes Problem aus der Dynamik eines Systems materieller Punkte führen könne. Lie hat diese zweite Frage nur für das Problem der drei Körper, oder was auf dasselbe hinausläuft, für ein System freier Punkte beantwortet.*) Nun ergiebt sich allerdings auch für ein durch Bedingungsgleichungen beschränktes System die Antwort ganz von selbst**), wenn man meine oder die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. mit dem Satze von Jacobi***) verbindet, dass, wie man auch durch Einführung unabhängiger Bestimmungsstücke die Differentialgleichungen der Bewegung auf die kanonische Form:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

bringen möge, doch stets aus den 3 Flächensätzen 3 solche Integrale

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad f_3 = \alpha_3$$

dieses kanonischen Systems hervorgehen, die zu einander in den Beziehungen stehen:

$$(f_2 f_3) = f_1, \quad (f_3 f_1) = f_2, \quad (f_1 f_2) = f_3.$$

Allein die Art, wie Jacobi zu diesem Satze gelangt, ist äusserst complicirt. Zwar hat später Mathieu†) die ganze Rechnung viel klarer und übersichtlicher gestaltet, immerhin aber bedarf man zum Beweise des Satzes noch eines recht grossen Apparates. Daher war es mir sehr angenehm, zu sehen, wie das fundamentale Theorem, welches Lie in Bd. XI, p. 476 dieser Annalen gegeben hat, allein schon die aufgeworfene Frage im Wesentlichen zu beantworten gestattet. Sind auch diese Anwendungen des genannten Satzes für denjenigen ziemlich selbstverständlich, der sich eingehender mit den Lie'schen Methoden beschäftigt hat, so müssen sie doch eben gemacht werden, um den ganzen Nutzen klar zu legen, der sich aus diesen Methoden für die Dynamik ziehen lässt, und als gute Beispiele und Illustrationen zum Lie'schen Theorem dürften sie auch an sich selbst einiges Interesse darbieten. Hierbei benutze ich zunächst in § 2. nur die gewöhnliche Art, die Differentialgleichungen der unfreien Bewegung durch Einführung unabhängiger Bestimmungsstücke des Systems auf die kanonische Form zu bringen, wende aber dann in § 3. noch eine zweite, jeder Zeit wirklich durchführbare Transformation dieser Differentialgleichungen an, die selbst wieder nur eine Anwendung der allgemeinen Methode von Clebsch, die Differentialgleichungen der

*) Diese Annalen Bd. VIII, p. 282, Bd. XI, p. 478.

**) Vgl. Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1879, p. 40.

***) Borchardt's J. Bd. 60, pp. 106, 146, 149.

†) Liouville J. 1874, Dynamique analytique, Paris 1878, p. 243.

Variationsrechnung in kanonische Gleichungen zu verwandeln*), auf die dynamischen Differentialgleichungen ist, und bei der sich alle Verhältnisse noch durchsichtiger und klarer gestalten, als bei der ersten Umformung. Die in diesem zweiten Theile des Aufsatzes benutzten Definitionen und Sätze von Lie finden sich in Bd. VIII, pp. 248, 252, 259 dieser Annalen und das Lie'sche Fundamentaltheorem selbst brauche ich hier in der folgenden speciellen Form:

Theorem I. *Es sei die gegebene partielle Differentialgleichung* 1. *O. mit* μ *unabhängigen Variabeln:*

$$f_1(x_1 \cdots x_\mu\, p_1 \cdots p_\mu) = \text{const.}, \qquad \left(p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}\right)$$

vollständig zu integriren unter der Voraussetzung, dass man von ihrer Charakteristik:

$$(f_1 f) \equiv \sum_{i=1}^{i=\mu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0$$

bereits eine Reihe von Lösungen $f = f_1, f_2, \cdots, f_s$ *kennt, die eine Gruppe bilden. Enthält dann diese Gruppe ausser* f_1 *noch* m *ausgezeichnete Functionen, so verlangt die vollständige Integration der gegebenen Gleichung höchstens nur noch die Operationen:*

$$2\mu - 1 - s - m,\ 2\mu - 1 - s - m - 2,\ \cdots,\ 6,\ 4,\ 2.$$

In diesem Satze wird unter einer Operation n die Auffindung irgend eines Integrales von einem System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O. verstanden und das Wort „höchstens" soll (hier und in allem Folgenden) aussagen, dass der erste Schritt, der bei den gemachten Annahmen zur weiteren Lösung des Problems auszuführen wäre, stets in einer Operation von der zuerst angegebenen Ordnung besteht, wogegen von den übrigen Operationen unter Umständen einige und sogar alle wegfallen können.

§ 1.

Die erste der oben aufgeworfenen Fragen lässt sich, wenn man bei ihr auch die Flächen- und Schwerpunktsintegrale selbst wiederfinden will, als Aufgabe also formuliren:

Man soll alle diejenigen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von n *materiellen Punkten finden, die unverändert Geltung behalten, welche Function der gegenseitigen Entfernungen man auch für die Kräftefunction* U *nehmen und welche Bedingungen man diesen Entfernungen vorschreiben mag.*

---

*) Borchardt's Journal, Bd. 55, p. 337.

Betrachtet man nun ein System von n freien Punkten, nennt in Bezug auf ein im Raume festes rechtwinkliges Axensystem $x_i y_i z_i$ die Coordinaten der Masse m_i des Systems und setzt:

$$m_i x_i' = p_i, \quad m_i y_i' = q_i, \quad m_i z_i' = r_i,$$

so werden die Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung des Systems durch die Charakteristik definirt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + r_i \frac{\partial f}{\partial z_i}\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial r_i}\right) = 0.$$

Ist aber U eine blosse Function der gegenseitigen Entfernungen

$$r_{i\varkappa} = [(x_i - x_\varkappa)^2 + (y_i - y_\varkappa)^2 + (z_i - z_\varkappa)^2]^{1/2}$$

der Punkte des Systems, so hat man:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 2 \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\partial U}{\partial r_{i\varkappa}^2}(x_i - x_\varkappa),$$

also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\partial U}{\partial r_{i\varkappa}^2}(x_i - x_\varkappa)\left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_\varkappa}\right).$$

Soll daher die obige Charakteristik identisch erfüllt werden, welche Function der $r_{i\varkappa}^2$ man auch für U setzen mag, so muss f eine gemeinsame Lösung der Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i}\left(p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + r_i \frac{\partial f}{\partial z_i}\right) = 0$$

und der $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen:*)

$$\text{(II)} \qquad (x_i - x_\varkappa)\left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_\varkappa}\right) + (y_i - y_\varkappa)\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_\varkappa}\right)$$
$$+ (z_i - z_\varkappa)\left(\frac{\partial f}{\partial r_i} - \frac{\partial f}{\partial r_\varkappa}\right) = 0$$

sein und man sieht leicht, dass jede solche gemeinsame Lösung auch dann noch ein Integral der dynamischen Differentialgleichungen liefert, wenn die Beweglichkeit des Systems durch irgend welche Bedingungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen seiner Punkte beschränkt ist. Unsere Aufgabe kommt also darauf zurück, alle gemeinsamen Lösungen der Charakteristiken (I) und (II) zu finden.

---

*) die sich jedoch auf $3n - 6$ reduciren, sobald $n > 4$ ist.

Nun ist:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} f = F(p_h q_h r_h u_h v_h w_h), \quad \text{wo } h = 1, 2, \cdots n \text{ und} \\ u_h = m_h x_h - p_h t, \quad v_h = m_h y_h - q_h t, \quad w_h = m_h z_h - r_h t, \end{cases}$$

die allgemeine Lösung der Charakteristik (I) und durch die Substitutionen (III) geht die Charakteristik (II) über in:

$$\left[\frac{u_i}{m_i} - \frac{u_\varkappa}{m_\varkappa} + \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_\varkappa}{m_\varkappa}\right) t\right]\left[\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_\varkappa} - t\left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_\varkappa}\right)\right] + \cdots = 0.$$

Jede gemeinsame Lösung der beiden Charakteristiken (I) und (II) muss daher eine solche Function der $6n$ Argumente $p_h q_h r_h u_h v_h w_h$ sein, die gleichzeitig die 3 Charakteristiken erfüllt:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \left(\frac{u_i}{m_i} - \frac{u_\varkappa}{m_\varkappa}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_\varkappa}\right) + \cdots = 0, \\ \left(\frac{u_i}{m_i} - \frac{u_\varkappa}{m_\varkappa}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_\varkappa}\right) + \cdots = \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_\varkappa}{m_\varkappa}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_\varkappa}\right) + \cdots, \\ \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_\varkappa}{m_\varkappa}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_\varkappa}\right) + \cdots = 0. \end{cases}$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt unmittelbar, dass

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} p_i + p_\varkappa = p', \quad q_i + q_\varkappa = q', \quad r_i + r_\varkappa = r', \\ u_i + u_\varkappa = u', \quad v_i + v_\varkappa = v', \quad w_i + w_\varkappa = w' \end{cases}$$

gemeinsame Lösungen derselben sind. Führt man daher diese Grössen zusammen mit den folgenden:

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} \frac{p_i}{m_i} - \frac{p_\varkappa}{m_\varkappa} = p, \quad \frac{q_i}{m_i} - \frac{q_\varkappa}{m_\varkappa} = q, \quad \frac{r_i}{m_i} - \frac{r_\varkappa}{m_\varkappa} = r, \\ \frac{u_i}{m_i} - \frac{u_\varkappa}{m_\varkappa} = u, \quad \frac{v_i}{m_i} - \frac{v_\varkappa}{m_\varkappa} = v, \quad \frac{w_i}{m_i} - \frac{w_\varkappa}{m_\varkappa} = w \end{cases}$$

als neue Variabeln ein, so gehen die Charakteristiken (IV) über in:

$$A(F) \equiv u\frac{\partial F}{\partial p} + v\frac{\partial F}{\partial q} + w\frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

$$B(F) \equiv u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v} + w\frac{\partial F}{\partial w} - p\frac{\partial F}{\partial p} - q\frac{\partial F}{\partial q} - r\frac{\partial F}{dr} = 0,$$

$$C(F) \equiv p\frac{\partial F}{\partial u} + q\frac{\partial F}{\partial v} + r\frac{\partial F}{\partial w} = 0.$$

Diese 3 von einander unabhängigen Charakteristiken enthalten nur 6 unabhängige Variable; sie können daher nicht mehr als 3 unabhängige gemeinsame Lösungen besitzen. Ueberdies ist:

$$A(C(F)) - C(A(F)) \equiv B(F).$$

Jede gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen $A(F) = 0$ und $C(F) = 0$ ist also auch eine Lösung von $B(F) = 0$. Diese beiden Gleichungen haben aber, wie man nach Integration einer derselben aus der Symmetrie sogleich erkennt, die 3 unabhängigen Lösungen gemein:

$$vr - wq = x, \quad wp - ur = y, \quad uq - vp = z.$$

Nach (V) und (VI) ist also:

$$F = \Phi(p' q' r' u' v' w' x y z),$$

wo x, y, z die Werthe haben:

$$x = \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{v_\varkappa}{m_\varkappa}\right)\left(\frac{r_i}{m_i} - \frac{r_\varkappa}{m_\varkappa}\right) - \left(\frac{w_i}{m_i} - \frac{w_\varkappa}{m_\varkappa}\right)\left(\frac{q_i}{m_i} - \frac{q_\varkappa}{m_\varkappa}\right), \cdots,$$

die allgemeine Lösung des Systems (IV). Nach (V) hat man aber:

$$v_i r_\varkappa + v_\varkappa r_i = (v' - v_\varkappa) r_\varkappa + (v' - v_i)\, r_i = v' r' - v_\varkappa r_\varkappa - v_i r_i,$$

also kann man

$$x = \frac{v_i r_i - w_i q_i}{m_i^2} + \frac{v_\varkappa r_\varkappa - w_\varkappa q_\varkappa}{m_\varkappa^2} - \frac{v_i r_\varkappa + v_\varkappa r_i - w_i q_\varkappa - w_\varkappa q_i}{m_i m_\varkappa}$$

auch so schreiben:

$$x = -\frac{v' r' - w' q'}{m_i m_\varkappa} + \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_\varkappa}\right)\left(\frac{v_i r_i - w_i q_i}{m_i} + \frac{v_\varkappa r_\varkappa - w_\varkappa q_\varkappa}{m_\varkappa}\right)$$

und daher, wenn man:

$$\frac{v_i r_i - w_i q_i}{m_i} + \frac{v_\varkappa r_\varkappa - w_\varkappa q_\varkappa}{m_\varkappa} = x', \cdots$$

setzt, die allgemeine Lösung des Systems (IV) auch in der Form annehmen:

$$F = \Phi(p' q' r' u' v' w' x' y' z').$$

Hieraus erhält man nach (III) und (V) für die allgemeine gleichzeitige Lösung f der beiden Charakteristiken (I) und (II):

$$f = F(p' q' r' u' v' w' x' y' z' u_h v_h w_h),$$

worin:

$$p' = p_i + p_\varkappa, \cdots$$
$$u' = m_i x_i + m_\varkappa x_\varkappa - t(p_i + p_\varkappa), \cdots$$
$$x' = y_i r_i - z_i q_i + y_\varkappa r_\varkappa - z_\varkappa q_\varkappa, \cdots$$

und für h alle Zahlen $1, 2, \cdots, n$, mit Ausnahme allein von i und $\varkappa$ zu setzen sind.

Soll nun diese Lösung allen Charakteristiken (II) genügen, so

muss sie ungeändert bleiben, welche Werthe man auch den beiden Indices i und x geben mag. Daraus erhellt aber, dass

$$f = f(PQRUVWXYZ),$$

wo

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} P = \sum_{i=1}^{i=n} p_i, \cdots, \\ U = \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i - t \sum_{i=1}^{i=n} p_i, \cdots, \\ X = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i r_i - z_i q_i), \cdots, \end{cases}$$

die allgemeinste Form der Function f ist, welche gleichzeitig der Charakteristik (I) und allen Charakteristiken (II) genügt. Mit anderen Worten also: Die $1 + \frac{n(n-1)}{2}$ Charakteristiken (I) und (II) besitzen zusammen nur die 9 von einander unabhängigen Lösungen (VII), *oder es giebt ausser den Schwerpunkts- und Flächenintegralen keine Integrale der dynamischen Differentialgleichungen, deren Form unabhängig wäre von den gegenseitigen Anziehungen der Punkte des Systems.*

§ 2.

Um bei der zweiten Frage, wie weit man durch die Lie'schen Methoden ein jedes dynamische Problem führen kann, in welchem die allgemeinen Principe gelten, mit möglichst wenig Formeln auszukommen, wird es zweckmässig sein, die Bezeichnung zu ändern.

Ich betrachte wieder ein System von n materiellen Punkten, das sich unter dem Einflusse einer Kräftefunction U bewegt, nenne aber jetzt, bezogen auf das unbewegliche Axensystem,

$$\xi_h, \; \xi_{n+h}, \; \xi_{2n+h}$$

die rechtwinkligen Coordinaten der Masse m_h des Systems und setze:

$$m_h = m_{n+h} = m_{2n+h},$$

sodass die lebendige Kraft des Systems durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3n} m_i \xi_i'^2$$

ausgedrückt wird.

Bezeichnen dann

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_r = 0$$

die vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen des Systems, die ich der Einfachheit halber gleich von vornherein frei von t voraussetzen will,

so wird die Aufgabe, die Bewegung des Systems zu bestimmen, gelöst durch die $3n$ Differentialgleichungen 2. O.

$$m_i \xi_i'' = \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \lambda_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i} \tag{2}$$

in Verbindung mit den r Bedingungsgleichungen (1), oder diese Aufgabe ist (abgesehen event. von der verschiedenen Bestimmungsart der Integrationsconstanten) identisch mit dem Hamilton'schen Probleme:

II. *Die $3n$ Coordinaten $\xi_1 \cdots \xi_{3n}$, die durch die r gegebenen Bedingungsgleichungen* (1) *verbunden sind, so zu bestimmen, dass*

$$\delta \int (T + U)\, dt = 0$$

werde.

Aus den Bedingungsgleichungen (1) folgt nun durch Differentiation nach der Zeit t:

$$\frac{d\varphi_\varkappa}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \xi_i' \equiv \varphi_\varkappa' = 0,$$

$$\frac{d\varphi_\varkappa'}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \xi_i'' + \sum_{i=1}^{i=3n} \xi_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} = 0.$$

Setzt man in den letzten Gleichungen für die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten ihre Werthe aus den Gleichungen (2) ein, so erhält man zur Bestimmung der Multiplicatoren λ die r linearen Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \lambda_\varrho \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i} \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=3n} \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \xi_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \right).$$

Es seien:

$$\lambda_1 = L_1, \cdots, \lambda_r = L_r$$

ihre Auflösungen. Substituirt man dieselben in (2) und führt zugleich diese Differentialgleichungen 2. O. auf Differentialgleichungen 1. O. zurück, so verwandeln sich die Gleichungen (2) in die $6n$ Differentialgleichungen 1. O.

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \xi_i', \quad m_i \frac{d\xi_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i} \tag{4}$$

und in Folge der Bestimmungsart der L_ϱ wird durch Substitution dieser Differentialgleichungen identisch

$$\frac{d\varphi_\varkappa'}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_\varkappa}{dt} = \varphi_\varkappa'.$$

Die $6n$ Differentialgleichungen (4) besitzen daher die $2r$ bekannten Integrale

(5) $$\varphi_x' = a_x, \quad \varphi_x - t\varphi_x' = b_x,$$

und wenn man durch die Gleichungen

(6) $$F_h(t\xi_1 \cdots \xi_{3n}\xi_1' \cdots \xi_{3n}') = c_h, \quad h = 2r+1, \cdots, 6n$$

ihre $6n - 2r$ übrigen Integrale repräsentirt, so ist die vollständige Lösung des betrachteten dynamischen Problems enthalten in den $6n$ Gleichungen:

$$\varphi_x' = 0, \quad \varphi_x = 0, \quad F_h = c_h,$$

denen man noch zur Bestimmung der Multiplicatoren λ die r Gleichungen

$$\lambda_1 = L_1, \cdots, \lambda_r = L_r$$

hinzufügen kann.

Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Gleichungen (6) wirkliche Integrale des Systems (4) sind, d. h. ob nach Ausführung der Substitutionen (4) jedes $\frac{dF_h}{dt}$ schon an sich Null ist, oder ob die Gleichungen $\frac{dF_h}{dt} = 0$ durch diese Substitutionen erst nach Zuziehung der Gleichungen $\varphi_x' = 0$, resp. der Gleichungen $\varphi_x' = 0$ und $\varphi_x = 0$ erfüllt werden.*) —

Nun weiss man aber, dass man das vorgelegte Problem auch noch auf folgende andere Art angreifen kann.

Man drückt aus den r gegebenen Bedingungsgleichungen (1) die $3n$ Coordinaten $\xi_1 \cdots \xi_{3n}$ durch

$$3n - r = \mu$$

neue unabhängige Variable $x_1 \cdots x_\mu$ aus und berechnet durch Substitution dieser, die Bedingungsgleichungen identisch erfüllenden Werthe der ξ und der daraus folgenden Werthe der Differentialquotienten ξ' die Summe $T + U$ als Function der x und x'. Das gegebene Problem verwandelt sich dann in die Aufgabe, die μ Variabeln $x_1 \cdots x_\mu$ so zu bestimmen, dass

---

*) Bei der veränderten Behandlungsweise des Problems im folgenden Paragraphen können jedoch von diesen drei verschiedenen Arten von Integralen der dynamischen Differentialgleichungen nur die beiden ersten gebraucht werden. Um mich kurz ausdrücken zu können, will ich daher die Integrale der ersten Art *absolute*, die von der zweiten und dritten Art (nur durch die Gleichungen $\varphi_x' = 0$, resp. durch die Gleichungen $\varphi_x' = 0$ und $\varphi_x = 0$ zusammen) *bedingte* Integrale des Systems (4) nennen. Die Principe des Schwerpunkts und der Flächen liefern absolute Integrale, das Integral der lebendigen Kraft dagegen ist durch die Gleichungen $\varphi_x' = 0$ bedingt.

$$\delta \int (T + U) dt = 0$$

werde.

Auf diesem zweiten Wege erhält man zur Lösung des Problems die $2\mu = 6n - 2r$ Differentialgleichungen 1. O.

$$\text{(7)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = x_i', \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{\partial (T+U)}{\partial x_i}.$$

Setzt man daher in den 2μ, von den bekannten Integralen (5) unabhängigen (absoluten oder bedingten) Integralen (6) der Differentialgleichungen (4) für die ξ und ξ' ihre Werthe in den x und x' ein, so müssen diese Integrale übergehen in die 2μ Integrale des Systems (7).

Die Differentialgleichungen (7) lassen sich aber weiter auf die kanonische Form bringen und zwar geschieht dies bekanntlich dadurch, dass man an Stelle der x' die μ Grössen

$$\frac{\partial T}{\partial x_i'} = p_i$$

als neue Variable einführt. Bezeichnet man durch H diejenige Function der xp, die man erhält, wenn man mit Hülfe dieser Substitutionen die Differentialquotienten x' aus dem Ausdrucke

$$\mathsf{H} = T - U$$

eliminirt, so geht hierdurch das System (4) über in das folgende:

$$\text{(8)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}.$$

Sind also

$$\xi_i = X_i(x_1 \cdots x_\mu)$$

diejenigen $3n$ Substitutionen, durch welche man die gegebenen Bedingungsgleichungen (1) erfüllt hat, so müssen durch die $6n$ Substitutionen:

$$\text{(9)} \qquad \xi_i = X_i, \quad \xi_i' = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \frac{\partial X_i}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_\lambda}$$

die Integrale (6) der Gleichungen (4) sich verwandeln in die 2μ Integrale der kanonischen Differentialgleichungen (8).

Ist nun auch die Kräftefunction U frei von t, so gilt für die Bewegung unseres Systems das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft oder es ist $T - U =$ const. eines der Integrale (6). Die Gleichungen (8) besitzen dann also das Integral $\mathsf{H} =$ const. und ihre vollständige Integration kommt nach der Jacobi-Hamilton'schen Theorie ihrerseits wieder zurück auf die Aufgabe, von der partiellen Differentialgleichung 1. O. mit μ unabhängigen Variabeln:

$$(10) \qquad \mathsf{H} = \text{const.}, \quad \left(p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}\right)$$

eine vollständige Lösung zu finden.

Gelten überdies die 3 Flächensätze, so kennen wir damit 3 weitere von den Integralen (6). Diese 3 Integrale sind ebenfalls frei von t. Durch die Substitutionen (9) ergeben sich daher aus den 3 Flächensätzen 3, von einander und von H unabhängige Lösungen der Charakteristik

$$(11) \qquad (\mathsf{H}f) = 0.$$

Es sind also dann 4 unabhängige Lösungen $f = \mathsf{H}, f_1, f_2, f_3$ dieser Charakteristik bekannt. Diese 4 Lösungen bilden entweder eine Gruppe, oder sie bilden keine Gruppe.

Im ersten Falle (und nach dem in der Einleitung erwähnten Satze von Jacobi tritt stets dieser erste Fall ein) enthält die viergliedrige Gruppe $\mathsf{H}\, f_1\, f_2\, f_3$, da sie bereits eine ausgezeichnete Function, nämlich H, besitzt und die Differenz zwischen der Anzahl der Glieder und der Anzahl der ausgezeichneten Functionen einer Gruppe immer eine gerade Zahl ist, jedenfalls noch eine zweite ausgezeichnete Function. Im zweiten Falle dagegen müsste nach dem Poisson-Jacobi'schen Satze nothwendig wenigstens einer der 3 Ausdrücke $(f_2 f_3)$, $(f_3 f_1)$, $(f_1 f_2)$ eine neue Lösung der Charakteristik (11) sein.

Wenn wir daher selbstverständlicher Weise immer nur die ungünstigste Eventualität ins Auge fassen, so erhalten wir hier für die Zahlen s und m des Theorems I. im ersten Falle die Werthe $s = 4$, $m = 1$, im zweiten die Werthe $s = 5$, $m = 0$. Beide Male folgt $2\mu - 1 - s - m = 2\mu - 6$ und das Theorem liefert uns also den Satz:

III. *Das Problem, die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu bestimmen, dessen geometrische Position nur von μ Grössen abhängt, verlangt, so oft die Bewegung dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft und den 3 Flächensätzen folgt, jedenfalls nur noch die Operationen:*

$$2\mu - 6, \;\; 2\mu - 8, \; \cdots, \; 6, \; 4, \; 2.$$

Für $\mu = 3$ verwandelt sich derselbe in den bekannten Satz von Jacobi *) aus dem sich die Lösbarkeit der Probleme der Centralbewegung und der Rotation eines starren Körpers ohne Kräfte um einen festen Punkt a priori ergiebt. —

Enthalten die Bedingungsgleichungen des Systems nur die gegenseitigen Entfernungen und wirken auf das System nur die gegenseitigen Anziehungen seiner Punkte, zu denen jedoch als äussere Kraft auch noch die Schwere hinzutreten kann, so reducirt sich die Bestimmung

*) Borchardt's J. 60, p. 149.

der absoluten Bewegung des Systems auf die Bestimmung seiner relativen Bewegung ohne Schwere um den Schwerpunkt, oder es kommt dann nur darauf an, die Differentialgleichungen (2) unter den Voraussetzungen:

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_h = 0, \quad \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_{n+h} = 0, \quad \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_{2n+h} = 0$$

zu integriren. Diese Aufgabe lässt sich aber auch so fassen:

IV. *Man soll die $3n$ Coordinaten $\xi_1 \cdots \xi_{3n}$, denen ausser den Gleichungen* (1) *noch die* 3 *neuen Bedingungsgleichungen* (12) *vorgeschrieben sind, so bestimmen, dass $\delta\int(T+U)dt$ verschwinde,* wobei $U, \varphi_1, \cdots, \varphi_r$ blosse Functionen der gegenseitigen Entfernungen der Punkte sind.

In der That, die Differentialgleichungen des Problems IV. werden allerdings zunächst, wenn man die, den Bedingungsgleichungen (12) entsprechenden Multiplicatoren durch λ, μ, ν bezeichnet:

$$(13)\qquad m_h \xi_h'' = \frac{\partial U}{\partial \xi_h} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \lambda_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_h} - \lambda m_h, \cdots.$$

Bei den gemachten Annahmen genügen aber $U, \varphi_1, \cdots, \varphi_r$ u. A. den 3 Charakteristiken:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_h} = 0, \cdots.$$

Macht man daher in den aus (12) durch Differentiation entstehenden Bedingungen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_h'' = 0, \cdots$$

die Substitutionen (13), so ergiebt sich:

$$\lambda = 0, \cdots.$$

Also fallen die Differentialgleichungen (13) mit den Gleichungen (8) zusammen.

Indem man nun den r Gleichungen (1) die 3 Gleichungen (12) als neue Bedingungsgleichungen hinzufügt, geht r in $r+3$, also $\mu = 3n - r$ in $\mu - 3$ über. Es gelten überdies (weil eben die Multiplicatoren λ, μ, ν Null werden) auch für das Problem IV. die 3 Flächenintegrale. Also erhält man noch den Satz:

V. *Wenn auf ein System materieller Punkte, dessen geometrische Position nur von μ Grössen abhängt und welches sich wie ein freier starrer Körper zu bewegen vermag, nur innere Anziehungen wirken, so sind — und zwar auch dann noch, wenn zu diesen inneren Kräften*

als äussere Kraft die Schwere hinzutritt — zur vollständigen Bestimmung der Bewegung jedenfalls nur noch erforderlich die Operationen:

$$2\mu-12,\ 2\mu-14,\ \cdots,\ 6,\ 4,\ 2.$$

Die Annahme $\mu=6$, oder $r=3n-6$ entspricht einem starren Systeme. Der Satz zeigt also a priori, dass sich die Bewegung eines freien starren Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, vermöge blosser Quadraturen bestimmen lässt.*)

§ 3.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen (wenn man eben den Jacobi'schen Satz über die Flächenintegrale nicht benutzen will) die Frage offen, ob unter Umständen nicht noch eine grössere Reduction durch die allgemeinen Principe erreicht werden könne. Man kann aber die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von n materiellen Punkten, das den r Bedingungsgleichungen (1) unterworfen ist und unter dem Einflusse einer Kräftefunction U steht, noch in einer anderen Weise auf die kanonische Form bringen und bei dieser zweiten Methode, welche die Einführung unabhängiger Bestimmungsstücke des Systems ganz umgeht, bleibt es nicht mehr fraglich, wie sich in Bezug auf Gruppenbildung die Flächensätze verhalten, weil man hier die Ausdrücke dieser Integrale in den kanonischen Variabeln wirklich aufstellen kann.

Da es nämlich offenbar frei stehen muss, die Coordinaten ξ zunächst nur den derivirten Bedingungsgleichungen:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}=0,\ \cdots\ \frac{d\varphi_r}{dt}=0 \tag{14}$$

zu unterwerfen, so kann man das ursprüngliche Problem II. auch ersetzen durch das folgende:

---

*) Nach dem Jacobi'schen Satze über die Flächenintegrale bilden die vier Lösungen H, f_1, f_2, f_3 der Charakteristik (11) stets eine Gruppe, die kein Involutionssystem ist und also ausser H nur noch eine einzige ausgezeichnete Function besitzt. Benutzt man dies, so folgt zunächst, dass man in III. und V. das Wort „jedenfalls" durch „höchstens" ersetzen kann, und man erkennt weiter durch dieselbe Schlussweise, die uns zu dem Satze III. führte, dass zur vollständigen Lösung eines dynamischen Problems, welches die Voraussetzungen des Satzes V. erfüllt, sicher nur noch die Operationen

$$2\mu-14,\ \cdots,\ 6,\ 4,\ 2$$

nöthig sein würden, so oft von dem Probleme ausser den 10 allgemeinen Integralen noch ein neues 11tes bekannt wäre. Gelänge es also z. B. im Problem der drei Körper ein neues Integral zu entdecken, so würde die vollständige Lösung dieses Problems jedenfalls nur noch von den Operationen 4, 2 abhängen.

VI. *Die* $3n$ *Coordinaten* $\xi_1, \cdots, \xi_{3n}$, *denen nur die* r *Bedingungsdifferentialgleichungen* (14) *vorgeschrieben sind, so zu bestimmen, dass* $\delta\int(T+U)dt = 0$ *werde,*
und hat dann nur hinterher die Lösungen dieses Problems den Bedingungen (1) selbst zu unterwerfen.

In der That setzt man:

$$\Omega = T + U + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \frac{d\varphi_\varrho}{dt},$$

so werden die Differentialgleichungen des Problems VI.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i'} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i}. \tag{15}$$

Wegen:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i'}\frac{d\varphi_\varrho}{dt} \equiv \frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_i}, \quad \frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{d\varphi_\varrho}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_i}$$

stellen sich aber diese Gleichungen entwickelt also dar:

$$m_i\xi_i'' + \frac{d}{dt}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\mu_\varrho\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_i} = \frac{\partial U}{\partial\xi_i} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\mu_\varrho\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_i}$$

und reduciren sich folglich auf:

$$m_i\xi_i'' = \frac{\partial U}{\partial\xi_i} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\frac{d\mu_\varrho}{dt}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_i}.$$

Die Differentialgleichungen (15) fallen daher mit den Gleichungen (2) zusammen, sobald man

$$\frac{d\mu_\varrho}{dt} = \lambda_\varrho$$

setzt. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei, so sind somit die vollständigen Lösungen des Problems VI. enthalten in den $6n + r$ Gleichungen:

$$\varphi_\varkappa' = 0, \quad \varphi_\varkappa = b_\varkappa, \quad F_h = c_h, \quad \mu_\varrho = \int L_\varrho dt + \gamma_\varrho, \tag{16}$$

wobei es gleichgültig ist, ob die Gleichungen $F_h = c_h$ absolute oder bloss durch die Gleichungen $\varphi_\varkappa' = 0$ bedingte Integrale des Systems (4) sind. (Sie dürfen nur nicht erst in Folge der Gleichungen $\varphi_\varkappa = 0$ selbst Integrale dieses Systems werden.)

Setzt man nun aber:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_i'} \equiv m_i\xi_i' + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\mu_\varrho\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_i} = v_i \tag{17}$$

und verbindet diese $3n$ Substitutionen mit den Gleichungen:

$$\frac{d\varphi_\varkappa}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \xi_i' = 0,$$

so erhält man:

$$(18) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i} = \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \xi_i} \frac{v_i}{m_i}.$$

Hat man aus diesen r linearen Gleichungen $\mu_1 \cdots \mu_r$ bestimmt als Functionen von $\xi_1 \cdots \xi_{3n}$ $v_1 \cdots v_{3n}$, so liefern hierauf die $3n$ Gleichungen (17) unmittelbar $\xi_1' \cdots \xi_{3n}'$ als Functionen derselben Grössen.

Ich bezeichne durch

$$(19) \qquad \mu_\varrho = [\mu_\varrho], \qquad \xi_i' = [\xi_i']$$

diese Auflösungen der Gleichungen (14) und (17) und allgemein durch Einschliessung in eckige Klammer die Ausführung der Substitutionen (19).

Setzt man dann:

$$(20) \qquad \Phi = \left[\sum_{i=1}^{i=3n} v_i \xi_i' - \Omega\right] \equiv \left[\sum_{i=1}^{i=3n} v_i \xi_i' - T - U\right],$$

so folgt durch Variation der ξ und v:

$$\delta \Phi = \sum_{i=1}^{i=3n} \left\{ v_i \delta[\xi_i'] + [\xi_i'] \delta v_i - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i}\right] \delta \xi_i - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i'}\right] \delta [\xi_i'] \right\}$$

$$- \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \left[\frac{d\varphi_\varrho}{dt}\right] \delta [\mu_\varrho],$$

oder nach (17) und (14):

$$\delta \Phi = \sum_{i=1}^{i=3n} \left\{ [\xi_i'] \delta v_i - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i}\right] \delta \xi_i \right\}.$$

Durch die Substitutionen (19) wird somit das System der Differentialgleichungen (14) und (15) übergeführt in das kanonische System:

$$(21) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_i}, \qquad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}.$$

Die $6n$ Differentialgleichungen (21) besitzen hiernach zunächst die r bekannten und (nach Voraussetzung) von t freien Integrale

$$\varphi_1 = b_1, \cdots, \varphi_r = b_r.$$

$6n - 2r$ andere Integrale derselben gehen aus den Gleichungen $F_h = c_h$ durch die Substitutionen:

$$\xi_i' = \frac{1}{m_i}\left(v_i - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} [\mu_\varrho] \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i}\right) \tag{22}$$

hervor. Die fehlenden r Integralgleichungen endlich werden durch die Gleichungen

$$[\mu_\varrho] = \int L_\varrho \, dt + \gamma_\varrho \tag{23}$$

vertreten (wo selbstverständlich in den L_ϱ die Werthe der ξ und ξ', aus den $6n$ ersten Gleichungen (16) als Functionen von t und von den Integrationsconstanten berechnet, einzusetzen wären).

Die Differentialgleichungen (21) sind aber selbst wieder, wenn wir wie früher auch U frei von t annehmen, äquivalent der partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $3n$ unabhängigen Variabeln:

$$\Phi = \text{const.}, \quad \left(v_i = \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right),\text{*)} \tag{24}$$

und von der Charakteristik dieser Gleichung:

$$(\Phi f) \equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right) = 0 \tag{25}$$

kennen wir ausser Φ bereits r unabhängige Lösungen, nämlich $\varphi_1 \cdots \varphi_r$, die als blosse Functionen der ξ auch untereinander in Involution liegen. Die Zahlen μ, s, m des Theorems I. erhalten also hier, falls keine weiteren Integrale bekannt sind, die Werthe

$$3n, \quad r+1, \quad r$$

und die vollständige Integration der Differentialgleichungen (21) verlangt daher jedenfalls nur noch die Operationen:

$$6n - 2r - 2, \quad 6n - 2r - 4, \cdots 6, 4, 2.$$

---

*) Nach (20) ist

$$\Phi = \left[\sum_{i=1}^{i=3n} \xi_i' \left(v_i - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i} - \frac{1}{2} m_i \xi_i'\right)\right] - U,$$

nach (22) folgt also:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{2m_i} \left(v_i - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} [\mu_\varrho] \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i}\right)^2 - U.$$

Die partielle Differentialgleichung (24) stimmt also mit der überein, zu welcher Jacobi in p. 379 seiner Vorlesungen über Dynamik gelangt.

Nehmen wir nun aber an, dass U, $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ Lösungen der drei Charakteristiken seien:

$$(26)\qquad \sum_{h=1}^{h=n}\left(\xi_{n+h}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_{2n+h}}-\xi_{2n+h}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_{n+h}}\right)=0,\ \cdots.$$

Für die Bewegung des Systems gelten dann die 3 Flächensätze:

$$f_1\equiv\sum_{h=1}^{h=n}m_h(\xi_{n+h}\xi'_{2n+h}-\xi_{2n+h}\xi'_{n+h})=\text{const.},\ \cdots$$

Durch die Substitutionen (22) gehen daraus die 3 neuen Lösungen der Charakteristik (25) hervor:

$$f_1=\sum_{h=1}^{h=n}(\xi_{n+h}v_{2n+h}-\xi_{2n+h}v_{n+h})-\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}[\mu_\varrho]\sum_{h=1}^{h=n}\left(\xi_{n+h}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_{2n+h}}-\xi_{2n+h}\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_{n+h}}\right),\ \cdots$$

und diese reduciren sich nach (26) auf

$$f_1=\sum_{h=1}^{h=n}(\xi_{n+h}v_{2n+h}-\xi_{2n+h}v_{n+h}),\ \cdots$$

Sie liegen auch mit $\varphi_1\cdots\varphi_r$ in Involution.*) Denn man hat

$$(\varphi_\varrho f_1)=\sum_{h=1}^{h=n}\left(-\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_{n+h}}\xi_{2n+h}+\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial\xi_{2n+h}}\xi_{n+h}\right).$$

Endlich ist:

$$(f_2f_3)=f_1,\quad (f_3f_1)=f_2,\quad (f_1f_2)=f_3.$$

Von der Charakteristik (25) sind also jetzt bekannt $r+4$ Lösungen

$$f=\Phi,\ \varphi_1,\cdots,\varphi_r,\ f_1,\ f_2,\ f_3,$$

die eine Gruppe bilden. Diese Gruppe besitzt die $r+1$ ausgezeichneten Functionen Φ, $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$; sie muss also nothwendig noch eine ausgezeichnete Function enthalten und sie kann deren auch nicht mehr enthalten, weil sie kein Involutionssystem ist. Die Zahlen μ, s, m haben also nunmehr die Werthe:

$$3n,\quad r+4,\quad r+1$$

angenommen und nach I. erfordert daher, übereinstimmend mit dem

*) Das Gleiche gilt überhaupt von allen denjenigen Integralen, die, unabhängig von den Werthen der λ, absolute oder nur durch die Gleichungen $\varphi'_\varkappa=0$ bedingte Integrale des Systems (2) sind.

Satze III., die vollständige Lösung des Problems *höchstens* nur noch die Operationen:

$$6n-2r-6,\quad 6n-2r-8,\ \cdots,\ 6,\ 4,\ 2. -$$

Betrachten wir endlich den Fall, auf den sich der Satz V. bezieht, so reducirt sich hier die Aufgabe, die absolute Bewegung des Systems zu bestimmen, auf die Bestimmung seiner relativen Bewegung ohne Schwere um den Schwerpunkt, oder nach dem Vorhergehenden, wenn wir wieder die endlichen Bedingungsgleichungen durch ihre ersten Ableitungen ersetzen, auf das Problem:

VII. *Die* $3n$ *Coordinaten* $\xi_1 \cdots \xi_{3n}$, *denen neben den* r *Gleichungen* (14) *noch die* 3 *Bedingungsdifferentialgleichungen:*

$$\text{(27)}\qquad \frac{d\psi_1}{dt} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_h' = 0, \qquad \frac{d\psi_2}{dt} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_{n+h}' = 0,$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} \equiv \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_{2n+h}' = 0$$

vorgeschrieben sind, so zu bestimmen, dass $\delta\int(T+U)\,dt = 0$ *werde*, wo U, $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ blosse Functionen der gegenseitigen Entfernungen oder gleichzeitige Lösungen der 3 Charakteristiken (26) und der 3 Charakteristiken sind:

$$\text{(28)}\qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_h} = 0, \ \cdots$$

An die Stelle von Ω tritt nunmehr der Ausdruck:

$$\Omega_1 = T + U + l_1 \frac{d\psi_1}{dt} + l_2 \frac{d\psi_2}{dt} + l_3 \frac{d\psi_3}{dt} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \frac{d\varphi_\varrho}{dt}$$

und man erhält zur Lösung des Problems die Differentialgleichungen

$$\text{(29)}\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_i'} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_i}.$$

Diese fallen aber (wie schon unmittelbar aus der Uebereinstimmung der Differentialgleichungen in den Problemen VI. und II., sowie in den Problemen IV. und II. folgt) mit den Gleichungen (15) zusammen, indem:

$$\text{(30)}\qquad \frac{dl_1}{dt} = \frac{dl_2}{dt} = \frac{dl_3}{dt} = 0$$

wird. Dagegen ändern sich die Substitutionen (17) und werden jetzt:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi'_h} \equiv m_h \xi'_h + m_h l_1 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_h} = v_h,$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi'_{n+h}} \equiv m_h \xi'_{n+h} + m_h l_2 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_{n+h}} = v_{n+h},$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi'_{2n+h}} \equiv m_h \xi'_{2n+h} + m_h l_3 + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_{2n+h}} = v_{2n+h},$$

wo $h \leqq n$. Sie ergeben, in die Bedingungsgleichungen (27) eingeführt, unter Berücksichtigung von (28):

$$(31) \qquad l_1 = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} v_h, \quad l_2 = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} v_{n+h}, \quad l_3 = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} v_{2n+h},$$

wo $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ ist, während sich aus ihnen und den Bedingungsgleichungen (14), wiederum wegen (28), die alten Gleichungen (18) für die Multiplicatoren μ_ϱ ergeben.

An Stelle der Substitutionen (19) erhalten wir daher jetzt zur Reduction des Problems auf die kanonische Form die Gleichungen (31) und:

$$(32) \quad \begin{cases} \mu_\varrho = [\mu_\varrho], \\ \xi'_h = \dfrac{1}{m_h}\left(v_h - \displaystyle\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} [\mu_\varrho] \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_h}\right) - \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} v_\varkappa, \\ \xi'_{n+h} = \dfrac{1}{m_h}\left(v_{n+h} - \displaystyle\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} [\mu_\varrho] \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_{n+h}}\right) - \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} v_{n+\varkappa}, \\ \xi'_{2n+h} = \dfrac{1}{m_h}\left(v_{2n+h} - \displaystyle\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} [\mu_\varrho] \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_{2n+h}}\right) - \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} v_{2n+\varkappa}. \end{cases}$$

Diese Substitutionen erfüllen die Bedingungsgleichungen (14) und (27) identisch und bringen die Differentialgleichungen (29) auf die kanonische Form:

$$(33) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_i}, \qquad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_i},$$

worin Φ_1 diejenige Function der ξv bedeutet, die aus:

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{i=3n} v_i \xi'_i - T - U$$

durch die Substitutionen (32) hervorgeht.

Hiermit ist das Problem VII. zurückgeführt auf die Aufgabe, von der partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $3n$ unabhängigen Variabeln:

$$\Phi_1 = \text{const.}, \quad \left(v_i = \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)$$

eine vollständige Lösung zu finden.

Von der Charakteristik dieser Gleichung

$$(\Phi_1 f) = 0 \tag{34}$$

kennt man nun bereits die $r+4$ Lösungen $f = \Phi_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3$, die mit einander in Involution liegen. Aus den 3 Flächensätzen

$$f_1 = \sum_{h=1}^{h=n} m_h (\xi_{n+h}\xi'_{2n+h} - \xi_{2n+h}\xi'_{n+h}) = \text{const.}, \cdots$$

ergeben sich weiter durch die Substitutionen (32) 3 neue Lösungen dieser Charakteristik, die sich wegen (26) auf:

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_{n+h}v_{2n+h} - \xi_{2n+h}v_{n+h}) - \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} m_h(\xi_{n+h}v_{2n+\varkappa} - \xi_{2n+h}v_{n+\varkappa}), \\ f_2 &= \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_{2n+h}v_h - \xi_h v_{2n+h}) - \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} m_h(\xi_{2n+h}v_\varkappa - \xi_h v_{2n+\varkappa}), \\ f_3 &= \sum_{h=1}^{h=n}(\xi_h v_{n+h} - \xi_{n+h}v_h) - \frac{1}{M}\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} m_h(\xi_h v_{n+\varkappa} - \xi_{n+h}v_\varkappa) \end{aligned}\right. \tag{35}$$

reduciren. Diese neuen Lösungen liegen sowohl mit $\varphi_1, \cdots \varphi_r$, wie mit ψ_1, ψ_2, ψ_3 in Involution. Denn für λ und $\varkappa = 1, 2, 3$ wird nach (26) und (28)

$$(\varphi_\varrho f_\lambda) = 0,$$

während schon an und für sich

$$(\psi_\lambda f_\varkappa) \equiv 0$$

ist. Endlich ergiebt sich auch aus (35) wieder:

$$(f_2 f_3) = f_1, \quad (f_3 f_1) = f_2, \quad (f_1 f_2) = f_3.$$

Man kennt also von der Charakteristik (34) $r+7$ Lösungen:

$$f = \Phi_1, \varphi_1, \cdots \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3, f_1, f_2, f_3,$$

die eine Gruppe bilden. Diese Gruppe besitzt bereits die $r+4$ ausgezeichneten Functionen $\Phi_1, \varphi_1, \cdots \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3$; sie enthält also nothwendig ausserdem noch eine und auch nur eine ausgezeichnete Function. Es liegt also jetzt derjenige Fall des Theorems I. vor, in welchem die Zahlen μ, s, m resp. die Werthe

$$3n, \quad r+7, \quad r+4$$

erhalten haben, und wir sehen, in Uebereinstimmung mit V., dass die vollständige Lösung des Problems VII. *höchstens* nur noch die Operationen

$$6n-2r-12, \quad 6n-2r-14, \cdots, 6, 4, 2$$

erfordert.

Indessen sind hierbei 3 Lösungen der Charakteristik (34) ganz ausser Acht gelassen worden, nämlich die 3:

$$\chi_1 = \sum_{h=1}^{h=n} v_h, \quad \chi_2 = \sum_{h=1}^{h=n} v_{n+h}, \quad \chi_3 = \sum_{h=1}^{h=n} v_{2n+h},$$

die sich in Folge von (30) aus den Formeln (31) ergeben.*) Es scheint daher auf den ersten Anblick, als ob im Problem VII. noch eine weitere Reduction möglich sei. Fügen wir, um dies zu untersuchen, den früheren Lösungen der Charakteristik (34) die 3 neuen Lösungen hinzu, so erhalten wir im Ganzen $r+10$ Lösungen dieser Charakteristik, nämlich:

$$f = \Phi_1, \varphi_1, \cdots \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3, f_1, f_2, f_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3.$$

Nun ist, wenn λ und $\varkappa$ irgend zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3 bezeichnen:

$$(\psi_\lambda \chi_\varkappa) = 0, \quad (\psi_\lambda \chi_\lambda) = M,$$
$$(\chi_\lambda f_\varkappa) = 0, \quad (\chi_\lambda f_\lambda) = 0,$$

und nach (28) hat man auch

$$(\varphi_\varrho \chi_\varkappa) = 0.$$

Unsere $r+10$ Lösungen bilden also wiederum eine Gruppe, in der

---

*) Die Integrale $l_1 = \text{const.}, \ldots$ gehören zu derjenigen Gattung von Integralgleichungen des Problems VII., die beim Problem VI. durch die Gleichungen (23) repräsentirt wurden. —

Da bei Einführung der Lösungen ψ und χ die Doppelsummen in den Formeln (35) sich so ausdrücken:

$$-\frac{1}{M}(\psi_2\chi_3 - \psi_3\chi_2), \cdots,$$

so sieht man, dass man den Lösungen (35) auch die einfacheren

$$(35') \qquad f_1 = \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_{n+h} v_{2n+h} - \xi_{2n+h} v_{n+h}), \cdots$$

substituiren kann. Es ist aber bemerkenswerth, dass die direct aus den Flächensätzen gezogenen Lösungen (35) trotz ihrer complicirteren Form für die Reduction des Problems weit werthvoller sind als die Lösungen (35'); denn sie liegen mit den ψ und χ in Involution, was jene nicht thun.

$\Phi_1, \varphi_1, \cdots \varphi_r$ ausgezeichnete Functionen sind. Die $r+10$ Charakteristiken, denen jede ausgezeichnete Function dieser Gruppe genügen muss, reduciren sich, indem die übrigen als Identitäten wegfallen, auf die folgenden 9:

$$(\psi_1 U) \equiv M\frac{\partial U}{\partial \chi_1} = 0, \quad (\psi_2 U) \equiv M\frac{\partial U}{\partial \chi_2} = 0, \quad (\psi_3 U) \equiv M\frac{\partial U}{\partial \chi_3} = 0,$$

$$(\chi_1 U) \equiv -M\frac{\partial U}{\partial \psi_1} = 0, \quad (\chi_2 U) \equiv -M\frac{\partial U}{\partial \psi_2} = 0, \quad (\chi_3 U) \equiv -M\frac{\partial U}{\partial \psi_3} = 0,$$

$$(f_1 U) \equiv f_3\frac{\partial U}{\partial f_2} - f_2\frac{\partial U}{\partial f_3} = 0,$$

$$(f_2 U) \equiv -f_3\frac{\partial U}{\partial f_1} + f_1\frac{\partial U}{\partial f_3} = 0,$$

$$(f_3 U) \equiv f_2\frac{\partial U}{\partial f_1} - f_1\frac{\partial U}{\partial f_2} = 0,$$

und von diesen sind die 8 ersten von einander unabhängig, während die 9$^{\text{te}}$ eine blosse Folge der 7$^{\text{ten}}$ und 8$^{\text{ten}}$ ist. Die Anzahl der ausgezeichneten Functionen der Gruppe ist folglich $r+10-8=r+2$ oder die Gruppe besitzt ausser $\Phi_1, \varphi_1, \cdots \varphi_r$ nur noch eine ausgezeichnete Function (die Function $f_1^2+f_2^2+f_3^2$). Wir erhalten somit für die Zahlen μ, s, m im Theoreme I. jetzt die Werthe

$$3n, \quad r+10, \quad r+1$$

und kommen also wieder auf die Operationen:

$$6n-2r-12, \cdots, 4, 2$$

zurück. Die 3 Lösungen χ_1, χ_2, χ_3 sind demnach insofern überflüssig, als ihre Hinzunahme keine weitere Reduction des Problems bewirkt. —

Ich habe im Vorhergehenden die zweite der beiden, zur Transformation der Differentialgleichungen der unfreien Bewegung auf die kanonische Form benutzten Methoden nur in derjenigen speciellen Gestalt auseinandergesetzt, in welcher sie mir für den vorliegenden Zweck am bequemsten erschien (und es interessirte mich namentlich das bei der letzten Anwendung gewonnene Beispiel für die ganz verschiedene Werthigkeit der einen Integrale gegen die andern). Da die Methode sich aber unmittelbar aus der allgemeinen Regel ergiebt, die Clebsch zur Behandlung derjenigen Probleme der Variationsrechnung gegeben hat, in denen Bedingungsdifferentialgleichungen auftreten, so erhellt ohne Weiteres, dass man sie überhaupt anwenden kann auf jedes Problem der Variationsrechnung mit endlichen Bedingungsgleichungen, und ebenso, dass man in der Dynamik die beiden Methoden in der Art mit einander verbinden kann, dass man nur einen Theil der vor-

geschriebenen Bedingungsgleichungen identisch erfüllt und die übrigen durch ihre ersten Ableitungen ersetzt. Beim Problem der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt z. B. könnte man, nachdem man wie üblich Alles auf die Hauptträgheitsaxen bezogen hat, die 9 Richtungscosinus derselben gegen die unbeweglichen Axen nun als Grundvariable beibehalten und ihnen die ersten Ableitungen der 6 endlichen Gleichungen, durch die sie verbunden sind, als Bedingungsdifferentialgleichungen vorschreiben, wodurch die Symmetrie vollständig gewahrt würde. Wegen der complicirten Ausdrücke, die man im Allgemeinen bei der Auflösung der linearen Gleichungen für die Multiplicatoren erhält, dürfte jedoch für specielle Probleme von der Methode kaum ein wesentlicher Vortheil zu erwarten sein. —

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

2.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XV, pag. 1.)

Um die folgende Darstellung durch Abkürzung zu erleichtern, sei mir zunächst gestattet einiges Formale festzustellen.

Die Identität zweier Punktmengen P und Q werde durch die Formel: $P \equiv Q$ ausgedrückt. Haben zwei Mengen P und Q kein gemeinschaftliches Element, so sagen wir, sie seien *ohne Zusammenhang*. Entsteht eine Menge P aus der Zusammenfassung mehrerer: $P_1, P_2, P_3, \cdots$, in endlicher oder unendlicher Anzahl, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, so schreiben wir:

$$P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \cdots\}.$$

Gehören alle Punkte einer Menge P zu einer andern Menge Q, so sagen wir: P sei in Q *enthalten* oder auch P sei ein Divisor von Q, Q ein Multiplum von P. Sind $P_1, P_2, P_3, \cdots$ irgend welche Punktmengen in endlicher oder unendlicher Anzahl, so gehört zu ihnen sowohl ein kleinstes gemeinsames Multiplum, welches wir mit:

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \cdots)$$

bezeichnen und welches die Menge ist, die aus allen verschiedenen Punkten von $P_1, P_2, P_2, \cdots$ besteht und sonst keine anderen Punkte als Elemente besitzt, — wie auch ein grösster gemeinsamer Divisor, den wir $\equiv$

$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \cdots)$$

setzen und welcher die Menge der Punkte ist, die allen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ gemeinsam sind. Beispielsweise können wir, wenn $P', P'', P''', \cdots$ die auf einander folgenden Ableitungen einer Punktmenge P sind (s. Art. 1, pag. 2), sagen, dass P'' ein Divisor von P', P''' sowohl

Divisor von P'', wie auch von P', allgemein $P^{(\nu)}$ Divisor von $P^{(\nu-1)}$, $P^{(\nu-2)}, \cdots P'$ ist; dagegen ist P' *im Allgemeinen kein* Divisor von P; wenn aber P selbst die erste Ableitung einer Menge Q ist, so ist P' Divisor von P.

Es ist ferner zweckmässig ein Zeichen zu haben, welches die Abwesenheit von Punkten ausdrückt, wir wählen dazu den Buchstaben O; $P \equiv O$ bedeutet also, dass die Menge P *keinen einzigen* Punkt enthält, also streng genommen als solche gar nicht vorhanden ist. Um auch hierfür ein Beispiel zu geben, so ist eine Punktmenge *erster Gattung* und n^{ter} Art dadurch charakterisirt, dass:

$$P^{(n+1)} \equiv O,$$

dagegen $P^{(n)}$ von O verschieden ist.

Zwei Mengen *hängen* durch ihren grössten gemeinsamen Divisor *zusammen*, und wenn der letztere $\equiv 0$ ist, so sind sie *ohne Zusammenhang*.

Besitzen zwei Punktmengen, P und Q gleiche *Mächtigkeit*, gehören sie also zu *einer* Classe (Art. 1, pag. 3 u. 4), so nennen wir sie *äquivalent* und drücken diese Beziehung durch die Formel aus:

$$P \sim Q.$$

Hat man $P \sim Q$; $Q \sim R$; so ist auch immer:

$$P \sim R.$$

Ist ferner $P_1, P_2, P_3, \cdots$ eine Reihe von Mengen, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ eine andere Reihe, von welcher das Gleiche gilt und hat man: $P_1 \sim Q_1$; $P_2 \sim Q_2$; $P_3 \sim Q_3$; $\cdots$, so ist auch:

$$\{P_1, P_2, P_3, \cdots\} \sim \{Q_1, Q_2, Q_3, \cdots\}.$$

Die Punktmengen der ersten Gattung lassen sich, wie wir soeben gesehen, durch den Begriff der Ableitung, soweit er bisher entwickelt ist, vollkommen charakterisiren, für die der zweiten Gattung reicht jener Begriff nicht aus, hier wird eine Erweiterung desselben nothwendig, die sich bei tieferem Erfassen wie von selbst darbietet.

Man beachte, dass in der Reihe der Ableitungen $P', P'', P''', \cdots$ einer Menge P jedes Glied ein Divisor der vorangehenden ist, jede neue Ableitung $P^{(\nu)}$ also aus der vorhergehenden $P^{(\nu-1)}$ durch *Wegfall* gewisser Punkte entsteht, *ohne* dass neue Punkte hinzukommen.

Gehört P zur zweiten Gattung, so wird P' sich aus zwei wesentlich verschiedenen Punktmengen Q und R zusammensetzen, so dass:

$$P' \equiv \{Q, R\},$$

die eine Q besteht aus denjenigen Punkten von P', welche bei hinreichendem Fortschreiten in der Folge P', P'', P''', $\cdots$ verloren gehen, die andere R umfasst diejenigen Punkte, welche in *allen* Gliedern der Folge P', P'', P''', $\cdots$ erhalten bleiben, es ist also R definirt durch die Formel:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P', P'', P''', \cdots).$$

Wir haben aber auch offenbar:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P'', P''', P^{IV}, \cdots)$$

und allgemein:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \cdots),$$

wo $n_1, n_2, n_3, \cdots$ irgend eine Reihe ins Unendliche wachsender ganzer, positiver Zahlen ist.

Diese aus der Menge P hervorgehende Punktmenge R werde nun durch das Zeichen:

$$P^{(\infty)}$$

ausgedrückt und Ableitung von P der Ordnung ∞ genannt.

Die erste Ableitung von $P^{(\infty)}$ werde mit $P^{(\infty+1)}$, die n^{te} Ableitung von $P^{(\infty)}$ mit $P^{(\infty+n)}$ bezeichnet; $P^{(\infty)}$ wird aber auch eine, im Allgemeinen von O verschiedene Ableitung von der Ordnung ∞ haben, wir nennen sie $P^{(2\infty)}$. Durch Fortsetzung dieser Begriffsconstructionen kommt man zu Ableitungen, die consequenterweise durch:

$$P^{(n_0\infty+n_1)}$$

zu bezeichnen sind, wo n_0, n_1 positive ganze Zahlen sind. Wir kommen aber auch darüber hinaus, indem wir:

$$\mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \cdots)$$

bilden und dafür das Zeichen $P^{(\infty^2)}$ festsetzen.

Hieraus ergiebt sich durch Wiederholung derselben Operation und Combinirung mit den früher gewonnenen der allgemeinere Begriff:

$$P^{(n_0\infty^2+n_1\infty+n_2)},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man zu:

$$P^{(n_0\infty^\nu+n_1\infty^{\nu-1}+\cdots+n_\nu)},$$

wo $n_0, n_1, \cdots, n_\nu$ positive ganze Zahlen sind. Zu weiteren Begriffen gelangt man, indem man ν variabel werden lässt; man setze:

$$P^{(\infty^\infty)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(\infty^2)}, P^{(\infty^3)}, \cdots).$$

Durch consequentes Fortschreiten gewinnt man successive die weiteren Begriffe:

$$P^{(n\infty^\infty)},\quad P^{(\infty^\infty+1)},\quad P^{(\infty^\infty+n)},\quad P^{(\infty^{n\infty})},\quad P^{(\infty^{\infty^n})},\quad P^{(\infty^{\infty^\infty})} \text{ u. s. w.};$$

wir sehen hier eine dialektische Begriffserzeugung*), welche immer weiter führt und dabei frei von jeglicher Willkür in sich nothwendig und consequent bleibt.

Für die Punktmengen der ersten Gattung ist, wie aus ihrem Begriffe folgt:

$$P^{(\infty)} \equiv O;$$

es ist bemerkenswerth, dass auch das Umgekehrte bewiesen werden kann: jede Punktmenge, für welche jene Gleichung besteht, ist von der ersten Gattung; die Mengen erster Gattung sind also durch jene Gleichung *völlig charakterisirt*.

Es ist leicht, das Beispiel einer Punktmenge zweiter Gattung zu bilden, für welche $P^{(\infty)}$ aus einem Punkte p besteht; man nehme in Intervallen, die auf einander folgen, an einander grenzen und dabei unendlich klein werdend gegen p convergiren, Punktmengen der ersten Gattung an, deren Ordnungszahlen über alle Grenzen hinaus wachsen, wenn die entsprechenden Intervalle sich dem p nähern, — so bilden sie zusammengenommen ein derartiges Beispiel, welches zugleich die in Art. 1., pag. 3 aufgeworfene Frage erledigt, ob zu einer Punktmenge zweiter Gattung ein Intervall immer gehören müsse, in welchem sie *überalldicht* sei; wir sehen an diesem Beispiel, dass dies *keineswegs* erforderlich ist.

Mit gleicher Leichtigkeit construirt man Punktmengen der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty+n)}$ oder $P^{(2\infty)}$ oder allgemeiner:

$$P^{(n_0\infty^\nu + n_1\infty^{\nu-1} + \cdots + n_\nu)}$$

aus einem vorgeschriebenen Punkte p bestehen.

Alle derartigen Mengen sind in *keinem* Intervalle überalldicht und gehören ausserdem der *ersten* Classe an; sie gleichen in diesen beiden Beziehungen den Punktmengen erster Gattung.

(Fortsetzung folgt.)

Halle im Mai 1880.

---

*) Zu derselben bin ich vor nun zehn Jahren gelangt; bei Gelegenheit einer eigenthümlichen Darstellung des Zahlbegriffs (Math. Ann. Bd. V) habe ich entfernt darauf hingewiesen.

Ueber die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

Von

P. Gordan in Erlangen.

In meiner ersten Arbeit über die in der Ueberschrift genannte Form (Bd. XVII dieser Annalen, p. 217 ff.) handelte es sich um Aufstellung des vollen Systems, durch dessen Formen sich alle anderen als *ganze* Functionen darstellen lassen. Darüber hinaus soll die gegenwärtige Untersuchung die *typische Darstellung* der betreffenden Form entwickeln und eine Reihe von Aufgaben behandeln, welche sich mit den so gewonnenen Mitteln erledigen lassen.

Die Aufstellung des vollen Formensystems hatte ich l. c. unter der einzigen Voraussetzung durchgeführt, dass die zu untersuchende Form f der einen Bedingung genügt:

$$\text{(I)} \qquad f_\varphi^2 - \frac{i}{8} \cdot u_x^2 = 0 \qquad \text{(vgl. p. 227 daselbst).}$$

An dieser Voraussetzung halte ich auch im Folgenden zunächst fest. Wir haben dann, wie die vorige Arbeit zeigte, eine Invariante i, vier Covarianten, nämlich f selbst, und drei bez. vom 6ten, 14ten, 21ten Grade, die ich jetzt mit ψ, Δ, Ω bezeichne, endlich sechs lineare Zwischenformen. Unter den letzteren will ich die identische Zwischenform u_x und die beiden nächstniedrigen, welche in den x bez. vom Grade 8 oder 9 sind, herausgreifen; ich nenne die letzteren resp. p und q. Dass man durch diese Formen alle anderen *rational* ausdrücken kann, dass sie also, im Sinne Hermite's, ein System von *associirten Formen* bilden, ist nach den Entwickelungen, wie *Clebsch* und ich dieselben bei früherer Gelegenheit gegeben haben*), an sich deutlich. Es handelt sich also im Folgenden nicht sowohl um die Aufsuchung geeigneter associirter Formen, als vielmehr um die zweckmässigsten Mittel, jede

*) Vergl.: *Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen*, diese Annalen, Bd. I, p. 56. Die p, q und das später einzuführende r des Textes entsprechen genau den damals beim Studium der cubischen Form zu Grunde gelegten Zwischenformen, nämlich bez. den dort mit N, L, M bezeichneten.

vorkommende Form möglichst rasch in eine rationale Function der von vorneherein bekannten associirten Formen zu verwandeln. Hierzu aber geben die symbolischen Methoden folgenden Ansatz. Sei Π ein symbolisches Product, in welchem nur die Symbole a, b, c, $\cdots$ der ursprünglichen Form f vorkommen. Dann kann man dasselbe mit einer solchen Potenz der Determinante (pqx), sagen wir $(pqx)^\alpha$, multipliciren, dass auf jeden Factor (abu) von Π, sowie auf jeden Factor (abc), *ein* Factor (pqx) kommt. Aber es ist:

$$(abu)\,(pqx) = \begin{vmatrix} a_p & a_q & a_x \\ b_p & b_q & b_x \\ u_p & u_q & u_x \end{vmatrix},$$

ebenso:

$$(abc)\,(pqx) = \begin{vmatrix} a_p & a_q & a_x \\ b_p & b_q & b_x \\ c_p & c_q & c_x \end{vmatrix}.$$

Daher verwandelt sich $\Pi \cdot (pqx)^\alpha$ unmittelbar in eine ganze Function von f und den 14 Polaren:

$$\begin{gathered} f_p,\ f_q, \\ f_{p^2},\ f_{pq},\ f_{q^2}, \\ f_{p^3},\ f_{p^2q},\ f_{pq^2},\ f_{q^3}, \\ f_{p^4},\ f_{p^3q},\ f_{p^2q^2},\ f_{pq^3},\ f_{q^4}; \end{gathered}$$

Π selbst ist gleich dieser Function, dividirt durch $(pqx)^\alpha$. *Alles kommt also darauf zurück, (pqx) und die genannten 14 Polaren durch die associirten Formen auszudrücken.* Nun enthalten die (pqx) und die Polaren nur die x. Sie sind also meiner früheren Arbeit nach *ganze Functionen von $i, f, \Delta, \psi, \Omega$.* Die Aufgabe ist also nur noch, gewisse ganze Functionen auszurechnen. Dies auf möglichst zweckmässige Weise durchzuführen, ist meine Absicht im *ersten Theile* des Nachstehenden. Es ergiebt sich dabei zugleich die *eine* Bedingungsgleichung, welche der Parameterzahl wegen zwischen den associirten Formen und zwar zwischen i, f, Δ, ψ, Ω bestehen muss.

Im *zweiten Theile* bringe ich sodann vor allen Dingen den Nachweis, dass $f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$ in der That durch die Bedingung (I) völlig charakterisirt ist. Ich erledige ferner die Aufgabe, ein übrigens beliebig gegebenes f, das der Bedingung (I) genügt, auf die kanonische Form $x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$ zu transformiren. Dabei habe ich an die Untersuchungen anzuknüpfen, welche Hr. Klein in seinen hierher gehörigen Arbeiten*) gegeben hat. Man kann vermöge derselben bekanntlich die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$, wenn das in kanonischer

*) Annalen XIV, p. 428 ff., XV, p. 251 ff.

Form vorausgesetzte f gleich Null ist und $\frac{\psi^3}{\Delta^7}$ gegeben wird, durch elliptische Functionen ausdrücken. — Ich wende mich endlich zu einer letzten, ebenfalls schon von Hrn. Klein berührten Fragestellung: *Es seien für unbekannte* x_1, x_2, x_3 *die kanonischen* f, Δ, ψ, Ω *in Uebereinstimmung mit der zwischen ihnen bestehenden Relation numerisch gegeben, man soll die* x_1, x_2, x_3 *berechnen.* Man weiss, dass dies allgemeinere Problem vermöge einer Hülfsgleichung vierten Grades auf das speciellere, durch elliptische Functionen lösbare, zurückkommt*). Hier nun werden die Untersuchungen über typische Darstellung, wie sie der erste Theil der gegenwärtigen Arbeit bringt, von durchschlagender Wichtigkeit. In der That gelingt es mir nicht nur, die betreffende Gleichung vierten Grades, und zwar in der einfachsten Gestalt, *wirklich zu bilden*, sondern ich gebe auch zur Berechnung der x_1, x_2, x_3 *explicite Endformeln.*

Erstes Capitel.

Rechnungen behufs Durchführung der typischen Darstellung.

§ 1.

Definition der associirten und einiger anderer Formen.

Sei f, wie immer, die biquadratische Grundform,

$$\Delta = 32 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Theta = \Theta_x{}^4 u_\vartheta{}^2 = 16 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & \sigma \end{vmatrix}.$$

So sollen die linearen Zwischenformen p, q, die ich in der Einleitung bereits erwähnte (etwas abweichend von den entsprechenden Zwischenformen der meiner vorigen Abhandlung beigegebenen Tabelle) folgendermassen definirt sein:

$$p = u_p = 24(\Delta f u),$$
$$q = u_q = \ 6\Delta_\Theta.$$

Aus ihnen entstehen die Covarianten ψ, Ω durch die Formeln:

---

*) Vergl. besonders Annalen XV, p. 280—282.

$$\psi = 6\Delta_q,$$
$$\Omega = 6\Delta_{p,q}.$$

Die Invariante i sei wie früher definirt:

$$\varphi = 2(abu)^4 = u_\varphi^4, \qquad i = \frac{4}{3} f_\varphi^4.$$

Ich führe endlich noch, der Bequemlichkeit halber, für eine passend gewählte lineare Zwischenform, die 11ten Grades in den x ist, eine besondere Benennung ein. Ich setze nämlich

$$r = u_r = 72\Delta_x^4 \Delta_{1,x}^4 (\Delta\Delta_1 f)(\Delta\Delta_1 u).$$

Hiermit habe ich alle neuen Bezeichnungen, die im Folgenden gebraucht werden sollen.

§ 2.

Hülfsformeln.

Ueber diejenigen Relationen hinaus, die ich in meiner vorigen Arbeit mittheilte, benutze ich im Folgenden noch einige Hülfsformeln, welche sich auf die einfachsten Ueberschiebungen von Δ und f*) beziehen:

$$\Delta_x^4 a_x^2 b_y^2 (ab\Delta)^2; \quad \Delta_x^4 a_x^2 b_x b_y (ab\Delta)^2; \quad \Delta_\Theta^2; \quad (\Delta\Delta f)^2; \quad f_\vartheta^2 \Theta_x^2 \Theta_y^2;$$
$$(\Delta\Delta_1 a)^2 a_y^2 \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^4; \quad (\Delta\Delta\Delta)^2.$$

Man erinnere sich behufs ihrer Ableitung zunächst der (in der Einleitung erwähnten) Relation (I), dann ferner folgender Gleichungen meiner vorigen Arbeit:

$$f_\Theta = -\frac{1}{2}\Delta \cdot u_x, \qquad \text{(p. 224 daselbst)},$$
$$(f\Delta u)^3 = 0, \qquad \text{(p. 225)},$$
$$\Delta_\varphi^2 = -\frac{i}{12}\cdot\Theta, \qquad \text{(p. 229)}$$

und endlich der dort p. 224, 225 mitgetheilten Rechnungen, aus denen unmittelbar folgt:

$$a_y^2 a_\vartheta^2 \Theta_x^4 = -\frac{3}{2}\Delta_{y^2}, \quad (f\Delta u)^2 = \frac{i}{4} f\cdot u_x^2 - \frac{8}{3} f_r^2 u_r^2.$$

Man erhält dann folgende Rechnungen, bez. Resultate, die ich tabellarisch zusammenstelle:

(1) $$a_x^2 b_y^2 \Delta_x^4 (ab\Delta)^2 = \frac{i}{4} f f_{y^2} - \frac{i}{3} f_y^2.$$

*) Dass ich gerade auf sie recurrire, beruht darauf, dass ich die Analogie mit der Theorie der ternären cubischen Formen (in der gerade diese Ueberschiebungen eine bekannte wichtige Rolle spielen) wenn möglich festhalte.

(2) $$a_x^2 b_x b_y \Delta_x^4 (ab\Delta)^2 = a_x^2 b_x^2 \Delta_x^3 \Delta_y (ab\Delta)^2 = -\frac{i}{12} f f_y.$$

(3) $$\Delta_\Theta^2 = \frac{2}{3} i f^2.$$

(4) $$a_x^2 \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^2 \Delta_{1,y}^2 (a\Delta\Delta_1)^2 = \frac{i}{4} f\Delta_{y^2} - \frac{8}{3}\Delta_x^2 \Delta_y^2 \Delta_v^2 f_v^2$$
$$= \frac{i}{4} f\Delta_{y^2} + \frac{2i}{9} f_\vartheta^2 \Theta_x^2 \Theta_y^2$$
$$= -\frac{i}{36} f\Delta_{y^2} - \frac{i}{18}\Delta f_{y^2} + \frac{2i}{9} f_y \Delta_y;$$

$$(f\Delta\Delta)^2 = \frac{5}{36} i f\Delta.$$

(5) $$f_\vartheta^2 \Theta_x^2 \Theta_y^2 = -\frac{8}{3}(abf)^2 (a_x^2 b_y^2 + 2 a_x b_x a_y b_y)$$
$$= -\frac{4}{3}(abc) a_x^2 b_y^2 c_x^2 \left\{ b_x (acf) + f(abc) \right\}$$
$$- \frac{16}{3}(abc) a_x b_x a_y b_y c_x^2 \left\{ 2 b_x (acf) + f(abc) \right\}$$
$$= -\frac{4}{3}(abc) a_x^2 b_y^2 b_x c_x^2 d_x^3 (acd) - \frac{4}{3} f \cdot (abc)^2 a_x^2 b_y^2 c_x^2$$
$$- \frac{16}{3}(abc) a_x a_y b_x^2 c_x^2 \left\{ a_y (bcf) - f_y (abc) \right\} - f\Delta_{y^2}$$
$$= \frac{4}{9} f_y a_x^2 c_x^2 d_x^2 (acd)^2 - \frac{1}{4} f\Delta_{y^2} - \frac{16}{9} f_{y^2} \cdot (bcd)^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2$$
$$+ f_y \Delta_y - f\Delta_{y^2}$$
$$= -\frac{\Delta}{4} f_{y^2} - \frac{5}{4} f\Delta_{y^2} + f_y \Delta_y.$$

(6) $$a_x \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^3 (a_x \Delta_{1,y} - a_y \Delta_{1,x})(a\Delta\Delta_1)^2 = 0, \quad \text{(s. F. } (f\Delta u)^3 = 0\text{)},$$
$$a_x a_y \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^4 (a\Delta\Delta_1)^2 = a_x^2 \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^3 \Delta_{1,y} (a\Delta\Delta_1)^2 = \frac{i}{12} f\Delta_y + \frac{i}{18}\Delta f_y,$$
$$(\Delta\Delta_1 a)^2 \left\{ 2 a_x a_y \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^3 \Delta_{1,y} + 4 a_x^2 \Delta_x^3 \Delta_y \Delta_{1,x}^3 \Delta_{1,y} + 3 a_x^2 \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^2 \Delta_{1,y}^2 \right\}$$
$$= \frac{2i}{3} f_y \Delta_y + \frac{5i}{12} f\Delta_{y^2} + \frac{i}{6}\Delta f_{y^2},$$

$$(\Delta\Delta_1 a)^2 \left\{ 2 a_x a_y \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^3 \Delta_{1,y} + 4 a_x^2 \Delta_x^3 \Delta_y \Delta_{1,x}^3 \Delta_{1,y} \right\} = \frac{i}{2} f\Delta_{y^2} + \frac{i}{3}\Delta f_{y^2},$$

$$(\Delta\Delta_1 a)^2 a_x a_y \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^3 \Delta_{1,y} = \frac{i}{12} f\Delta_{y^2} + \frac{i}{18}\Delta f_{y^2}.$$

Ferner ist:

$$(\Delta\Delta_1 a)^2 \left\{ a_y^2 \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^4 + 8 a_x a_y \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^3 \Delta_{1,y} \right\} = \frac{2i}{3} f_y \Delta_y + \frac{5i}{12} f\Delta_{y^2} + \frac{i}{6}\Delta f_{y^2},$$

also endlich:

$$a_y^2 \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^4 (\Delta\Delta_1 a)^2 = \frac{2i}{3} f_y \Delta_y - \frac{i}{4} f\Delta_{y^2} - \frac{5i}{18}\Delta f_{y^2}.$$

$$(7)\quad a_\vartheta{}^2\Delta_x{}^4\Delta_{1,x}^{\,4}\Theta_x{}^4(\Delta\Delta_1 a)^2 = -\frac{i}{8}\Delta^2 - \frac{i}{4}f\Delta_\Theta{}^2 + \frac{5i}{12}\Delta^2 = \frac{i}{12}\Delta^2 - \frac{i^2}{6}f^3,$$

$$(\Delta\Delta\Delta)^2 = -\frac{i}{48}\Delta^2 + \frac{i^2}{9}f^3.$$

§ 3.

Berechnung von f_p; Δ_p; f_q; $f_{y,p}$; $\Delta_{y,p}$; $f_{y,q}$; $\Delta_{y,r}$; Δ_r; $f_{y,r}$; f_r.

Ich berechne mir nunmehr zuerst gewisse erste Unterschiebungen von p, q, r über f, Δ, und ihre Polaren f_y, Δ_y. Man findet:

$$f_p = 24(\Delta f f) = 0;$$

$$\Delta_p = 24(\Delta f \Delta) = 0;$$

$$f_q = 6 f_\vartheta \Delta_\vartheta \Theta_x{}^4 = -3\Delta^3;$$

$$f_{y,p} = a_x{}^2 a_y a_p = 24 a_x{}^2 a_y (a\Delta f) = 12(a\Delta b) a_x{}^2 b_x{}^2 (a_y b_x - b_y a_x)$$
$$= \frac{3}{2}\Delta_\vartheta(\vartheta y x)\Theta_x{}^4 = \frac{3}{4}(q y x);$$

$$\Delta_{y,p} = \Delta_x{}^2\Delta_y\Delta_p = 24\Delta_x{}^4\Delta_y\Delta_{1,x}^{\,5}(\Delta\Delta_1 f)$$
$$= 12(\Delta\Delta_1 f)\Delta_x{}^4\Delta_{1,x}^{\,4}(\Delta_y\Delta_{1,x} - \Delta_x\Delta_{1,y}) = \frac{1}{6}(r y x);$$

$$f_{y,q} = a_x{}^2 a_y a_q = b\, a_x{}^2 a_y a_\vartheta \Delta_\vartheta \Theta_x{}^4 = -3\Delta\Delta_y;$$

$$\Delta_{y,r} = \Delta_x{}^4\Delta_y\Delta_r = 72\Delta_x{}^4\Delta_{1,x}^{\,4}\Delta_{2,x}^{\,4}\Delta_y(\Delta\Delta_1\Delta_2)(\Delta_1\Delta_2 f) = 24 f_y\cdot(\Delta\Delta\Delta)^2$$
$$= \frac{4i}{3} f_y(-\Delta^2 + 2if^3);$$

$$\Delta_r = \frac{4i}{3} f\left\{-\Delta^2 + 2if^3\right\};$$

$$2f_{y,r} = 2a_x{}^2 a_y a_r = 144 a_x{}^2 a_y b_x{}^3\Delta_x{}^4\Delta_{1,x}^{\,4}(\Delta\Delta_1 a)(\Delta\Delta_1 b)$$
$$= 144 a_x{}^2 b_x{}^3\Delta_x{}^4\Delta_{1,x}^{\,4}(\Delta\Delta_1 a)\left\{b_y(\Delta\Delta_1 a) + 2\Delta_{1,y}(\Delta a b)\right\}$$
$$= 20if\Delta f_y + 144 a_x{}^2 b_x{}^2\Delta_x{}^4\Delta_{1,x}^{\,4}(\Delta a b)\Delta_{1,y}\left\{-\Delta_{1,x}(\Delta a b) + \Delta_x(\Delta_1 a b)\right\}$$
$$= 20if\Delta f_y + 12if^2\Delta_y - 18\Delta_x{}^5\Delta_{1,x}^{\,4}\Delta_{1,y}\Delta_\vartheta\Delta_{1,\vartheta}\Theta_x{}^4$$
$$= 20if\Delta f_y + 12if^2\Delta_y - 3\Delta_{yq};$$

$$f_r = 10if^2\Delta + 6if^2\Delta - \frac{1}{4}\psi = -\frac{1}{4}\psi + 16if^2\Delta.$$

Die Formeln für f_p, f_q sind die beiden ersten der 15 von uns gesuchten. Die übrigen Formeln dienen als Vorbereitung für das Spätere. Analoges gilt bei den folgenden Paragraphen.

§ 4.

Berechnung von (pqx); (prx); (pqr); (qrx).

Die in der Ueberschrift genannten Determinanten ergeben sich aus § 3. durch blosse Eintragung. Man hat:

$$(pqx)=24(\Delta_q f-\Delta f_q)=4f\psi+72\Delta^3;$$

$$\begin{aligned}(prx)&=24(\Delta_r f-\Delta f_r)=32if^2(-\Delta^2+2if^3)-24\Delta\left(-\tfrac{1}{4}\psi+16if^2\Delta\right)\\&=6\Delta\psi-16\cdot 26if^2\Delta^2+64i^2f^5;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(pqr)&=24(\Delta_q f_r-\Delta_r f_q)=4\psi\left(-\tfrac{1}{4}\psi+16if^2\Delta\right)+9\sigma if\Delta^2(-\Delta^2+2if^3)\\&=-\psi^2+64if^2\Delta\psi-96if\Delta^3+192i^2f^4\Delta^2;\end{aligned}$$

$$(qrx)=-6\Delta_x^4\Delta_p\Delta_q=-\Omega.$$

§ 5.

Berechnung von f_{p^2}; $f_{p,q}$; $f_{p,r}$; f_{q^2}; $f_{q,r}$.

Desgleichen erhält man aus den für f_{yp} und f_{yq} in § 3. gegebenen Formeln durch blosse Eintragung:

$$f_{p^2}=\frac{1}{4}(qpx)=-f\psi-18\Delta^3;$$

$$f_{pq}=0;$$

$$f_{pr}=\frac{1}{4}(qrx)=-\frac{1}{4}\Omega;$$

$$f_{q^2}=-3\Delta\Delta_q=-\frac{1}{2}\Delta\psi;$$

$$f_{qr}=-3\Delta\Delta_r=-4if\Delta(-\Delta^2+2if^3).$$

§ 6.

Berechnung von Δ_{p^2}; $\Delta_{p,q}$; $\Delta_{p,r}$; Δ_{q^2}; $\Delta_{q,r}$.

Benutzt man in analoger Weise die beiden Formeln des § 3. für $\Delta_{y,p}$ und $\Delta_{y,r}$ und beachtet die eben dort gefundene Relation:

$$\Delta_{y,q}=-\frac{2}{3}f_{y,r}+\frac{20}{3}if\Delta f_y+4if^2\Delta_y,$$

so folgt:

$$\Delta_{p^2}=-\frac{1}{6}(prx)=-\Delta\psi+\frac{208}{3}if^2\Delta^2-\frac{32}{3}i^2f^5;$$

$$\Delta_{p,q}=\frac{1}{6}\Omega;$$

$$\Delta_{p,r}=0;$$

$$\Delta_{q^2} = -\frac{2}{3} f_{qr} + \frac{20}{3} if\Delta f_q + 4if^2\Delta_q = \frac{8}{3} if\Delta(-\Delta^2+2if^3)$$
$$-20if\Delta^3 + \frac{2}{3} if^2\psi$$
$$= \frac{2}{3} if^2\psi - \frac{68}{3} if\Delta^3 + \frac{16}{3} i^2 f^4 \Delta;$$
$$\Delta_{qr} = -4i\Delta^2(-\Delta^2+2if^3) = 4i\Delta^4 - 8i^2 f^3\Delta^2.$$

§ 7.

Relation zwischen den Covarianten.

Wir haben jetzt alle Mittel, um Ω^2 als ganze Function von i, f, Δ, ψ darzustellen. Die so entstehende Formel ist die eine zwischen den Covarianten (bez. den associirten Formen) bestehende Relation, von der bereits in der Einleitung die Rede war.

Nach § 4. ist:

$$(qrx) = -6\Delta_x^4\Delta_p\Delta_q = -\Omega,$$

also:

$$\Omega^2 = -6\Delta_x^4\Delta_p\Delta_q(qrx) = 6\Delta_x^4\Delta_q\{-\Delta_q(prx)+\Delta_r(pqx)-\Delta_x(pqr)\}$$
$$= (4if^2\psi - 136if\Delta^3 + 32i^2f^4\Delta)\{-6\Delta\psi + 416if^2\Delta^2 - 64i^2f^5\}$$
$$+(24i\Delta^4 - 48i^2f^3\Delta^2)(4f\psi + 72\Delta^3)$$
$$-\psi(-\psi^2 + 64if^2\Delta\psi - 96if\Delta^3 + 192i^2f^4\Delta^2),$$

und mithin:

$$\Omega^2 = \begin{cases} \psi^3 - 88if^2\Delta\psi^2 + 16\cdot 63if\Delta^4\psi + 17\cdot 64i^2f^4\Delta^2\psi - 256if^7\psi \\ \quad +27\cdot 64i\Delta^7 - 128\cdot 469i^2f^3\Delta^5 + 43\cdot 512i^3f^6\Delta^3 - 2048i^4f^9\Delta. \end{cases}$$

§ 8.

Berechnung von p^2 und q^2.

Die Berechnung der höheren Ueberschiebungen von f mit p und q gestaltet sich schwieriger als die bisherigen Aufgaben. Ich beginne mit der Auswerthung der Quadrate p^2, q^2. Diese müssen beide etwas relativ Einfaches geben, weil sie beide *gerade* Formen sind (formes droites), während p an sich *windschief* ist (forme gauche). Analoge Bemerkungen könnten bei mehreren der folgenden Rechnungen hervorgehoben werden. Inzwischen begnüge ich mich, diese Formeln einfach hinter einander zu stellen, denn auch so tritt, wie ich hoffe, der Gedankengang hinlänglich deutlich hervor.

Man findet:

$$p^2 = 576\Delta_x^5\Delta_{1,x}^5(\Delta f u)(\Delta_1 f u)$$
$$= 576\Delta_x^4\Delta_{1,x}^4\left\{\Delta_{1,x}^2(\Delta f u)^2 - \frac{1}{2}\left\{f(\Delta\Delta_1 u) - u_x(\Delta\Delta_1 f)\right\}^2\right\}$$
$$= 576\Delta a_x^3 b_x^3 \Delta_x^4 (a\Delta u)(b\Delta u) - 288f^2(\Delta\Delta u)^2 + 8fru_x - 4u_x^2 f_r$$
$$= 576\Delta\, a_x^2\, b_x^2\, \Delta_x^4\left\{b_x^2(a\Delta u)^2 - \frac{1}{2}\left\{\Delta_x(abu) - u_x(ab\Delta)\right\}^2\right\}$$
$$-288f^2(\Delta\Delta u)^2 + 8fru_x + u_x^2(\psi - 64if^2\Delta)$$
$$= 576f\Delta(f\Delta u)^2 + 36\Delta\Theta_x^4\Delta_x^4\left\{\Delta_x u_\vartheta - u_x\Delta_\vartheta\right\}^2 - 288f^2(\Delta\Delta u)^2$$
$$+ 8fru_x + \psi u_x^2 - 64if\Delta u_x^2,$$
$$p^2 = 576f\Delta(f\Delta u)^2 + 36\Delta\Theta - 288f^2(\Delta\Delta u)^2 - 12\Delta q u_x + 8fru_x + \psi u_x^2$$
$$-40if\Delta u_x^2.$$

Man hat ferner:

$$q^2 = -48q a_x^2 b_x^2 (abu)(ab\Delta)$$
$$= -48a_x^2 b_x^2 (abu)\left\{-2b_q(a\Delta u) + \frac{1}{6}\psi(ab\Delta)\right\}$$
$$= -288\,\Delta\, a_x^2\Delta\,{}^5\Delta_{1,x}^5(a\Delta u)(a\Delta_1 u) + \psi\Theta \quad (\text{vgl. F.}\, f_{yq} = -3\Delta\Delta_y)$$
$$= -288\,\Delta\, a_x^2\Delta_x^4\,\Delta_{1,x}^4$$
$$\cdot\left\{\Delta_{1,x}^2(a\Delta u)^2 - \frac{1}{2}\left\{a_x(\Delta\Delta_1 u) - u_x(\Delta\Delta_1 a)\right\}^2\right\} + \psi\Theta,$$

also:

$$q^2 = -288\Delta^2(f\Delta u)^2 + 144f\Delta(\Delta\Delta u)^2 - 4\Delta r u_x + 20if\Delta^2 u_x^2 + \psi\Theta.$$

§ 9.

Berechnung von f_{y,p^2}; f_{y,q^2}; f_{y^2,p^2}; f_{y^2,q^2}.

Aus den Formeln für p^2, q^2 erhalten wir zunächst behufs Ausrechnung der in der Ueberschrift des gegenwärtigen Paragraphen genannten Ueberschiebungen:

$$a_x a_y a_p^2 = -288f^2\, a_x\, a_y\, \Delta_x^4\Delta_{1,x}^4(a\Delta\Delta_1)^2 + 576f\Delta a_x a_y b_x^2\Delta_x^4(ab\Delta)^2$$
$$+36\Delta^2 a_x a_y \Theta_x^4 a_\vartheta^2 - 12\Delta a_x^2 a_y a_q + 8fa_x^2 a_y a_r$$
$$-40if^2\Delta a_x^3 a_y + \psi a_x^3 a_y;$$

$$a_x a_y a_q^2 = \psi a_x a_y \Theta_x^4 a_\vartheta^2 - 288\Delta^2 a_x a_y b_x^2\Delta_x^4(ab\Delta)^2$$
$$+144f\Delta a_x a_y \Delta_x^4\Delta_{1,x}^4(a\Delta\Delta_1)^2 - 4\Delta a_x^2 a_y a_r + 20if\Delta^2 a_x^3 a_y;$$

$$a_y^2 a_p^2 = -288f^2 a_y^2\Delta_x^4\Delta_{1,x}^4(a\Delta\Delta_1)^2 + 576f\Delta a_y^2 b_x^2\Delta_x^4(ab\Delta)^2$$
$$+36\Delta^2 a_y^2 O_x^4 a_\vartheta^2 - 12\Delta a_x a_y^2 a_q + 8fa_x a_y^2 a_r$$
$$-40if^2\Delta a_x^2 a_y^2 + \psi a_x^2 a_y^2;$$

$$a_y^2 a_q^2 = \psi a_y^2\Theta_x^4 a_\vartheta^2 - 288\Delta^2 a_y^2 b_x^2\Delta_x^4(ab\Delta)^2$$
$$+144f\Delta a_y^2\Delta_x^4\Delta_{1,x}^4(a\Delta\Delta_1)^2 - 4\Delta a_x a_y^2 a_r + 20if\Delta^2 a_x^2 a_y^2.$$

Nun ist nach § 2. und 3.:

$$a_x a_y a_\vartheta^2 \Theta_x^4 = -\frac{3}{2}\Delta_y;$$

$$a_x a_y b_x^2 \Delta_x^4 (ab\Delta)^2 = -\frac{i}{12} f f_y;$$

$$a_x a_y \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^4 (a\Delta\Delta_1)^2 = \frac{i}{12} f\Delta_y + \frac{i}{18}\Delta f_y;$$

$$f_{y,r} = 10 if\Delta f_y + bif^2\Delta_y - \frac{3}{2}\Delta_{yq};$$

$$a_y^2 a_\vartheta^2 \Theta_x^4 = -\frac{3}{2}\Delta_{y^2};$$

$$a_y^2 b_x^2 \Delta_x^4 (ab\Delta)^2 = \frac{i}{4} f f_{y^2} - \frac{i}{3} f_y^2;$$

$$a_y^2 \Delta_x^4 \Delta_{1,x}^4 (a\Delta\Delta_1)^2 = \frac{2}{3} if_y\Delta_y - \frac{i}{4} f\Delta_{y^2} - \frac{5i}{18}\Delta f_{y^2};$$

mithin:

$$f_{yp^2} = f_y(\psi - 24if^2\Delta) + \Delta_y(-18\Delta^2 + 24if^3) - 12f\Delta_{qy};$$

$$f_{yq^2} = 12if\Delta^2 f_y + \Delta_y\left(-\frac{3}{2}\psi - 12if^2\Delta\right) + 6\,\Delta\Delta_{qy};$$

$$\begin{aligned} f_{y^2p^2} = {} & f_{y^2}(\psi + 184if^2\Delta) + \Delta_{y^2}(-54\Delta^2 + 72if^3) - 192if\Delta f_y^2 \\ & - 192if^2 f_y\Delta_y - 12\Delta f_{qy^2} + 8ff_{ry^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{y^2q^2} = {} & -92if\Delta^2 f_{y^2} + \Delta_{y^2}\left(-\frac{3}{2}\psi - 36if^2\Delta\right) + 96if\Delta f_y\Delta_y \\ & + 96i\Delta^2 f_y^2 - 4\Delta f_{ry^2}. \end{aligned}$$

§ 10.

Berechnung von f_{p^3}; $f_{p^2,q}$; $f_{p^2,r}$; f_{p,q^2}; f_{q^3}; $f_{q^2,r}$.

Ersetzt man in den Formeln für f_{p^2y} und f_{q^2y} y durch p, q, r, so wird:

$$f_{p^3} = f_p(\psi - 24if^2\Delta) + \Delta_p(-18\Delta^2 + 24if^3) - 12f\Delta_{pq},$$

$$f_{p^2q} = f_q(\psi - 24if^2\Delta) + \Delta_q(-18\Delta^2 + 24if^3) - 12f\Delta_{q^2},$$

$$f_{p^2r} = f_r(\psi - 24if^2\Delta) + \Delta_r(-18\Delta^2 + 24if^3) - 12f\Delta_{qr},$$

$$f_{pq^2} = 12if\Delta^2 f_p + \Delta_p\left(-\frac{3}{2}\psi - 12if^2\Delta\right) + 6\Delta\Delta_{pq},$$

$$f_{q^3} = 12if\Delta^2 f_q + \Delta_q\left(-\frac{3}{2}\psi - 12if^2\Delta\right) + 6\Delta\Delta_{q^2},$$

$$f_{q^2r} = 12if\Delta^2 f_r + \Delta_r\left(-\frac{3}{2}\psi - 12if^2\Delta\right) + 6\Delta\Delta_{qr},$$

und wenn man für Δ_q, $\Delta_{p,q}$, f_p, f_q, f_r, Δ_p, Δ_q, Δ_r, Δ_{pq}, Δ_{q^2}, Δ_{qr} ihre Werthe aus §§ 1., 3., 6. einträgt:

$$(\mathrm{X})\quad\begin{cases} f_{p^3} = -2f\Omega; \\ f_{p^2q} = -6\Delta^2\psi - 4if^3\psi + 344if^2\Delta^3 - 64i^2f^5\Delta; \\ f_{p^2r} = -\frac{1}{4}\psi^2 + 22if^2\Delta\psi - 24if\Delta^4 - 16\cdot 23i^2f^4\Delta^2 + 64i^3f^7; \\ f_{pq^2} = \Delta\Omega; \\ f_{q^3} = -\frac{1}{4}\psi^2 + 2if^2\Delta\psi - 172if\Delta^4 + 32i^2f^4\Delta^2; \\ f_{q^2r} = -if\Delta^2\psi - 4i^2f^4\psi + 24i\Delta^5 + 160i^2f^3\Delta^3 - 32i^3f^6\Delta. \end{cases}$$

§ 11.

Berechnung von $f_{p,q,r}$.

Aus der in § 2. gegebenen Formel $(f\Delta u)^3 = 0$ folgt diese:

$$(af\Delta)a_x\Delta_x^3(a_q\Delta_x - \Delta_q a_x)(a_r\Delta_x - \Delta_r a_x) = 0.$$

Mithin ist (durch Ausmultiplication):

$$-f_{pqr} = 24(af\Delta)a_x\Delta_x^3(a_x a_q\Delta_x\Delta_r + a_x a_r\Delta_x\Delta_q - a_x^2\Delta_q\Delta_r).$$

Nun ist nach § 3.

$$\Delta_{yr} = \frac{4i}{3}f_y\{-\Delta^2 + 2if^3\},\quad f_{y,r} = 10if\Delta f_y + 6if^2\Delta_y - \frac{3}{2}\Delta_{qy},$$

also:

$$(af\Delta)a_x^2a_q\Delta_x^4\Delta_r = 0;$$

ferner ist:

$$(af\Delta)a_x^3\Delta_x^3\Delta_q\Delta_r = 0;$$

mithin:

$$-f_{pqr} = 144if^2\Delta_x^4\Delta_q\Delta_{1,x}^5(f\Delta\Delta_1)$$
$$= 72if^2\Delta_x^4\Delta_{1,x}^4(\Delta_q\Delta_{1,x} - \Delta_x\Delta_{1,x})(\Delta\Delta_1 f) = -(qrx)if^2,$$
$$f_{pqr} = -if^2\Omega.$$

§ 12.

Berechnung von f_{p^4}; $f_{p^3,q}$; f_{p^2,q^2}; f_{p,q^3}; f_{q^4}.

Ersetzt man in den Formeln für $a_y^2a_p^2$ und $a_y^2a_q^2$ des § 9. y durch p und q, so erhält man diese:

$$a_p^4 = f_{p^2}(\psi + 184if^2\Delta) + \Delta_{p^2}(-54\Delta^2 + 72if^3) - 192if^2f_p\Delta_p$$
$$-192if\Delta f_p^2 - 12\Delta f_{p^2q} + 8ff_{p^2r},$$
$$a_p^3a_q = f_{pq}(\psi + 184if^2\Delta) + \Delta_{pq}(-54\Delta^2 + 72if^3) - 96if^2f_p\Delta_q$$
$$-96if^2f_q\Delta_p - 192if\Delta f_pf_q - 12\Delta f_{pq^2} + 8ff_{pqr},$$
$$a_p^2a_q^2 = f_{q^2}(\psi + 184if^2\Delta) + \Delta_{q^2}(-54\Delta^2 + 72if^3) - 192if^2f_q\Delta_q$$
$$-192if\Delta f_q^2 - 12\Delta f_{q^3} + 8ff_{q^2r},$$

$$a_p a_q^3 = -92 if\Delta^2 f_{pq} + \Delta_{pq}\left(-\frac{3}{2}\psi - 36 if^2\Delta\right) + 48 if\Delta f_p \Delta_q$$
$$+48 if\Delta f_q \Delta_p + 96 i\Delta^2 f_p f_q - 4\Delta f_{pqr},$$
$$a_q^4 = -92 if\Delta^2 f_{q^2} + \Delta_{q^2}\left(-\frac{3}{2}\psi - 36 if^2\Delta\right) + 96 if\Delta f_q \Delta_q$$
$$+96 i\Delta^2 f_q^2 - 4\Delta f_{q^2 r},$$

und wenn man für:

$\Delta_q, \Delta_{pq}, f_p, f_q, \Delta_p, f_{p^2}, f_{pq}, f_{q^2}, \Delta_{p^2}, \Delta_{pq}, \Delta_{q^2}, f_{p^2 q}, f_{pq^2}, f_{q^3}, f_{p^2 r}, f_{q^2 r}, f_{pqr}$

ihre Werthe aus den §§ 1., 3., 5., 6., 10., 11. einträgt:

$$f_{p^4} = -3f\psi^2 + 108\Delta^3\psi - 32 if^3\Delta\psi - 79\cdot 144 if^2\Delta^4 + 53\cdot 64 i^2 f^5\Delta^2$$
$$-256 i^3 f^8,$$
$$f_{p^3 q} = (-21\Delta^2 + 4 if^3)\Omega,$$
$$f_{p^2 q^2} = \frac{5}{2}\Delta\psi^2 - 64 if^2\Delta^2\psi + 16 i^2 f^5\psi + 24\cdot 73 if\Delta^5 - 1024 i^2 f^4\Delta^3$$
$$+128 i^3 f^7\Delta,$$
$$f_{pq^3} = \left(-\frac{1}{4}\psi - 2 if^2\Delta\right)\Omega,$$
$$f_{q^4} = -if^2\psi^2 + 36 if\Delta^3\psi + 8 if^4\Delta\psi + 3\cdot 256 i\Delta^6 + 176 i^2 f^3\Delta^4$$
$$-64 i^3 f^6\Delta^2.$$

§ 13.

Zusammenstellung der Resultate.

Der Uebersichtlichkeit wegen stelle ich nun noch in diesem Schlussparagraphen die gewonnenen Resultate, soweit sie für die typische Darstellung unmittelbar wichtig sind, zusammen. Man hat für die Determinante (pqx):

$$(pqx) = 4f\psi + 72\Delta^3,$$

man hat ferner für die 14 Polaren:

$$f_p = 0,$$
$$f_q = -3\Delta^2,$$
$$f_{p^2} = -f\psi - 18\Delta^3,$$
$$f_{pq} = 0,$$
$$f_{q^2} = -\frac{1}{2}\Delta\psi,$$
$$f_{p^3} = -2f\Omega,$$
$$f_{p^2 q} = -6\Delta^2\psi - 4 if^3\psi + 344 if^2\Delta^3 - 64 i^2 f^5\Delta,$$
$$f_{pq^2} = \Delta\Omega,$$
$$f_{q^3} = -\frac{1}{4}\psi^2 + 2 if^2\Delta\psi - 172 if\Delta^4 + 32 i^2 f^4\Delta^2,$$
$$f_{p^4} = -3f\psi^2 + 108\Delta^3\psi - 32 if^3\Delta\psi - 79\cdot 144 if^2\Delta^4 + 53\cdot 64 i^2 f^5\Delta^2$$
$$-256 i^3 f^8,$$

$$f_{p^3q} = (-21\Delta^2 + 4if^3)\Omega,$$

$$f_{p^2q^2} = \frac{5}{2}\Delta\psi^2 - 64if^2\Delta^2\psi + 16i^2f^5\psi + 24\cdot 73if\Delta^5 - 1024i^2f^4\Delta^3 + 128i^3f^7\Delta,$$

$$f_{pq^3} = \left(-\frac{1}{4}\psi - 2if^2\Delta\right)\Omega,$$

$$f_{q^4} = -if^2\psi^2 + 36if\Delta^3\psi + 8i^2f^4\Delta\psi + 3\cdot 256i\Delta^6 + 176i^2f^3\Delta^4 - 64i^3f^6\Delta^2,$$

man hat endlich die eine Relation zwischen den Formen des associirten Systems:

$$\Omega^2 = \psi^3 - 88if^2\Delta\psi^2 + 16\cdot 63if\Delta^4\psi + 17\cdot 64i^2f^4\Delta^2\psi - 256if^7\psi + 27\cdot 64i\Delta^7 - 128\cdot 469i^2f^3\Delta^5 + 43\cdot 512i^3f^6\Delta^3 - 2048i^4f^9\Delta.$$

Zweites Capitel.

Anwendungen.

§ 14.

Die associirten Formen für das kanonische f.

Ehe wir zeigen, dass jede Form f, die der Bedingung (I) der Einleitung genügt, in die kanonische Gestalt:

$$x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$$

gebracht werden kann, berechnen wir für letztere Form die expliciten Werthe der associirten Formen. Diese Werthe sind für die spätere Problemstellung nothwendig; überdies zeigen sie, wesshalb wir im folgenden Paragraphen statt p die lineare Zwischenform r heranziehen müssen.

Wir haben zuvörderst:

$$\Theta = 16\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta = 32\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

und also:

$$\Theta = u_1^2(x_2^4 - 4x_1x_2x_3^2) + u_2^2(x_3^4 - 4x_1^2x_2x_3) + u_3^2(x_1^4 - 4x_1x_2^2x_3) + 2u_2u_3(2x_1x_2^3 - x_1^2x_3^2) + 2u_1u_3(2x_2x_3^3 - x_1^2x_2^2) + 2u_1u_2(2x_1^3x_2 - x_2^2x_3^2),$$

$$\Delta = 5x_1^2x_2^2x_3^2 - (x_2x_3^5 + x_3x_1^5 + x_1x_2^5).$$

Wir haben ferner:

$$p = 24 \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}, \quad q = 96 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \Delta_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

mithin:

$$p = \begin{cases} u_1(x_1^8 - 7x_1^5x_2^2x_3 + 35x_1^3x_2x_3^4 - 35x_1^2x_2^4x_3^2 - 5x_1x_2^7 \\ \qquad - 3x_1x_3^7 + 14x_2^3x_3^5) \\ u_2(-3x_1^7x_2 + 14x_1^5x_2^3 + 35x_1^4x_2^3x_3 - 35x_1^2x_2^2x_3^4 \\ \qquad - 7x_1x_2^5x_3^2 + x_2^8 - 5x_2x_3^7) \\ u_3(-5x_1^7x_3 - 35x_1^4x_2^2x_3^2 + 14x_1^3x_2^5 - 7x_1^2x_2x_3^5 \\ \qquad + 35x_1x_2^4x_3^3 - 3x_2^7x_3 + x_3^8), \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} u_1(x_1^7x_2^2 + 38x_1^5x_2x_3^3 - 25x_1^4x_2^4x_3 - 2x_1^3x_3^6 - 25x_1^2x_2^2x_3^4 \\ \qquad + 19x_1x_2^6x_3^2 - x_2^9 - 9x_2^2x_3^7) \\ u_2(-9x_1^7x_3^2 - 2x_1^6x_2^3 - 25x_1^4x_2^2x_3^3 + 38x_1^3x_2^5x_3 \\ \qquad + 19x_1^3x_2^5x_3^6 - 25x_1x_2^4x_3^4 + x_2^7x_3^2 - x_3^9) \\ u_3(-x_1^9 + 19x_1^6x_2^2x_3 - 25x_1^4x_2x_3^4 - 25x_1^3x_2^4x_3^2 - 9x_1^2x_2^7 \\ \qquad + x_1^2x_3^7 + 38x_1x_2^3x_3^5 - 2x_1^6x_2^3). \end{cases}$$

Wir haben endlich

$$\psi = 6\Delta_q, \quad \Omega = 6\Delta_{p,q},$$

folglich:

$$\psi = \begin{cases} x_1^{14} + x_2^{14} + x_3^{14} - 34(x_1^{11}x_2^2x_3 + x_2^{11}x_3^2x_1 + x_3^{11}x_1^2x_2) \\ \quad - 250(x_1^9x_2x_3^4 + x_2^9x_3x_1^4 + x_3^9x_1x_2^4) \\ \quad + 375(x_1^8x_2^4x_3^2 + x_2^8x_3^4x_1^2 + x_3^8x_1^4x_2^2) \\ \quad + 18(x_1^7x_2^7 + x_2^7x_3^7 + x_1^7x_3^7) \\ \quad - 126(x_1^6x_2^3x_3^5 + x_2^6x_3^3x_1^5 + x_3^6x_1^3x_2^5), \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} x_1^{21} + x_2^{21} + x_3^{21} - 7\{x_1^{18}x_2^2x_3 + x_2^{18}x_3^2x_1 + x_3^{18}x_1^2x_2\} \\ \quad + 217(x_1^{16}x_2x_3^4 + x_2^{16}x_3x_1^4 + x_3^{16}x_1x_2^4) \\ \quad - 308(x_1^{15}x_2^4x_3^2 + x_2^{15}x_3^4x_1^2 + x_3^{15}x_1^4x_2^2) \\ \quad - 57(x_1^{14}x_2^7 + x_2^{14}x_3^7 + x_3^{14}x_1^7) - 289(x_1^{14}x_3^7 + x_2^{14}x_1^7 + x_3^{14}x_2^7) \\ \quad + 4018(x_1^{13}x_2^3x_3^5 + x_2^{13}x_3^3x_1^5 + x_3^{13}x_1^3x_2^5) \\ \quad + 637(x_1^{12}x_2^6x_3^3 + x_2^{12}x_3^6x_1^3 + x_3^{12}x_1^6x_2^3) \\ \quad + 1638(x_1^{11}x_2^9x_3 + x_2^{11}x_3^9x_1 + x_3^{11}x_1^9x_2) \\ \quad - 6279(x_1^{11}x_2^2x_3^8 + x_2^{11}x_3^2x_1^8 + x_3^{11}x_1^2x_2^8) \\ \quad + 7007(x_1^{10}x_2^5x_3^6 + x_2^{10}x_3^5x_1^6 + x_3^{10}x_1^5x_2^6) \\ \quad - 10010(x_1^9x_2^8x_3^4 + x_2^9x_3^8x_1^4 + x_3^9x_1^8x_2^4) + 3432x_1^7x_2^7x_3^7. \end{cases}$$

§ 15.

Berechtigung des kanonischen f.

Um jetzt zu beweisen, dass jedes f, welches unserer Bedingung (I) genügt, in die kanonische Gestalt des vorigen Paragraphen gebracht werden kann, betrachten wir vor allen Dingen die Art der in letzterer vorkommenden Variablen. Ich will dabei geometrische Redeweise einführen. Dann ist

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$$

eine Curve vierter Ordnung, welche in den Ecken des Coordinatendreiecks *Wendepunkte* hat. Zugleich sind die Seiten des Coordinatendreiecks *Wendetangenten*, und es ist also das ganze Dreieck durch einen beliebigen seiner Eckpunkte bestimmt. Man lasse einem solchen Eckpunkte die identische Zwischenform u_x entsprechen. *Dann müssen die beiden übrigen durch zwei andere lineare Zwischenformen gegeben sein.* Nur p kann hier nicht in Betracht kommen. Denn nehmen wir z. B. den Eckpunkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so dass u_x gleich $u_1 x_1$ wird. Dann wird auch p nach der Formel des vorigen Paragraphen ein Multiplum von u_1; es hat also für unseren jetzigen Zweck keine selbständige Bedeutung. Dagegen wird q (wie die entsprechende Formel zeigt) gleich $-u_3 x_1^9$, stellt also in der That eine neue Dreiecksecke dar. Es wäre leicht zu berechnen, dass r ein Multiplum von u_2 wird. Aber wir wollen diese Ueberlegung sparen, da es uns bei der ganzen Ueberlegung hauptsächlich darauf ankam, zu zeigen, wesshalb man p nicht gebrauchen kann, und da überdies das sogleich abzuleitende Resultat über die Bedeutung von r keinen Zweifel lässt.

Es mag jetzt f, in Variabelen y geschrieben, irgendwie gegeben sein, doch so, dass die Bedingung (I) befriedigt ist. Dann gelten dafür sämmtliche Angaben meiner vorigen Arbeit, insbesondere das dort aufgestellte volle System. Wir führen jetzt für die Curve $f = 0$ ein neues Coordinatendreieck ein. Als erste Ecke wählen wir einen Punkt x (entsprechend $u_x = 0$), als zweite und dritte Ecke die entsprechenden $u_q = 0$, $u_r = 0$. Ueberdies bedingen wir, *dass x mit einem Wendepunkte der Curve $f = 0$ zusammenfallen solle.* — Die allgemeine Methode zur Einführung eines neuen Coordinatendreiecks giebt:

$$f(qrx)^4 = a_y^4 (qrx)^4 = \{a_q(rxy) + a_r(qyx) + a_x(qry)\}^4.$$

Hier entstehen rechter Hand beim Auspotenziren die in den x geschriebenen Covarianten:

$$f,\ f_q,\ f_{q^2},\ f_{q^3},\ f_{q^4},\ f_r,\ f_{qr},\ f_{q^2r},\ f_{q^3r},\ f_{r^2},\ f_{qr^2},\ f_{q^2r^2},\ f_{r^3},\ f_{qr^3},\ f_{r^4}.$$

Jetzt beachte man, dass x ein Wendepunkt sein soll, dass also f und Δ gleich Null sind. Die beiden anderen (nicht verschwindenden)

Fundamentalcovarianten ψ und Ω haben einen durch 7 theilbaren Grad. Daher schliessen wir, *dass für unseren Punkt x überhaupt alle Covarianten verschwinden, deren Grad nicht durch* 7 *theilbar ist.* — Nun sind die Grade der eben zusammengestellten Covarianten beziehungsweise:

$$4,\ 12,\ 20,\ 28,\ 36,\ 14,\ 22,\ 30,\ 38,\ 24,\ 32,\ 40,\ 34,\ 42,\ 44;$$

die Covarianten verschwinden also sämmtlich bis auf die drei:

$$f_{q^3},\ f_r,\ f_{qr^3},$$

und also wird:

$$f(qrx)^4 = 4\left\{f_{q^3}\cdot(rxy)^3\,(qry) + f_r(qry)^3\,(qyx) + f_{qr^3}(qyx)^3\,(rxy)\right\},$$

f nimmt also in der That die Gestalt an:

$$f = x_1{}^3 x_2 + x_2{}^3 x_3 + x_3{}^3 x_1,$$

was zu beweisen war.

§ 16.

Das Fundamentalproblem.

Als Fundamentalproblem will ich jetzt mit Hrn. Klein das folgende bezeichnen: *Für unbekannte x_1, x_2, x_3 seien die kanonischen ψ, Δ, Ω irgendwie numerisch, ferner $f = 0$ gegeben; man soll die x_1, x_2, x_3 berechnen.* Natürlich müssen dabei die für ψ, Δ, Ω vorgeschriebenen Werthe mit der Relation des § 7. verträglich sein, wobei man beachten mag, dass diese Relation in Anbetracht des verschwindenden f und wegen $i = 1$ die einfache Form annimmt:

$$\Omega^2 = \psi^3 + 1728\,\Delta^7.$$

Die Erledigung dieses Problems geschieht, wie man weiss, in der Art, dass man zunächst die Verhältnisse der x vermöge elliptischer Functionen berechnet und die absoluten Werthe hernach den gegebenen ψ, Δ, Ω entnimmt. Hr. Klein hat neuerdings, wie er mir mittheilte, die hier nöthig werdenden elliptischen Functionen wesentlich vereinfacht. *Bedient man sich der Jacobi'schen Bezeichnungen, so setze man zur Berechnung des Moduls $\varkappa^2$:*

$$\frac{\psi^3}{\Delta^7} = -256\,\frac{(1-\varkappa^2\varkappa'^2)^3}{\varkappa^4\varkappa'^4}$$

und hat dann unmittelbar:

$$x_1 : x_2 : x_3 = q^{\frac{1}{7}}\cdot\sum_{r=0}^{r=\infty}(-1)^r q^{7(r^2+r)}\left(q^{(2r+1)} - q^{-(2r+1)}\right)$$

$$: -q^{\frac{4}{7}}\cdot\sum_{r=0}^{r=\infty}(-1)^r q^{7(r^2+r)}\left(q^{2(2r+1)} - q^{-2(2r+1)}\right)$$

$$: \quad q^{\frac{9}{7}}\cdot\sum_{r=0}^{r=\infty}(-1)^r q^{7(r^2+r)}\left(q^{3(2r+1)} - q^{-3(2r+1)}\right).$$

Es fragt sich nur noch, wie man aus den Verhältnissen der x die absoluten Werthe am raschesten findet. Die Ausdrücke des § 14. für Δ und ψ sind nicht übermässig lang und mögen unmittelbar verwendet werden. Sie bestimmen x_1, x_2, x_3 bis auf das Vorzeichen. Dieses letztere muss man dem Werthe Ω entnehmen. Aber das Ω des § 14. ist sehr complicirt, so dass es zweckmässig scheint, Ω indirect zu berechnen. Man setze

$$\delta = -7x_1x_2x_3.$$

Dann genügt δ, wie Hr. Klein zeigte, der folgenden Gleichung achten Grades*):

$$\delta^8 - 14\Delta\cdot\delta^6 + 63\Delta^2\cdot\delta^4 - 70\Delta^3\cdot\delta^2 + \Omega\cdot\delta - 7\Delta^2 = 0.$$

Eben diese benutze man, um aus ihr Ω zu berechnen.

§ 17.

Herstellung der kanonischen Form.

Ich erledige nunmehr die Aufgabe: *ein beliebiges f, das der Bedingung I. genügt, in die kanonische Form*

$$x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$$

zu transformiren. Die Lösung ist folgende.

Man suche zunächst ein beliebiges Werthsystem ξ_1, ξ_2, ξ_3, für welches das gegebene f gleich Null wird, und berechne nach den Formeln des § 1. die zugehörigen Werthe von Δ, ψ, Ω, sowie die Coefficienten p_i von p, bez. q_i von q $(i = 1, 2, 3)$. Sodann erfährt man aus § 16. für die so gewonnenen Δ, ψ, Ω zugehörige x_1, x_2, x_3. Dieselben trage man in die p_i, q_i des § 14. ein; ich will die entstehenden Grössen p_i', q_i' nennen. *Dann sind die Coefficienten a_{ik} derjenigen linearen Substitution, welche von den ursprünglichen Variabeln zu den kanonischen überführt, durch folgendes Gleichungssystem gegeben:*

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3, \\ p_i' &= a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3, \\ q_i' &= a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + a_{i3}q_3. \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

*) Im XV. Bande dieser Annalen, p. 266 (Formel (13) daselbst) hat Hr. Klein auch die allgemeine Gleichung angegeben, der δ genügt, wenn f nicht gleich Null ist. Dieselbe ist in einem Gliede falsch. Sie soll heissen:

$$\delta^8 - 14\Delta\cdot\delta^6 + (63\Delta^2 - 42f^3)\delta^4 + (7f\psi - 70\Delta^3 - 98f^3\Delta)\delta^2 + \Omega\cdot\delta$$
$$- 7(\Delta^4 + f^6 + 18f^3\Delta^2 + f\Delta\psi) = 0.$$

Die Gleichung siebenten Grades ebenda (Formel (12)) ist richtig.

§ 18.

Die Erweiterung des Fundamentalproblems.

Betrachten wir nunmehr das allgemeine Problem: *die unbekannten x_1, x_2, x_3 zu berechnen, wenn die Zahlenwerthe der kanonischen f, Δ, ψ, Ω in Uebereinstimmung mit der Relation des § 7. aber übrigens beliebig gegeben sind.* Zu einer Behandlung muss man sich einen Punkt y auf $f=0$ bestimmt denken, der durch eine lineare Zwischenform von x gegeben ist. Man wird dann aus den gegebenen f, Δ, ψ, Ω die Werthe von $\Delta(y)$, $\psi(y)$, $\Omega(y)$, aus diesen die y nach § 16. berechnen und schliesslich von den y zu den x zurückgehen.

Die erste Frage ist also die: *wie man das einfachste y findet.* In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass dabei eine Hülfsgleichung vierten Grades nicht zu vermeiden ist. Das einfachste y wird dasjenige sein, bei welchem diese Hülfsgleichung den niedrigsten Grad in den x aufweist. Ich setze daher

$$u_y = u_p + \lambda u_x.$$

Die entstehende Gleichung für λ:

$$f(y) = f\cdot\lambda^4 + 6f_{p^2}\cdot\lambda^2 + 4f_{p^3}\cdot\lambda + f_{p^4} = 0$$

steigt in den x nur bis zum 32ten Grade. Uebrigens finden sich ihre Coefficienten in § 13. durch die hier als bekannt vorausgesetzten Grössen ausgedrückt. — Die so gewonnene Gleichung ist jetzt aufzulösen und eine bestimmte Wurzel derselben, $\lambda=\lambda_1$, zu wählen und in der Folge festzuhalten. Dann ist

$$u_y = u_p + \lambda_1 u_x$$

eine lineare Zwischenform mit allerdings irrationalen aber doch bekannten Coefficienten.

In zweiter Linie haben wir für das so definirte y die Covarianten Δ, ψ, Ω und auch, weil sie sogleich nöthig werden, die Zwischenformen $p(y), q(y)$ zu berechnen. Zu dem Zwecke verfahre man, theoretisch zu reden, ganz nach der Methode, die uns in der Einleitung dazu diente, die typische Darstellung durch u_x, u_p, u_q durchzuführen. Man hat nur statt u_p jetzt u_y zu setzen.

Dabei wolle man beachten, dass die Determinante (xyq) gleich (xpq), also ungeändert bleibt. Natürlich wird man bei der wirklichen Ausführung schrittweise gehen. Man berechne zunächst aus der Tabelle des § 13. unter den 14 Polaren von f nach y und q alle diejenigen, die man im Laufe der Rechnung gebraucht. Dies ist natürlich wegen $u_y = u_p + \lambda u_x$ sehr einfach. Sodann beginne man mit denjenigen Formen des § 1., die unmittelbar durch symbolische Producte gegeben sind, nämlich $\Theta(y) = -\frac{1}{8}a_y^2 b_y^2 (abu)^2$ und $\Delta(y) = \frac{3}{32}a_y^2 b_y^2 c_y^2 (abu)^2$.

Sie werden den in der Einleitung gegebenen Entwickelungen entsprechend mit $(xyq)^2$ multiplicirt und dann durch den Identitätssatz in eine Function der Polaren von f nach y und q, also in eine Function bekannter Grössen verwandelt. Es ist deutlich, dass man im weiteren Verlauf dieser Rechnung, ehe man zu ψ, Ω, p, q kommt, mannigfache Vereinfachungen eintreten lassen kann. Ich gebe im folgenden Paragraphen die Resultate, zu denen ich durch die Detailuntersuchung gekommen bin.

Jetzt kommt als dritter Theil der Berechnung die Aufsuchung der y_1, y_2, y_3. Dieselbe geschieht durch die in § 16. gegebene Methode.

Um endlich von den y zu den x zurückzugehen, greife man wieder zu den linearen Zwischenformen. Wir fanden $p(y)$, $q(y)$ als lineare Combinationen der u_x, u_y, u_q mit bekannten Coefficienten. Andererseits kann man $p(y)$, $q(y)$ aus den Formeln des § 14. durch Eintragung der gefundenen y_1, y_2, y_3 berechnen. Um also die x_1, x_2, x_3 zu finden, hat man nur die Coefficienten der u_1, u_2, u_3 zu vergleichen. Dies giebt *lineare* Gleichungen zur Bestimmung der x.

Hiermit ist Alles erledigt. Im letzten Paragraphen (§ 20.) stelle ich der Uebersicht halber noch einmal alle Formeln zusammen, die bei der Berechnung wirklich in Betracht kommen.

§ 19.

Die associirten Formen für y.

Die noch rückständige Ausrechnung von $\Delta(y)$, $\psi(y)$, $\Omega(y)$, $p(y)$, $q(y)$ lässt sich am besten so durchführen, dass man zunächst eine Anzahl von Ueberschiebungen von Δ mit y, q berechnet. In Folge der besonderen für unsere Form f geltenden Beziehungen gestaltet sich dies recht einfach. Es sei nämlich C_{ikl} diejenige Determinante, welche man aus dem Schema:

$$\frac{3(xyq)}{32}\cdot\left|\begin{array}{cccccc} f_{x^3y} & f_{x^2y^2} & f_{xy^3} & f_{x^2yq} & f_{xy^2q} & f_{xyq^2} \\ f_{x^2y^2} & f_{xy^3} & f_{y^4} & f_{xy^2q} & f_{y^3q} & f_{y^2q^2} \\ f_{x^2yq} & f_{xy^2q} & f_{y^3q} & f_{xyq^2} & f_{y^2q^2} & f_{yq^3} \end{array}\right|$$

durch Herausheben der i^{ten}, k^{ten} und l^{ten} Colonne bilden kann. Dann findet man durch kurze Rechnung:

$$\Delta_y{}^6 = \Delta(y) = 3C_{235}; \quad \Delta_x\Delta_y{}^5 = C_{234} + C_{135}; \quad \Delta_y{}^5\Delta_q = C_{345} - C_{236};$$
$$\Delta_x{}^4\Delta_y{}^2 = C_{134} + C_{125}; \quad 2\Delta_x\Delta_y{}^4\Delta_q = C_{136} - 2C_{245}; \quad \Delta_y{}^4\Delta_q{}^2 = C_{346} - C_{256}.$$

Hieraus berechnet man sofort:

$$p(y) = 24(xyq)\left|\begin{array}{ccc} u_x & u_y & u_q \\ \Delta_{y^5x} & \Delta_{y^6} & \Delta_{y^5q} \\ f_{y^3x} & f_{y^4} & f_{y^3q} \end{array}\right|$$
$$= A_1\cdot u_x + A_2\cdot u_y + A_3\cdot u_q,$$

ebenso:

$$q(y) = 16(xyq)^3 \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_q & 0 \\ f_{x^2y^2} & f_{xy^3} & f_{xy^2q} & \Delta_{xy^5} \\ f_{xy^3} & f_{y^4} & f_{y^3q} & \Delta_{y^6} \\ f_{xy^2q} & f_{y^3q} & f_{y^2q^2} & \Delta_{y^5q} \end{vmatrix}$$

$$= B_1 \cdot u_x + B_2 \cdot u_y + B_3 \cdot u_q,$$

wo ich die Abkürzungen A_i, B_i der noch folgenden Formeln wegen einführe. Vermöge derselben wird

$$\psi(y) = 6\Delta_y^5(B_1\Delta_x + B_2\Delta_y + B_3\Delta_q),$$
$$\Omega(y) = 6\Delta_y^4(A_1\Delta_x + A_2\Delta_y + A_3\Delta_q)(B_1\Delta_x + B_2\Delta_y + B_3\Delta_q),$$

und sind also auch $\psi(y)$, $\Omega(y)$ gefunden.

§ 20.

Erledigung des erweiterten Problems.

Indem man noch einige der im Vorstehenden besprochenen Operationen in bestimmte Formeln kleidet, gestaltet sich schliesslich die Auflösung des in § 18. formulirten Problems folgendermassen:

1) Man berechne aus den gegebenen Grössen f, Δ, ψ, Ω vermöge der Tabelle des § 13.:

$$f_{p^2}, \quad f_{p^3}, \quad f_{p^4}.$$

2) Sodann suche man eine Wurzel der Gleichung:

$$f \cdot \lambda^4 + 6f_{p^2} \cdot \lambda^2 + 4f_{p^3} \cdot \lambda + f_{p^4} = 0;$$

sie heisse λ_1.

3) Man berechne für $u_y = u_p + \lambda_1 \cdot u_x$ nach § 13.:

$$f_{x^3y}, \quad f_{x^2y^2}, \quad f_{xy^3}, \quad f_{y^4}, \quad f_{xy^2q}, \quad f_{x^2yq}, \quad f_{y^3q}, \quad f_{xyq^2}, \quad f_{y^2q^2}, \quad f_{yq^3}.$$

4) Hieraus noch § 19. die

$$\Delta_{y^6}, \quad \Delta_{xy^5}, \quad \Delta_{y^5q}, \quad \Delta_{x^4y^2}, \quad \Delta_{xy^4q}, \quad \Delta_{y^4q^2},$$

sowie die A_i, die B_i, endlich $\psi(y)$ und $\Omega(y)$.

5) Aus $\Delta(y)$, $\psi(y)$, $\Omega(y)$ ergeben sich die y_1, y_2, y_3 durch § 16.

6) Die so gefundenen y trage man in die p, q des § 14. ein, wodurch Werthe entstehen, welche ich $\Sigma P_i u_i$ und $\Sigma Q_i u_i$ nennen will.

7) Dann hat man schliesslich zur Berechnung der x die linearen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A_1x_i + A_2y_i + A_3q_i = P_i, \\ B_1x_i + B_2y_i + B_3q_i = Q_i. \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Erlangen, Ende September 1880.

Sur les formes quadratiques binaires indéfinies.

Par

A. Markoff à St. Petersbourg.

(Sécond mémoire.)

Il a été demontré dans mon premier mémoire*) „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies", qu'à toute classe de formes binaires quadratiques d'un déterminant positif donné correspond une certaine suite déterminée de nombres positifs entiers

(J) $\quad \cdots, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$

et réciproquement; le rapport entre $2\sqrt{D}$ et le minimum de ces formes est égal au maximum de la somme

$$\alpha_x + \cfrac{1}{\alpha_{x+1} + \cfrac{1}{\alpha_{x+2} + \cdots}} + \cfrac{1}{\alpha_{x-1} + \cfrac{1}{\alpha_{x-2} + \cdots}} = \frac{2}{L_x},$$

où l'indice x est un nombre variable.

Après avoir fait différentes suppositions relativement à la suite (J) et avoir varié l'indice x, je suis arrivé aux résultats suivants:

I. Pour chaque nombre positif

$$l \leqq \frac{2}{3}$$

on peut trouver une quantité infinie de suites (J) satisfaisant à la condition

$$L_x \geqq l$$

pour toute indice x.

II. A tout nombre positif

$$l > \frac{2}{3}$$

donné correspond un nombre limité de suites (J), satisfaisant à la condition

$$L_x \geqq l$$

pour toute indice x.

---

*) Mathematische Annalen, Band XV., p. 381—406.

III. Si la suite (J) satisfait à la condition

$$L_\varkappa \overline{\gtrless} l > \frac{2}{3}$$

pour toute indice $\varkappa$, dans ce cas il lui correspond un certain système (Φ)

$$(\Phi)\quad \left\{\begin{array}{llllll} \cdots, w_{-2}, & w_{-1}, & w_0, & w_1, & w_2, \cdots & W, \\ \cdots, v_{-2}, & v_{-1}, & v_0, & v_1, & v_2, \cdots & V, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdots, s_{-2}, & s_{-1}, & s_0, & s_1, & s_2, \cdots & S, \\ \cdots, r_{-2}, & r_{-1}, & r_0, & r_1, & r_2, \cdots & R \end{array}\right.$$

qui se compose d'un nombre limité de suites

$$W,\ V,\ \cdots,\ S,\ R,$$

dont W ne contient que des termes égaux

$$\cdots,\ w^0,\ w^0,\ w^0,\ w^0,\ \cdots$$

et toutes les autres se déduisent les unes des autres d'après la forme

$$\begin{array}{ll} \cdots,\ v^0,\ \underbrace{v^0-1}_{w_{-1}},\ v^0,\ \underbrace{v^0-1}_{w_0},\ v^0,\ \underbrace{v^0-1}_{w_1},\ \cdots & V, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdots,\ r^0,\ \underbrace{r^0-1}_{s_{-1}},\ r^0,\ \underbrace{r^0-1}_{s_0},\ r^0,\ \underbrace{r^0-1}_{s_1},\ \cdots & R; \end{array}$$

enfin la suite (J) peut être mise sous la forme

$$\cdots,\ 2,\ 2,\ \underbrace{1}_{2r_{-1}},\ 2,\ 2,\ \underbrace{1}_{2r_0},\ 2,\ 2,\ \underbrace{1}_{2r_1},\ \cdots$$

Je me propose de déterminer dans ce second mémoire la période de la suite (J) et le maximum de la somme $\frac{2}{L_\varkappa}$, les nombres

$$w^0,\ v^0,\ \cdots,\ s^0,\ r^0.$$

étant connues.

§ 1.

Modifions quelques unes des notations précédentes afin de faciliter les discussions qui vont suivre.

Posons

$$w^0 = a_0,\ v^0 = a_1,\ \cdots,\ s^0 = a_{n-2},\ r^0 = a_{n-1}$$

et désignons les suites

$$W,\ V,\ \cdots,\ S,\ R$$

par les symboles correspondantes:

$$(a_0),\ (a_0, a_1),\ \cdots,\ (a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}),\ (a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}).$$

Le symbole (a_0) représente la suite

$$\cdots, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, \cdots,$$

le symbole (a_0, a_1) — la suite

$$\cdots, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, \cdots,$$

et en général si $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa)$ représente une suite

$$\cdots, b_{\varkappa,-2}, b_{\varkappa,-1}, b_{\varkappa,0}, b_{\varkappa,1}, b_{\varkappa,2}, \cdots$$

la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$ peut être mise sous la forme:

$$\cdots, a_{\varkappa+1}, \underbrace{a_{\varkappa+1} - 1}_{b_{\varkappa,-2}}, a_{\varkappa+1}, \underbrace{a_{\varkappa+1} - 1}_{b_{\varkappa,-1}}, a_{\varkappa+1}, \underbrace{a_{\varkappa+1} - 1}_{b_{\varkappa,0}}, a_{\varkappa+1}, \underbrace{a_{\varkappa+1} - 1}_{b_{\varkappa,1}}, \cdots$$

Désignons en outre par $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \end{pmatrix}$ une suite:

$$\cdots, b_{\varkappa,-2}, b_{\varkappa,-2}, b_{\varkappa,-1}, b_{\varkappa,-1}, b_{\varkappa,0}, b_{\varkappa,0}, b_{\varkappa,1}, b_{\varkappa,1}, b_{\varkappa,2}, b_{\varkappa,2}, \cdots$$

qu'on obtient en répétant 2 fois chacun des termes de la suite

$$(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa).$$

De cette manière le symbole $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_{n-2}, & a_{n-1}, & 2 \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_{n-2}, & a_{n-1}, & 2 \end{pmatrix}$ représentera la suite (J′) pour laquelle la suite R est exprimée par le symbole $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1})$.

En appliquant ces mêmes notations aux suites J_0 et J_1, auquelles ne correspondent aucunes suites R, nous représenterons la première d'elles par le symbole $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la seconde par $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les suites $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa)$ et $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \end{pmatrix}$ sont périodiques. La manière de les obtenir l'indique suffisamment.

Pour trouver le nombre $m_\varkappa$ et la somme $s_\varkappa$ des termes renfermés dans une période*) de la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa)$ remarquons les relations

(1) $$m_{\varkappa+1} = m_\varkappa + s_\varkappa,$$

(2) $$s_{\varkappa+1} = m_\varkappa a_{\varkappa+1} + s_\varkappa(a_{\varkappa+1} - 1)$$

d'où l'on déduit

$$s_{\varkappa+1} = m_\varkappa + (a_{\varkappa+1} - 1) m_{\varkappa+1}.$$

De même on trouve

(3) $$s_\varkappa = m_{\varkappa-1} + (a_\varkappa - 1) m_\varkappa.$$

---

*) Ici comme dans toutes les discussions qui vont suivre il s'agit de périodes avec le minimum de termes.

En substituant cette valeur de $s_\varkappa$ dans la formule (1) nous aurons

$$m_{\varkappa+1} = a_\varkappa m_\varkappa + m_{\varkappa-1}. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) et les égalités évidentes

$$m_0 = 1, \quad m_1 = a_0 + 1$$

nous indiquent, que les fractions $\frac{m_{\varkappa+1}}{m_\varkappa}$ et $\frac{s_\varkappa}{m_\varkappa}$ sont irréductibles et égales respectivement à

$$a_\varkappa + \cfrac{1}{a_{\varkappa+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0+1}}}, \qquad a_\varkappa - 1 + \cfrac{1}{a_{\varkappa+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0+1}}}.$$

Quant au nombre et à la somme des termes, renfermés dans une période de la suite $\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \\ a_0, & a_1, & \cdots, & a_\varkappa \end{pmatrix}$, elles sont respectivement le double de $m_\varkappa$ et le double de $s_\varkappa$.

§ 2.

A chaque suite $(a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$ correspondent plusieurs périodes différentes qu'on obtient de l'une d'elles à l'aide de substitutions circulaires de tous ses termes.

Si par exemple

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}, \alpha_m \tag{Π_1}$$

est une des périodes de la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$, toutes les autres périodes seront

$$(\Pi)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \\ \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{m-2}, \\ \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}. \end{array}\right.$$

Nous nous occuperons particulièrement de deux de ces périodes.

Désignons l'une d'elles par $[a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa]$ et admettons qu'elle soit la période Π_1; désignons l'autre par le symbole

$$\{a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa\}$$

et admettons qu'elle soit

$$\alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \cdots, \alpha_m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\mu-1}. \tag{Π_2}$$

Formons de Π_1 et de Π_2 les nouvelles périodes

$$\underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_1},\quad a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_2},\quad a_{\varkappa+1},\ \cdots,\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_m},\quad a_{\varkappa+1}$$

et

$$a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_\mu},\ \cdots,\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_m},\quad a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_1},\ \cdots,\ a_{\varkappa+1},\ \underbrace{a_{\varkappa+1}-1}_{\alpha_{\mu-1}}$$

et entendons nous de désigner la première par $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\}$, la seconde par $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}]$. Ce procédé peut être consideré comme une règle générale, car il ne contredit en rien les principes établis précédemment à l'égard des suites $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1})$.

Il nous donne les moyens de déterminer successivement les périodes

$$[a_0, a_1],\quad \{a_0, a_1, a_2\},\quad [a_0, a_1, a_2, a_3],\ \cdots$$

et

$$\{a_0, a_1\},\quad [a_0, a_1, a_2],\quad \{a_0, a_1, a_2, a_3\},\ \cdots$$

les périodes $\{a_0\}$ et $[a_0]$ étant connues. La suite (a_0) se compose de termes égaux à a_0, par conséquent les symboles $\{a_0\}$ et $[a_0]$ l'un et l'autre désignent une même période à un seul terme a_0.

De cette manière les symboles $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ sont complètement déterminés.

Par exemple $[a_0, a_1]$ et $\{a_0, a_1\}$ seront

$$a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{a_0}\quad \text{et}\quad \underbrace{a_1-1}_{a_0},\ a_1.$$

§ 3.

En comparant les périodes Π_1 et Π_2 avec n'importe laquelle des périodes Π

$$\alpha_\omega,\ \alpha_{\omega+1},\ \cdots,\ \alpha_m,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{\omega-1},$$

nous trouverons toujours parmi les différences

$$\alpha_1-\alpha_\omega,\ \alpha_2-\alpha_{\omega+1},\ \cdots,\ \alpha_{m-\omega+1}-\alpha_m,\ \alpha_{m-\omega+2}-\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m-\alpha_{\omega-1}$$

quelques unes différentes de zéro dont la première sera égale à $+1$ et la dernière à -1. De même parmi

$$\alpha_\mu-\alpha_\omega,\ \cdots,\ \alpha_{\mu-1}-\alpha_{\omega-1}$$

la première des différences non égales à zéro sera -1 et la dernière $+1$.

En effet la propriété ci-dessus mentionnée distingue évidemment $[a_0, a_1]$ et $\{a_0, a_1\}$ l'une de l'autre et de toutes les autres périodes de la suite (a_0, a_1):

$$\underbrace{a_1-1}_{a_0-1},\ a_1,\ a_1-1;$$

$$\underbrace{a_1-1}_{a_0-2},\ a_1,\ a_1-1,\ a_1-1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1-1,\ a_1,\ \underbrace{a_1-1}_{a_0-1}.$$

La loi de formation de ces périodes $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}]$ et $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\}$ nous montre en même temps qu'elles jouissent de cette propriété toutes les fois que les périodes $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ et $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$ la possèdent.

Notre théorème a donc lieu toutes les fois qu'il y a plus d'une période qui correspond à la suite $(a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa)$.

De même il est facile de démontrer que le premier et le dernier terme de la période $[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa]$ sont respectivement égaux à

$$a_\varkappa,\ a_\varkappa-1$$

et les autres termes de cette période forment une suite symmétrique dans laquelle deux termes également distants des extrêmes sont égaux entre eux.

Enfin la période $\{a_0, a_1, \cdots a_\varkappa\}$ est inverse à la précédente.

§ 4.

En vertu des résultats précédents le maximum de la quantité $\frac{2}{L_\varkappa}$ pour la suite $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa \\ a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa \end{pmatrix}$ est égal à

$$\xi' + \frac{1}{\eta'}$$

où la valeur de ξ' est déterminée par le développement

$$\xi' = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\xi'}}}}}}}}$$

et celle de η' par le suivant

$$\eta' = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\eta'}}}}}}.$$

La somme $\xi' + \frac{1}{\eta'}$ peut être facilement exprimée à l'aide des fractions irréductibles $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ respectivement égales à

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1}}}}}}}$$

et

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2}}}}}}$$

A cet effet remarquons que ξ' est égal à la racine positive de l'équation

$$Q\xi^2 - (P - Q')\,\xi - P' = 0$$

et $\frac{-1}{\eta'}$ à la racine négative de la même équation

Nous avons par conséquent en vertu d'une formule connue

$$\text{(5)} \qquad \text{le maximum de } \frac{1}{L_\varkappa} = \sqrt{\frac{P'}{Q} + \left(\frac{P - Q'}{2Q}\right)^2}\,.$$

§ 5.

Les nombres $a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa$ dans les symboles

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, a_\varkappa), \quad \begin{pmatrix} a_0, \cdots, a_\varkappa \\ a_0, \cdots, a_\varkappa \end{pmatrix}, \quad [a_0, \cdots, a_\varkappa], \quad \{a_0, \cdots, a_\varkappa\}$$

par la nature même de la question que nous discutons sont des entiers positifs. Nous croyons utile cependant d'étendre la définition des symboles sur le cas $a_0 = 0$.

Convenons de déduire à l'aide des mêmes procédés que nous avons employés pour $a_0 > 0$ les séries

$$(0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}),\quad \begin{pmatrix}0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\\0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\end{pmatrix}$$

de la série

$$(0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa)$$

et les périodes

$$[0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}],\quad \{0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\}$$

des périodes

$$\{0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa\},\quad [0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_\varkappa].$$

De cette manière le symbole $(0,\ a_1)$, par exemple, représentera

$$\cdots,\ a_1,\ \underbrace{}_{0}^{a_1-1},\ a_1,\ \underbrace{}_{0}^{a_1-1},\ a_1,\ \underbrace{}_{0}^{a_1-1},\ a_1,\ \cdots$$

ou simplement

$$\cdots,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ \cdots.$$

En général il est facile de voir que les symboles

$$(0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa),\quad \begin{pmatrix}0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\\0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\end{pmatrix},\quad [0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa],$$
$$\{0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}$$

sont équivalentes à

$$(a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa),\quad \begin{pmatrix}a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\\a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\end{pmatrix},\quad [a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa],\quad \{a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa\}.$$

§ 6.

Introduisons encore une notation nouvelle. Si les périodes

$$\begin{array}{ll}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_t & A,\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s & B,\\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_r & C,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n & F\end{array}$$

sont telles que pour obtenir A nous devons écrire successivement b fois la période B, c fois C, $\cdots$ et f fois F, nous désignerons A par la formule symbolique

$$A = bB + cC + \cdots + fF,$$

qui indiquera clairement la manière dont A est formée.

En appliquant cette notation pour exprimer la manière de composer les périodes $[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}]$ et $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1}\}$ nous aurons les formules:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &[a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}] = [a_{\varkappa+1}] + \alpha_\mu[a_{\varkappa+1} - 1] + \cdots + [a_{\varkappa+1}] \\ &\qquad + \alpha_m[a_{\varkappa+1} - 1] + [a_{\varkappa+1}] + \alpha_1[a_{\varkappa+1} - 1] \\ &\qquad + \cdots + [a_{\varkappa+1}] + \alpha_{\mu-1}[a_{\varkappa+1} - 1] \\ &\text{et} \\ &\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa, a_{\varkappa+1}\} = \alpha_1\{a_{\varkappa+1} - 1\} + \{a_{\varkappa+1}\} + \alpha_2\{a_{\varkappa+1} - 1\} \\ &\qquad + \{a_{\varkappa+1}\} + \cdots + \alpha_m\{a_{\varkappa+1} - 1\} + \{a_{\varkappa+1}\}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\{\alpha_\mu\} + \cdots + \{\alpha_m\} + \{\alpha_1\} + \cdots + \{\alpha_{\mu-1}\} = \{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$$

et

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + \cdots + [\alpha_m] = [a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa].$$

Si $\varkappa = 0$ les formules (6) se réduisent aux suivantes

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &[a_0, a_1] = [a_1] + a_0[a_1 - 1], \\ &\{a_0, a_1\} = a_0\{a_1 - 1\} + \{a_1\}, \end{aligned}\right.$$

où $a_0 + 1$ et a_1 sont des nombres entiers positifs quelconques.

En posant ensuite dans les formules (6) $\varkappa = 1$ et prenant en considération les formules (7), nous trouvons que pour former la période $[a_0, a_1, a_2]$ il faut écrire successivement a_0 fois la période

$$[a_2] + (a_1 - 1)[a_2 - 1]$$

et une fois la période

$$[a_2] + a_1[a_2 - 1],$$

et pour former la période $\{a_0, a_1, a_2\}$ il faut écrire une fois la période

$$a_1\{a_2 - 1\} + \{a_2\}$$

et ensuite a_0 fois la période

$$(a_1 - 1)\cdot\{a_2 - 1\} + \{a_2\}.$$

Cependant en vertu des mêmes formules (6) on a

$$\begin{gathered} [a_2] + (a_1 - 1)[a_2 - 1] = [a_1 - 1, a_2], \\ a_1\{a_2 - 1\} + \{a_2\} = \{a_1, a_2\}, \\ [a_2] + a_1[a_2 - 1] = [a_1, a_2], \\ (a_1 - 1)\{a_2 - 1\} + \{a_2\} = \{a_1 - 1, a_2\}. \end{gathered}$$

Donc

$$\begin{gathered} [a_0, a_1, a_2] = a_0[a_1 - 1, a_2] + [a_1, a_2], \\ \{a_0, a_1, a_2\} = \{a_1, a_2\} + a_0\{a_1 - 1, a_2\}. \end{gathered}$$

Passons maintenant au cas plus général. Soient

$$\begin{gathered} \alpha, \beta, \gamma, \cdots, \varphi, \psi, \omega, \\ \alpha', \beta', \gamma', \cdots\cdots, \varrho', \sigma', \\ \alpha'', \beta'', \gamma'', \cdots\cdots, \lambda'', \mu'' \end{gathered}$$

les périodes correspondantes

$$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1}\},$$

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1}\}$$

et

$$\{a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1}\}$$

et supposons, que l'égalité symbolique

$$\text{(7a)}\quad \{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1}\} = a_0\,\{a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1}\} + \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1}\}$$

a lieu.

Alors il s'ensuit des formules (6), que la période

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}]$$

s'obtient si l'on écrit successivement a_0 fois la période

$$[a_{2l}] + \alpha''[a_{2l}-1] + \cdots + [a_{2l}] + \mu''[a_{2l}-1]$$

et une fois la période

$$[a_{2l}] + \alpha'[a_{2l}-1] + \cdots + [a_{2l}] + \sigma'[a_{2l}-1].$$

Cependant les mêmes formules (6) donnent

$$[a_{2l}] + \alpha''[a_{2l}-1] + \cdots + [a_{2l}] + \mu''[a_{2l}-1] = [a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}]$$

et

$$[a_{2l}] + \alpha'[a_{2l}-1] + \cdots + [a_{2l}] + \sigma'[a_{2l}-1] = [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}].$$

Donc si l'égalité (7a) a réellement lieu, on aura

$$[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}] = a_0[a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}] + [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}].$$

De même en supposant l'une des égalités suivantes

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l-1}] = [a_1,\ a_2, \cdots\cdots, a_{2l-1}] + a_0[a_1-1,\ a_2, \cdots, a_{2l-1}],$$

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}\} = \{a_1,\ a_2, \cdots\cdots, a_{2l}\} + a_0\{a_1-1,\ a_2, \cdots, a_{2l}\},$$

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2l}] = a_0[a_1-1, a_2, \cdots, a_{2l}] + [a_1,\ a_2, \cdots\cdots, a_{2l}],$$

nous avons l'une des égalités correspondantes

$$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}\} = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}\} + a_0\{a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l-1},\ a_{2l}\},$$

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l},\ a_{2l+1}] = [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l},\ a_{2l+1}] + a_0[a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l},\ a_{2l+1}],$$

$$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l},\ a_{2l+1}\} = a_0\{a_1-1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l},\ a_{2l+1}\}, + \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2l},\ a_{2l+1}\}.$$

En comparant ces résultats avec les égalités (7) il est facile de voir qu'on aura

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] &= [a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\quad + a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} &= a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\quad + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t}] &= a_0[a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + [a_1, a_2, \cdots, a_{2t}], \\
\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2t}\} &= \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t}\} \\
&\quad + a_0\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\},
\end{aligned}
\right.
$$

où t, $a_0 + 1$, $a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}, a_{2t}$ sont des nombres entiers et positifs quelconques.

En substituant $a_0 + 1$ au lieu de a_0 dans les formules (8) nous aurons

$$
\begin{aligned}
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}] &= [a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\quad + (a_0 + 1) \cdot [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}\} &= (a_0 + 1) \cdot \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\quad + \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}] &= (a_0 + 1) \cdot [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + [a_1, a_2, \cdots, a_{2t}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}\} &= \{a_1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + (a_0 + 1)\,\{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\}.
\end{aligned}
$$

D'où l'on déduit

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}] &= [a_0, a_1, \cdots, a_{2t-1}] \\
&\quad + [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t-1}\} &= \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t-1}\} \\
&\quad + \{a_0, a_1, \cdots, a_{2t-1}\}, \\
[a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}] &= [a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}] \\
&\quad + [a_0, a_1, \cdots, a_{2t}], \\
\{a_0 + 1, a_1, \cdots, a_{2t}\} &= \{a_0, a_1, \cdots, a_{2t}\} \\
&\quad + \{a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{2t}\}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 7.

Soit maintenant

$$a_\varkappa = 2$$

et passons aux suites $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \\ a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \end{pmatrix}$ dont nous avons particulièrement à nous occuper. Dans ce cas en vertu des résultats du § 3. nous avons

$$(10) \qquad \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{1}}}}}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m}}}}}}}}.$$

La première de ces fractions, conformément aux notations du § 4., est égale à $\frac{P-2Q}{Q}$.

En outre en vertu de formules connues de la théorie des fractions continues nous avons

$$\frac{P-P'}{Q-Q'} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1}}}}}}}$$

et ensuite

$$\frac{Q-Q'}{Q} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha_1 - 1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_{m-1} + \cfrac{1}{\alpha_m + \cfrac{1}{\alpha_m}}}}}}}}.$$

Ainsi de l'équation (10) nous avons

$$\frac{P-2Q}{Q}=\frac{Q-Q'}{Q},$$

ou simplement

(11) $$Q'=3Q-P.$$

En substituant cette valeur de Q' dans l'égalité évidente

$$PQ'-P'Q=+1$$

nous obtenons pour la valeur de P' l'expression

(12) $$P'=3P-\frac{P^2+1}{Q}.$$

Les égalités (11) et (12) nous permettent d'éliminer P' et Q' de la formule (5).

Nous avons donc pour la suite $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \\ a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2 \end{pmatrix}$ la formule suivante

(13) $$\text{le maximum de } \frac{1}{L_\varkappa}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{Q^2}}.$$

Remarquons encore que les formules (11), (12) et (13) peuvent être appliquées aussi et aux suites $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ si nous admettons pour la première

$$\frac{P}{Q}=2+\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{Q'}=2$$

et pour la seconde

$$\frac{P}{Q}=1+\frac{1}{1} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{Q'}=1.$$

Donc pour calculer la valeur du maximum de $L_\varkappa$ il suffit de connaitre la valeur correspondante de Q. Quant aux nombres Q, nous trouverons pour les exprimer des formules correspondantes aux égalités symboliques (9).

§ 8.

Soient

$$\frac{P_{\alpha,\lambda}}{Q_{\alpha,\lambda}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2}}}}}\;,\qquad \frac{P'_{\alpha,\lambda}}{Q'_{\alpha,\lambda}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\ddots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda}}}}\;,$$

$$\frac{P_{\mu,\omega}}{Q_{\mu,\omega}}=2+\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\mu+\cdots+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{2}}}}}\,,\qquad \frac{P'_{\mu,\omega}}{Q'_{\mu,\omega}}=2+\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\mu+\cdots+\cfrac{1}{\omega+\cfrac{1}{\omega}}}}\,,$$

$$\frac{P_{\alpha,\omega}}{Q_{\alpha,\omega}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\cdots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{P_{\mu,\omega}:Q_{\mu,\omega}}}}}}}$$

et

$$\frac{P'_{\alpha,\omega}}{Q'_{\alpha,\omega}}=2+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\cdots+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{P'_{\mu,\omega}:Q'_{\mu,\omega}}}}}}}$$

six fractions irréductibles pour lesquelles

$$\text{(11a)}\qquad \begin{cases} Q'_{\alpha,\lambda}=3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda}\,,\\ Q'_{\mu,\omega}=3Q_{\mu,\omega}-P_{\mu,\omega}\,,\\ Q'_{\alpha,\omega}=3Q_{\alpha,\omega}-P_{\alpha,\omega}\,. \end{cases}$$

En vertu de formules connues relatives aux fractions continues

$$P_{\alpha,\lambda}Q'_{\alpha,\lambda}-P'_{\alpha,\lambda}Q_{\alpha,\lambda}=+1,$$
$$P_{\mu,\omega}Q'_{\mu,\omega}-P'_{\mu,\omega}Q_{\mu,\omega}=+1,$$
$$P_{\alpha,\omega}Q'_{\alpha,\omega}-P'_{\alpha,\omega}Q_{\alpha,\omega}=+1,$$

et encore

$$P_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+P'_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega},\quad P'_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}P'_{\mu,\omega}+P'_{\alpha,\lambda}Q'_{\mu,\omega},$$
$$Q_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+Q'_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega},\quad Q'_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}P'_{\mu,\omega}+Q'_{\alpha,\lambda}Q'_{\mu,\omega},$$

d'où en vertu des formules (11a) nous déduisons

$$\text{(12a)}\qquad \begin{cases} P'_{\alpha,\lambda}=3P_{\alpha,\lambda}-\dfrac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\,,\\[2ex] P'_{\mu,\omega}=3P_{\mu,\omega}-\dfrac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\,,\\[2ex] P'_{\alpha,\omega}=3P_{\alpha,\omega}-\dfrac{P^2_{\alpha,\omega}+1}{Q_{\alpha,\omega}} \end{cases}$$

et

$$(14)\begin{cases} P_{\alpha,\omega}=P_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+\left(3P_{\alpha,\lambda}-\dfrac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\right)Q_{\mu,\omega},\\ Q_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})Q_{\mu,\omega},\\ Q'_{\alpha,\omega}=Q_{\alpha,\lambda}\left(3P_{\mu,\omega}-\dfrac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\right)+(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})(3Q_{\mu,\omega}-P_{\mu,\omega}).\end{cases}$$

En substituant ces valeurs de $P_{\alpha,\omega}$, $Q_{\alpha,\omega}$, $Q'_{\alpha,\omega}$ dans la dernière des formules (11a) nous aurons

$$Q_{\alpha,\lambda}\left(3P_{\mu,\omega}-\frac{P^2_{\mu,\omega}+1}{Q_{\mu,\omega}}\right)+(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})(3Q_{\mu,\omega}-P_{\mu,\omega})$$
$$=3Q_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}+3(3Q_{\alpha,\lambda}-P_{\alpha,\lambda})Q_{\mu,\omega}-P_{\alpha,\lambda}P_{\mu,\omega}-\left(3P_{\alpha,\lambda}-\frac{P^2_{\alpha,\lambda}+1}{Q_{\alpha,\lambda}}\right)Q_{\mu,\omega}$$

qui devient après quelques simples reductions

$$(15)\qquad Q^2_{\alpha,\lambda}+Q^2_{\mu,\omega}+(Q_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda}-P_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda})^2$$
$$=3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}(Q_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda}-P_{\mu,\omega}Q_{\alpha,\lambda}).$$

Quant à la quantité

$$Q_{\mu,\omega}P_{\alpha,\lambda}-P_{\mu,\omega}Q_{\alpha,\lambda}$$

on voit, qu'en vertu de la seconde des formules (14) elle est égale à

$$3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}-Q_{\alpha,\omega}.$$

Nous pourrons donc écrire au lieu de la formule (15)

$$Q^2_{\alpha,\lambda}+Q^2_{\mu,\omega}+(3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}-Q_{\alpha,\omega})^2=3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}(3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}-Q_{\alpha,\omega})$$

d'où

$$(16)\qquad Q^2_{\alpha,\lambda}+Q^2_{\mu,\omega}+Q^2_{\alpha,\omega}=3Q_{\alpha,\lambda}Q_{\mu,\omega}Q_{\alpha,\omega}.$$

§ 9.

De ces considérations générales et des formules (9) et (11) il suit*)

$$(17)\begin{cases} Q^2\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}+Q^2\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}\\ \qquad +Q^2\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}\\ =3Q\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}\cdot Q\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}\\ \qquad \cdot Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}\end{cases}$$

---

*) Nous désignons généralement par le symbole $Q\{a, b, c, \cdots, l\}$ un nombre Q (§ 4.) correspondant à la période $\{a, b, c, \cdots, l\}$. De même les nombres P, P' et Q' correspondants à cette même période $\{a, b, c, \cdots, l\}$ seront designés par $P\{a, b, c, \cdots, l\}$, $P'\{a, b, c, \cdots, l\}$ et $Q'\{a, b, c, \cdots, l\}$.

où

$$\varkappa - 1,\ a_0 + 1,\ a_1,\ a_2, \cdots, a_{\varkappa-1},$$

sont des nombres entiers positifs quelconques.

En vertu des mêmes considérations nous avons

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} & Q^2\{a_0+2, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q^2\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad + Q^2\{a_1-1, a_2, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & = 3Q\{a_0+2, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1, a_1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad \cdot Q\{a_1-1, a_2, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}, \\ & Q^2\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q^2\{a_0+1, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad + Q^2\{a_0, a_1, \cdots\cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & = 3Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & \qquad \cdot Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}. \end{aligned} \right.$$

En comparant la formule (17) avec les formules (18) nous obtenons

$$(19)\quad \left(\begin{aligned} & Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & -3Q\{a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{aligned} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{aligned} & Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & - Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{aligned} \right) = 0$$

et

$$(20)\quad \left(\begin{aligned} & Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & -3Q\{a_0+1, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{aligned} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{aligned} & Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ & - Q\{a_1-1, a_2, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \end{aligned} \right) = 0.$$

Or il n'est pas difficile de voir qu'on a

$$Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} > Q\{a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}$$

et

$$Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} > Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}.$$

Donc en divisant (19) par le facteur

$$Q\{a_0+2, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} - Q\{a_0, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}$$

et (20) par le facteur

$$Q\{1, a_0+1, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} - Q\{a_1-1, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}$$

nous aurons définitivement

$$(21)\quad\begin{cases} Q\{a_0+2,\, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q\{a_0,\, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ = 3\,Q\{a_1-1,\, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1,\, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}, \\ Q\{1, a_0+1,\, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} + Q\{a_1-1,\, a_2, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \\ = 3\,Q\{a_0,\, a_1, \cdots\cdots, a_{\varkappa-1}, 2\} \cdot Q\{a_0+1,\, a_1, \cdots, a_{\varkappa-1}, 2\}. \end{cases}$$

Ces égalités donnent un moyen facile de calculer successivement les nombres Q lorsqu'on connait

$$Q\{2\},\ Q\{1,2\},\ Q\{2,2\}, \cdots,\ Q\{a,2\},\ Q\{a+1,2\}, \cdots$$

et

$$Q\{1,1,2\},\ Q\{1,2,2\}, \cdots,\ Q\{1,a,2\},\ Q\{1,a+1,2\}, \cdots$$

Pour ces dernières quantités la formule (17) donne

$$(22)\quad \begin{aligned} & Q^2\{1,a,2\} + Q^2\{a,2\} + Q^2\{a-1,2\} \\ & = 3\,Q\{1,a,2\} \cdot Q\{a,2\} \cdot Q\{a-1,2\} \end{aligned}$$

a étant un nombre entier positif quelconque.

En outre nous avons

$$(23)\quad\begin{cases} Q\{1\} = 1, & Q\{2\} = 2, \quad Q\{1,2\} = 5, \\ P\{a,2\} = Q\{a+1,2\}, & P\{a-1,2\} = Q\{a,2\}, \\ Q'\{a,2\} = Q\{a-1,2\}, & P'\{a-1,2\} = Q\{a-1,2\} \end{cases}$$

d'où en ayant égard aux formules (11) et (12) nous déduisons

$$(24)\quad\begin{cases} Q\{2\} = 3\,Q\{1\} \cdot Q\{1\} - Q\{1\}, \\ Q\{1,2\} = 3\,Q\{2\} \cdot Q\{1\} - Q\{1\}, \\ Q\{a+1,2\} = 3\,Q\{a,2\} \cdot Q\{1\} - Q\{a-1,2\} \end{cases}$$

et encore

$$(25)\quad\begin{cases} Q^2\{1\} + Q^2\{1\} + Q^2\{1\} = 3\,Q\{1\} \cdot Q\{1\} \cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{2\} + Q^2\{1\} + Q^2\{1\} = 3\,Q\{2\} \cdot Q\{1\} \cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{a,2\} + Q^2\{a-1,2\} + Q^2\{1\} = 3\,Q\{a,2\} \cdot Q\{a-1,2\} \cdot Q\{1\}. \end{cases}$$

En comparant enfin l'égalité (22) avec la dernière des égalités (25), en vertu de l'inégalité

$$Q\{1,a,2\} > Q\{1\}$$

nous aurons

$$Q\left\{1, a, 2\right\} = 3Q\left\{a, 2\right\} Q\left\{a-1, 2\right\} - Q\left\{1\right\}, \tag{26}$$

Donc pour trouver $Q\left\{1, a, 2\right\}$ il suffit de connaitre $Q\left\{a, 2\right\}$ et $Q\left\{a-1, 2\right\}$ qui s'obtiennent facilement des formules (24).

§ 10.

Disons encore quelques mots sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \tag{16a}$$

que nous avons obtenue à la fin du § 8. Cette équation est symmétrique relativement aux termes inconnus x, y, z; par conséquent, connaissant l'une de ses solutions

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma,$$

il sera facile d'en trouver encore les cinq suivantes:

$$\begin{aligned} &x = \alpha, \quad y = \gamma, \quad z = \beta; \\ &x = \beta, \quad y = \gamma, \quad z = \alpha; \\ &x = \beta, \quad y = \alpha, \quad z = \gamma; \\ &x = \gamma, \quad y = \alpha, \quad z = \beta; \\ &x = \gamma, \quad y = \beta, \quad z = \alpha. \end{aligned}$$

Ces six solutions peuvent, évidemment, être differéntes, nous les envisagerons cependant comme une seule et désignerons par

$$x, y, z = \alpha, \beta, \gamma.$$

Cela posé les formules du paragraphe précédent donneront les solutions suivantes de l'équation (16a)

$$(\Omega)\quad \left\{\begin{array}{l} x,y,z = Q\left\{1\right\},\ Q\left\{1\right\},\ Q\left\{1\right\}; \\ x,y,z = Q\left\{2\right\},\ Q\left\{1\right\},\ Q\left\{1\right\}; \\ x,y,z = Q\left\{1,2\right\},\ Q\left\{2\right\},\ Q\left\{1\right\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\left\{a,2\right\},\ Q\left\{a-1,2\right\},\ Q\left\{1\right\}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\left\{1,a,2\right\},\ Q\left\{a,2\right\},\ Q\left\{a-1,2\right\}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x,y,z = Q\left\{b,a,2\right\},\ Q\left\{b-1,a,2\right\},\ Q\left\{a-1,2\right\}, \\ \cdot \\ x,y,z = Q\left\{l,j,i,\cdots,a,2\right\},\ Q\left\{l-1,j,i,\cdots,a,2\right\},\ Q\left\{j-1,i,\cdots,a,2\right\}; \\ \cdot \end{array}\right.$$

Supposons maintenant que la même équation a une autre solution

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

qui ne se trouve pas dans l'ensemble (Ω).

Dans ce cas les nombres $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ne peuvent être tous égaux entre eux, car si

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

la solution

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

doit être identique à la première des solutions (Ω).

Donc si α est le plus grand des nombres $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ et γ le plus petit nous aurons

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \quad \text{et} \quad \alpha > \gamma.$$

L'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma$$

nous donne

$$3\beta\gamma > \alpha > \beta\gamma.$$

En la résolvant par rapport à α on trouve

$$\alpha = \frac{3\beta\gamma \pm \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2+\gamma^2)}}{2}.$$

Des deux signes $\pm$ c'est $+$ qu'il faut garder, car nous avons pour toutes les valeurs entières positives de β et de γ

$$\frac{3\beta\gamma - \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2+\gamma^2)}}{2} \leqq \beta\gamma.$$

Il en résulte de là

$$3\beta\gamma > \alpha > \frac{3}{2}\beta\gamma$$

et la différence

$$3\beta\gamma - \alpha$$

se trouve comprise entre 0 et α.

En la désignant par δ nous trouvons

$$\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 3\beta\gamma\delta.$$

Donc de la solution donnée:

$$x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

on peut déduire une autre

$$x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta$$

où

$$\beta + \gamma + \delta < \alpha + \beta + \gamma.$$

Cette nouvelle solution aussi n'est pas comprise dans l'ensemble (Ω), parceque dans le cas contraire la première solution

$$x,\ y,\ z = 3\beta\gamma - \delta,\ \beta,\ \gamma$$

devrait aussi être comprise dans l'ensemble (Ω) conformément aux formules du § 9. C'est pourquoi en transformant la solution

$$x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta$$

d'après le procédé indiqué nous aurons encore une solution

$$x,\ y,\ z = \beta',\ \gamma',\ \delta'$$

qui n'est pas comprise dans l'ensemble (Ω) et satisfait à l'inégalité

$$\beta' + \gamma' + \delta' < \beta + \gamma + \delta.$$

En continuant à discuter de la même manière, nous aurons une suite infinie de solutions de l'équation (16a)

$$\begin{aligned} &x,\ y,\ z = \alpha,\ \beta,\ \gamma, \\ &x,\ y,\ z = \beta,\ \gamma,\ \delta, \\ &x,\ y,\ z = \beta',\ \gamma',\ \delta', \\ &x,\ y,\ z = \beta'',\ \gamma'',\ \delta'', \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et une série infinie décroissante de nombres positifs et entiers

$$\alpha + \beta + \gamma,\quad \beta + \gamma + \delta,\quad \beta' + \gamma' + \delta',\quad \beta'' + \gamma'' + \delta'',\ \cdots$$

Ce qui n'est pas possible, car il n'existe qu'un nombre limité de nombres positifs entiers moindres que la limite donnée

$$\alpha + \beta + \gamma.$$

Par conséquent toutes les solutions en nombres positifs et entiers de l'equation (16a) doivent être comprises dans l'ensemble (Ω).

Table des périodes $\{a_0, a_1, \cdots, a_\varkappa\}$ pour les valeurs de $\varkappa$ moindres de 6.

Symboles	$\{x\}$	$\{\gamma-1,\ x+1\}$	$\{\delta-1,\ \gamma,\ x+1\}$	$\{\varepsilon-1,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$
Périodes	x	$\gamma-1$ fois x $1 \cdots\cdots x+1$	$\gamma \cdots\cdots x$ $1 \cdots\cdots x+1$ $\delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots\cdots x+1\end{cases}$	$\varepsilon-1\begin{cases}\gamma \cdots\cdots x\\ 1 \cdots\cdots x+1\\ \delta-1\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots\cdots x+1\end{cases}\end{cases}$ $\gamma \cdots\cdots x$ $1 \cdots\cdots x+1$ $\delta\begin{cases}\gamma-1\cdots x\\ 1\cdots\cdots x+1\end{cases}$

Symboles	$\{\eta-1,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$	$\{\vartheta-1,\ \eta,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ x+1\}$
Périodes	$\begin{array}{l}\varepsilon\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\\\eta-1\left\{\begin{array}{l}\varepsilon-1\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}$	$\begin{array}{l}\vartheta-1\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\\\eta-1\left\{\begin{array}{l}\varepsilon-1\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\\\varepsilon\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\\\eta\left\{\begin{array}{l}\varepsilon-1\left\{\begin{array}{l}\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta-1\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\\gamma\cdots x\\1\cdots x+1\\\delta\left\{\begin{array}{l}\gamma-1\cdots x\\1\cdots x+1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}$

Remarque. Le lecteur trouvera les mêmes périodes dans la table, ajoutée au tome I de l'ouvrage de J. Bernoulli: „Recueil pour les astronomes."

Die Principien der Elektrodynamik.*)

Von

Dr. Carl Neumann.

Die einzelnen Gebiete der Physikalischen Wissenschaft können füglich nach Beschaffenheit derjenigen Elementarkräfte, durch deren Annahme die betreffenden Erscheinungen ihre Erklärung finden, in *zwei* Gruppen gebracht werden. Auf die eine Seite sind alsdann zu stellen die *Mechanik des Himmels*, die *Elasticität*, die *Capillarität*, überhaupt diejenigen Gebiete, bei welchen jene Kräfte ihrer Richtung und Grösse nach völlig bestimmt sind durch die relative Lage der materiellen Theile; auf die andere Seite aber werden zu bringen sein die Untersuchungen über *Reibung*, über *Elektricität* und *Magnetismus*, vielleicht auch die *Optik*, überhaupt diejenigen Gebiete der Physik, in welchen die genannten Kräfte ausser von der relativen Lage noch abhängig sind von andern Umständen, z. B. von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wenn nun das *Gesetz* (*oder Princip*) *der Lebendigen Kraft* sämmtliche Naturerscheinungen beherrscht (und hiefür sprechen alle bisherigen Erfahrungen), so erscheint solches für die Gebiete erster Art als eine unmittelbare Folge der zu Grunde gelegten Vorstellungen, für die Gebiete zweiter Art hingegen als eine *Sache des Zufalls*. Denn die Elementarkräfte erster Art unterwerfen sich der Herrschaft jenes Gesetzes von selber, die der zweiten Art aber nicht.

„Es hat“ — sagt Fechner in seiner Psychophysik. 1860. Bd. I. Pag. 34. — „allen Anschein, dass sich diese (letztern) Elementarkräfte so combiniren, dass das Gesetz in allen Naturwirkungen seine Gültigkeit behält. Für die magnetischen und dafür substituirbaren elektrischen Strömungswirkungen leuchtet dies von selbst ein, insofern sie sich als Wirkungen von Centralkräften, die unabhängig von Geschwindigkeit und Beschleunigung sind, wirklich repräsentiren lassen. Ausserdem

---

*) Es folgt hier ein *wörtlicher* Abdruck derjenigen Schrift, welche bereits im Jahre 1868 gedruckt wurde als Gratulationsschrift der *Tübinger* Universität zum funfzigjährigen Jubiläum der *Bonner* Universität.

hat mir Prof. W. Weber auf mein Befragen mündlich mitgetheilt, dass er überhaupt in allen Fällen, auf die seine Untersuchung geführt, auch über die Grenzen jener Wirkungen hinaus, das Gesetz in Kraft gefunden, wenn schon seine volle Allgemeingültigkeit für das Bereich dieser Kräfte noch des strengen Beweises bedürfe."

Doch handelt es sich dabei eigentlich nicht um einen Beweis, sondern um eine Entdeckung. Denn jenes Gesetz repräsentirt eine Relation zwischen der Lebendigen Kraft und dem Potential, also eine Relation zwischen zwei Grössen, von denen die letztere, bekannt für die Elementarkräfte erster Art, *völlig unbekannt ist für diejenigen der zweiten Art.* Es handelt sich daher, was die letztern Kräfte anbelangt, nicht um den Beweis des Gesetzes, sondern um die *Entdeckung seines Inhalts*, um die Auffindung derjenigen Grösse, welche als das Potential jener Kräfte anzusehen wäre.

Als ich vor drei Jahren, angeregt durch die vorhin erwähnten Worte Fechner's, mit dieser Frage mich zu beschäftigen begann, und dabei namentlich auf *diejenige* Elementarkraft zweiter Art meine Aufmerksamkeit richtete, welche nach Weber zwischen je zwei elektrischen Theilchen anzunehmen ist, fand ich bald, dass als Potential einer solchen Kraft mit gewisser Berechtigung folgender Ausdruck angesehen werden könne:

$$W = \frac{m m_1}{r} + G \frac{m m_1}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

wo unter m, m_1 die Massen der beiden Theilchen, unter r ihre Entfernung, unter t der betrachtete Zeitaugenblick, und unter G eine Constante zu verstehen sind. Denn es zeigte sich, dass jene von Weber angenommene Kraft aus diesem Ausdruck durch *Variation* nach den Coordinaten in genau derselben Weise abgeleitet werden könne, in welcher eine Elementarkraft *erster* Art aus ihrem Potential erhalten wird durch eine nach den Coordinaten bewerkstelligte *Differentiation.*

Und gleichzeitig ergab sich, dass während der Bewegung der beiden Theilchen beständig eine sehr einfache Relation obwalte zwischen der Lebendigen Kraft und zwischen den beiden Bestandtheilen jenes als Potential adoptirten Ausdrucks W, nämlich folgende:

$$(\text{Leb. Kraft.}) + \frac{m m_1}{r} - G \frac{m m_1}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \text{Const.}$$

Kaum noch konnte es zweifelhaft sein, dass diese Relation das zu entdeckende Gesetz repräsentire für jene von Weber angenommene Kraft.

Auch hatte ich schon damals nach Maassgabe des Ausdruckes W das Potential gebildet für *zwei Elemente elektrischer Ströme*, und ge-

funden, dass aus dem so erhaltenen Potential sowohl die repulsive als auch die inductive Wirkung der beiden Elemente auf einander in sehr einfacher Weise sich ableiten liesse, dass nämlich die erstere aus jenem Potential deducirt werden könne durch Variation nach der Entfernung, die letztere durch Variation nach der Richtung des einen Elementes.

Befremdlich und in einigem Contrast zu dem bisher Ueblichen mag im ersten Augenblick erscheinen, dass Variationen an Stelle der Differentiationen treten sollen. Doch wird, wie ich sogleich bemerken will, dieser Contrast einigermassen gemildert, wenn man beachtet, dass Aehnliches auch schon im Bereich der Elementarkräfte *erster* Art zu Tage tritt, z. B. bei Untersuchungen über Elasticität. Sind nämlich u, v, w diejenigen Functionen der Coordinaten, durch welche die innern Verrückungen eines gegebenen elastischen Körpers repräsentirt werden, und ist Φ das Potential derjenigen Wirkung, welche sämmtliche Theilchen des Körpers auf irgend *eines* derselben ausüben, so ergiebt sich die auf letzteres einwirkende Kraft durch *Variation* von Φ nach u, v, w (wie solches ausführlich von mir entwickelt worden ist in einem Aufsatz über Elasticität, Borchardt's Journal, Bd. 57. Pag. 304).

Zur Wiederaufnahme und Weiterführung der in Rede stehenden Untersuchungen wurde ich vor einiger Zeit veranlasst durch einen in Poggendorff's Annalen (Bd. 131. Pag. 237) aus dem Nachlass Riemann's publicirten Aufsatz, in welchem der (allerdings wenig gelungene, vielleicht auch nur in Folge der gar zu knappen Darstellung nicht gehörig zu beurtheilende) Versuch gemacht ist, die repulsive Wirkung zweier Stromelemente auf einander durch Elementarkräfte *erster* Art zu erklären, unter der Voraussetzung, dass das Potential dieser Kräfte — ähnlich wie das Licht — mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit durch den Raum sich fortpflanze. Zu meiner Ueberraschung fand ich, dass diese Annahme direct hinleite zu der von mir gemachten Conjectur, dass nämlich das gewöhnliche (der Newton'schen Gravitationskraft entsprechende) Potential $\frac{mm_1}{r}$ bei Voraussetzung einer solchen progressiven Fortpflanzung in eine Grösse sich verwandele, deren wirksamer Bestandtheil völlig identisch ist mit dem vorhin genannten Ausdruck W.

Schon im Mai d. J. habe ich der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften eine kurze Mittheilung mir zu machen erlaubt über die Ausgangspunkte und Ergebnisse der in Rede stehenden Untersuchungen (Nachrichten der Gesellschaft. 16. Juni 1868). Wenn ich nun hier diese Untersuchungen, oder wenigstens einen Theil derselben, in ausführlicher und möglichst sorgfältiger Weise darzulegen beabsichtige,

so geschieht das nicht etwa, weil ich diese Untersuchungen bereits für völlig durchgreifend hielte, sondern vielmehr wegen der *ausserordentlichen Wichtigkeit des behandelten Gegenstandes*, und weil ich der Meinung bin, dass meine Untersuchungen für ein tieferes Eindringen in diesen Gegenstand nothwendig oder wenigstens nicht ohne Nutzen sein dürften.

---

§ 1.

Vorläufiger Ueberblick.

Grundlage der Untersuchung.

In der vorliegenden Untersuchung werde ich der Nomenclatur derjenigen Autoren mich anschliessen, welche unter Lebendiger Kraft die Summe der Massen verstehen, jede multiplicirt mit dem *halben* Quadrat ihrer Geschwindigkeit, und welche ferner unter Potential diejenige Function der Coordinaten verstehen, deren *negative* Differential-Coefficienten die Kräfte repräsentiren*). Bei Anwendung dieser Nomenclatur (welche namentlich zweckmässig erscheint mit Rücksicht auf die Mechanische Wärmetheorie) wird das *Princip der Lebendigen Kraft* die Form annehmen:

$$(\text{Leb. Kraft}) + (\text{Potential}) = \text{Const.}$$

Gleichzeitig wird alsdann ein anderes allgemeines Princip der Mechanik, das *Hamilton'sche Princip* seinen Ausdruck finden in der Formel:

$$\delta \int \Big((\text{Leb. Kraft}) - (\text{Potential}) \Big)\, dt = 0,$$

wo die Integration sich hinerstreckt über einen beliebig zu wählenden Zeitraum, und wo δ die *innere Variation*, nämlich eine Variation bezeichnet, welche nicht die Grenzen, sondern nur das Innere jenes Zeitraumes betrifft.

Wenn ich nun bemerke, dass bei gegebenen Kräften das Potential bekannt ist, dass aber auch umgekehrt durch Angabe des Potentials die Kräfte bestimmt sind, und wenn ich demgemäss mir erlaube, das Potential als das Primäre, als den eigentlichen *Bewegungsantrieb* anzusehen, die Kräfte hingegen aufzufassen als das Secundäre, als die *Form*, in welcher jener Antrieb sich äussert, so liegt hierin keine reale, sondern höchstens eine formale Neuerung. Wesentlich neu hingegen (wenn auch verwandt mit der schon von Riemann gemachten

---

*) Bei dieser Definition werden Lebendige Kraft und Potential identisch mit denjenigen Grössen, welche die Engländer als *actuelle* und *potentielle Energie* bezeichnen. Auch wird gleichzeitig das Potential identisch mit derjenigen Grösse, welche von Helmholtz *Spannkraft* genannt ist.

Conjectur) ist die von mir gemachte Voraussetzung, *dass jener durch das Potential repräsentirte Bewegungsantrieb von einem Massenpunkt zum andern nicht momentan sondern progressiv übergehe, dass er im Raume sich fortpflanze mit einer gewissen allerdings äusserst grossen Geschwindigkeit.* Diese Geschwindigkeit wird als constant betrachtet, und mit c bezeichnet werden.

Die eben genannte Vorstellung und daneben die Annahme, *dass das Hamilton'sche Princip eine völlig unumschränkte Gültigkeit besitze,* bilden die Grundlage meiner Untersuchung; sie bilden diejenige Quelle, aus welcher die (von Ampère, Weber und meinem Vater entdeckten) Gesetze der elektrischen Erscheinungen von selber hervorgehen werden, ohne Zuziehung irgend welcher weiteren Voraussetzung.

Kaum zu bemerken wird es nöthig sein, dass die *gewöhnliche* Vorstellung einer momentanen Fortpflanzung des Potentiales in der *hier zu Grunde gelegten* Vorstellung einer progressiven Fortpflanzung als specieller Fall enthalten ist, dass nämlich diese in jene übergeht, sobald man die Constante $c = \infty$ setzt.

Weber's Gesetz.

Betrachtet man zuvörderst nur *zwei* Punkte m und m_1, welche sich bewegen unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, so sind, ausgehend von der Vorstellung einer progressiven Fortpflanzung des Potentiales, für jeden gegebenen Zeitaugenblick t zwei verschiedene Potentiale zu unterscheiden, das emissive und das receptive.

Das *emissive Potential* ist dasjenige, welches von jedem der beiden Punkte *ausgesendet wird zur Zeit t,* und welches also erst ein wenig später den andern Punkt erreicht. Bezeichnet r die Entfernung der Punkte zur Zeit t, und ist ϖ das derselben Zeit entsprechende emissive Potential, so wird nach dem Newton'schen Gesetz: $\varpi = \frac{mm_1}{r}$, oder allgemeiner:

$$\varpi = mm_1\varphi, \tag{1}$$

wo $\varphi = \varphi(r)$ irgend welche gegebene Function von r vorstellt.

Das *receptive Potential* andererseits ist dasjenige, welches von jedem der beiden Punkte *empfangen wird zur Zeit t,* und welches also schon ein wenig früher von dem andern Punkte abgesendet wurde. Das der *gegebenen* Zeit zugehörige receptive Potential ist demnach identisch mit dem einer *früheren* Zeit entsprechenden emissiven Potential. Bezeichnet wiederum r die Entfernung zur Zeit t, und ω das derselben Zeit entsprechende receptive Potential, so ergiebt sich nach einiger Rechnung:

$$\omega = w + \frac{dw}{dt}, \tag{2}$$

wo

$$(3)\qquad \begin{aligned} w &= mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \\ \mathfrak{w} &= mm_1\left[\chi + \frac{d\Phi}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Hier ist φ die in dem emissiven Potential enthaltene Function; und gleichzeitig bezeichnen ψ, χ, Φ gewisse andere, ebenfalls nur von r abhängende Functionen, welche aus der gegebenen Function φ sich ableiten lassen durch ziemlich einfache Operationen. So ist z. B.

$$(4)\qquad \psi = \frac{1}{c}\int\sqrt{-r\frac{d\varphi}{dr}}\,dr,$$

Die Function φ ist, wie aus ihrer Bedeutung unmittelbar hervorgeht, unabhängig von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c; ψ, χ hingegen sind behaftet mit dem Factor $\frac{1}{c}$, und Φ mit dem Factor $\frac{1}{cc}$.

(5) *Zu bemerken ist noch, dass für den Fall des Newton'schen Emissionsgesetzes, nämlich für* $\varphi = \frac{1}{r}$ *die Function* ψ *den Werth annimmt:* $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$.

Von den beiden Bestandtheilen des receptiven Potentiales mag (zur Abkürzung und mit Rücksicht auf die Ergebnisse der weitern Untersuchung) der eine, nämlich w das *effective Potential*, der andere $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$ das *ineffective Potential* genannt werden.

Da nun das Hamilton'sche Princip als unumschränkt gültig angesehen wird, so muss im vorliegenden Fall die Bewegung der beiden Punkte m und m_1 in einer Weise stattfinden, welche charakterisirt wird durch die Formel:

$$\delta\int(\tau - \omega)\,dt = 0,$$

wo τ die lebendige Kraft der beiden Punkte und ω das schon genannte receptive Potential vorstellt.

Substituirt man für ω seinen Werth (2), so reducirt sich diese Formel auf:

$$\delta\int(\tau - w)\,dt = 0.$$

Hieraus ergeben sich, wenn man die Variation wirklich ausführt, die zur Bestimmung der Bewegung nothwendigen sechs Differentialgleichungen. Und diese Gleichungen geben Rechenschaft über die *Art und Weise*, in welcher der durch das Potential repräsentirte Bewegungsantrieb sich äussert, d. i. Rechenschaft über die *Kraft*, welche zwischen den beiden Punkten thätig ist. Das Resultat, zu welchem man in solcher Weise gelangt, ist folgendes:

I. *Zwischen den beiden Punkten ist während ihrer Bewegung eine Kraft R thätig, welche beständig zusammenfällt mit der Verbindungslinie r.*

II. *Betrachtet man diese Kraft R als eine repulsive, und ist w das (schon genannte) effective Potential der beiden Punkte aufeinander, so wird R jederzeit gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von w nach r.* Hieraus folgt sofort:

$$R = m m_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right], \tag{6}$$

eine Formel, welche für den in (5) erwähnten Specialfall $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$ sich verwandelt in:

$$R = m m_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{4}{cc\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} \right]. \tag{6a}$$

Die Formel (6) stimmt genau überein mit demjenigen Gesetze, welches ich vor zehn Jahren meiner Untersuchung über die Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes zu Grunde gelegt habe. Und die Formel (6a) ist (selbst bis auf die Buchstaben) *identisch mit dem Weber'schen Gesetz.*

Eine hier sich anschliessende allgemeinere Untersuchung führt zu folgenden weiteren Resultaten:

III. *Ist W das effective Potential eines beliebigen Punktsystemes, und sind x, y, z die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher die Masse m besitzt, so werden die Componenten der auf m einwirkenden Kraft jederzeit gleich sein den negativen Variationscoefficienten von W nach x, y, z.*

IV. *Ist ferner P die Componente jener Kraft nach einer beliebig gegebenen Richtung p, so wird P jederzeit gleich dem negativen Variationscoefficienten von W nach p.*

Der hier mehrfach gebrauchte Ausdruck Variationscoefficient bedarf einer kurzen Erläuterung. Sind $u, v, \ldots w$ *unbestimmte* Functionen von irgend einer Grundvariablen (z. B. von der Zeit), oder auch *unbestimmte* Functionen von beliebig vielen Grundvariablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; und ist G ein *gegebener* aus den Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, aus den Functionen $u, v, \ldots w$ und aus irgend welchen Ableitungen dieser Functionen nach jenen Variablen zusammengesetzter Ausdruck; so kann bekanntlich die durch eine Aenderung von $u, v, \ldots w$ entstehende *innere Variation*

$$\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

immer in die Form versetzt werden:

$$\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n = \int^{(n)} (a\,\delta u + b\,\delta v + \cdots + c\,\delta w)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

in welcher die Coefficienten $a, b, \ldots c$ nur von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w$ abhängen, unabhängig aber sind von den Variationen $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$. Diese Coefficienten $a, b, \ldots c$ sind es, welche ich die *Variationscoefficienten von G nach u, v, ... w* nenne.

Die Gesetze der Elektrischen Repulsion und Induction.

Da die zu Grunde gelegten Voraussetzungen hingeführt haben zu Weber's Universalgesetz, so werden sie selbstverständlich auch hinleiten müssen zu denjenigen bekannten Specialgesetzen, welche schon vor jenem Gesetz für die zwischen elektrischen Strömen sich zeigenden repulsiven und inductiven Wirkungen gefunden waren, und später erst durch das Weber'sche Gesetz zu einem einheitlichen Ganzen zusammengefasst wurden. Trotzdem habe ich diesen Gegenstand genauer untersucht, und habe dabei gefunden*), dass es für die Deduction der genannten Specialgesetze fast vollkommen gleichgültig ist, ob man ausgeht von der *dualistischen* oder von der *unitarischen* Vorstellung, dass nämlich eine Differenz in dieser Beziehung nur eintritt bei den Gesetzen der Induction, und auch hier nur in denjenigen (wohl noch immer nicht ausreichend untersuchten) Fällen, wo es sich um die Induction *nicht geschlossener* Ströme handelt.

Es sei ds das Element eines elektrischen Stromes, ferner seien $+ eds$ und $- eds$ die darin enthaltenen Quantitäten positiv und negativ elektrischen Fluidums, endlich seien $s' = \frac{\partial s}{\partial t}$ und S' die Geschwindigkeiten, welche jene Quantitäten besitzen nach *ein und derselben* Richtung s.

Setzt man $S' = - s'$, so bewegen sich beide Fluida mit gleicher Schnelligkeit nach entgegengesetzten Richtungen, in voller Uebereinstimmung mit der gewöhnlich zu Grunde gelegten dualistischen Vorstellung.

Setzt man hingegen $S' = 0$, so wird das negative Fluidum als fest verbunden aufgefasst mit der ponderablen Materie, oder wohl gar als identisch mit dieser Materie: so dass alsdann nur *ein* in Bewegung begriffenes Fluidum vorhanden ist. Diese letztere Vorstellung ist es, welche vorhin kurzweg als die unitarische bezeichnet wurde.

---

*) Was ich hier in Betreff der elektrischen Repulsion und Induction als Resultat meiner Untersuchungen angebe, wird in der gegenwärtigen Schrift nicht weiter entwickelt und begründet werden. Ich behalte mir solches vor für eine spätere Mittheilung.

Verfolgt man gleichzeitig *beide* Vorstellungen, und lässt man die im emissiven Potential enthaltene Function φ dabei unbestimmt, so gelangt man zu Resultaten, welche (wenn ds, eds, $s' = \frac{\partial s}{\partial t}$ die schon genannte Bedeutung behalten, und $d\sigma$, $\eta d\sigma$, $\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ analoge Bedeutung in Bezug auf irgend ein zweites Stromelement besitzen) in folgender Weise ausgesprochen werden können:

I. *Ist W das effective Potential der beiden Stromelemente aufeinander, und r ihre Entfernung, so wird jederzeit*

$$W = \frac{(2n)^2\, ds\, d\sigma\,.\, es'\,\eta\sigma'}{2}\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} \tag{7}$$

sein, wo ψ *die in* (4) *angegebene Function repräsentirt, und wo* n *eine Zahl vorstellt, welche* $= 2$ *oder* $= 1$ *ist, jenachdem man der dualistischen oder der unitarischen Vorstellung sich anschliesst.*

Für den Specialfall $\varphi = \frac{1}{r}$ wird, wie in (5) erwähnt wurde, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$. Für diesen Fall geht daher der Werth des Potentiales W über in:

$$W = \left(\frac{2n}{c}\right)^2 \frac{ds\,d\sigma\,.\,es'\,\eta\sigma'}{2r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial\sigma}\,. \tag{7a}$$

II. *Die repulsive Kraft* $\mathfrak{R}$, *mit welcher die beiden Stromelemente aufeinander einwirken, ist jederzeit gleich dem negativen Variationscoefficienten des Potentiales W nach r.*

Hieraus folgt die Formel:

$$\mathfrak{R} = (2n)^2\, ds\, d\sigma \cdot es'\,\eta\sigma'\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial\sigma}\,, \tag{8}$$

welche für $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$ übergeht in:

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{2n}{c}\right)^2 \frac{2\,ds\,d\sigma \cdot es'\,\eta\sigma'}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial\sigma}\,. \tag{8a}$$

Diese letztere Formel aber ist *identisch mit der des Ampère'schen Gesetzes*, wie sich leicht ergiebt.

III. *Sind* $d\sigma$ *und* ds *zwei Elemente geschlossener Ströme, und bezeichnet* $\mathfrak{E}$ *die von* $d\sigma$ *auf* ds *in der Richtung* s *ausgeübte Elektromotorische Kraft, so wird* $\mathfrak{E}$ *jederzeit gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von W nach s.*

Diese Regel, welche allgemein gültig ist (einerlei ob die Induction durch eine Aenderung der relativen Lage oder durch eine Aenderung der Stromstärke hervorgerufen wird) führt augenblicklich zu der Formel:

$$\mathfrak{E} = \frac{dW}{dt}\,, \tag{9}$$

wenn man nämlich unter $\overline{W}$ den Werth des Potentiales W für $s' = 1$ versteht. Und diese Formel repräsentirt unmittelbar das *von meinem Vater aufgestellte Inductionsgesetz.*

IV. Bis hierher findet also zwischen den Resultaten, die aus der dualistischen Vorstellung sich ergeben, und denen, die aus der unitarischen Vorstellung entspringen, vollständige Uebereinstimmung statt. Doch habe ich auch den Fall der Induction zwischen *nicht geschlossenen* Strömen genauer untersucht, und gefunden, dass in diesem Fall zwischen den Resultaten, zu welchen jene beiderlei Vorstellungen hinleiten, eine erhebliche *Differenz* stattfindet.

Das Princip der Lebendigen Kraft.

Es ist die Voraussetzung gemacht worden, dass das Hamilton'sche Princip eine völlig unumschränkte Gültigkeit besitze. Als unmittelbare Consequenz dieser Voraussetzung wird sich ergeben, dass das Princip der Lebendigen Kraft ebenfalls immer gültig ist, dass dasselbe jedoch seine gewöhnliche Form nicht immer bewahre.

Sind nur *zwei* Punkte gegeben m und m_1, und bezeichnet w das effective Potential der beiden Punkte aufeinander, so wird nach (3):

(10) $$w = m m_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],$$

oder was dasselbe ist:

(11) $$w = u + v,$$

wo u und v die Bedeutungen haben:

(12) $$u = m m_1 \varphi, \qquad v = m m_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Aus der Bedeutung von φ und ψ (vergl. (1) und (4)) folgt sofort, dass u unabhängig ist von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, dass hingegen v behaftet ist mit dem Factor $\frac{1}{cc}\cdot$ Andererseits erkennt man aus (12) augenblicklich, dass v verschwindet, sobald die beiden Punkte im Zustande der *Ruhe* erhalten werden, und dass also in diesem Fall das Potential w übergeht in u. Demgemäss werde ich mir erlauben u das *statische*, v aber das *motorische Potential* zu nennen. Beiläufig dürfte zu bemerken sein, dass das statische Potential immer gleichwerthig ist mit dem emissiven Potential, wie solches nicht nur aus den aufgestellten Formeln sich ergiebt, sondern auch direct hervorgeht aus der Definition dieser Potentiale.

Es handele sich nun um die Bewegung eines beliebigen Punkt-

systemes, und es sei W das effective Potential desselben. Der Werth von W mag in derselben Weise, wie der von w, in zwei Terme zerlegt werden:

$$(13) \qquad W = U + V.$$

Alsdann wird der von c unabhängige Term U das statische, und der mit dem Factor $\frac{1}{cc}$ behaftete Term V das motorische Potential des Systemes repräsentiren. Bedient man sich dieser Bezeichnungen, so gilt, wie ich zeigen werde, für die Lebendige Kraft folgender Satz:

Bei der Bewegung eines beliebigen Punktsystemes wird die Lebendige Kraft, vermehrt um das statische und vermindert um das motorische Potential, beständig ein und denselben Werth behalten. Es wird also

$$(14) \qquad T + U - V = \text{Const.}$$

sein, falls nämlich T die Lebendige Kraft des Systemes bezeichnet. Für den Fall der momentanen Fortpflanzung, d. i. für $c = \infty$ verschwindet der mit dem Factor $\frac{1}{cc}$ behaftete Ausdruck V; und es verwandelt sich demnach die Formel (14) für diesen Fall in die wohlbekannte Formel $T + U = \text{Const.}$

Was die Ausdrücke T, U, V anbelangt, mag schliesslich noch bemerkt werden, dass der erste nur von den Geschwindigkeiten der Punkte, der zweite nur von ihrer relativen Lage, der dritte aber gleichzeitig von den Geschwindigkeiten *und* von der relativen Lage abhängig ist.

§ 2.

Die Variationscoefficienten.

Vorläufige Bemerkung.

Sind f und φ Functionen der drei Variablen α, β, γ, so gelten die Gleichungen:

$$f \frac{\partial^3 \varphi}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma}\right) - \frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\varphi\right) - \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma}\varphi.$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$ multiplicirt, und sodann addirt, so ergiebt sich:

$$(1) \qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left((-1)^0 f \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left((-1)^1 \frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\gamma}\left((-1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\varphi\right) + (-1)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma}\varphi.$$

In analoger Weise wird sich, wenn f und φ Functionen von beliebig vielen, etwa von p Variablen $\alpha, \beta, \ldots \pi$ sind, eine Formel ergeben von folgender Gestalt:

$$(2) \qquad f\frac{\partial^p \varphi}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial P}{\partial \pi} + (-1)^p \frac{\partial^p f}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi}\varphi.$$

Sind im Ganzen n Variable $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ vorhanden, von welchen f, φ abhängen, und versteht man unter $\alpha, \beta, \ldots \pi$ beliebig gewählte unter jenen n Variablen und jede der gewählten beliebig oft wiederholt, so wird die Formel (2) ebenfalls noch gültig sein. Wird unter so bewandten Umständen jene Formel mit $d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$ multiplicirt, und integrirt über ein beliebig gegebenes Gebiet, so folgt:

$$(3) \qquad \int^{(n)} f\frac{\partial^p \varphi}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = \Sigma + (-1)^p \int^{(n)} \frac{\partial^p f}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi}\,\varphi\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n,$$

wo Σ eine Summe $(n-1)$facher Integrale vorstellt, welche sich erstrecken über die *Grenze* des gegebenen Integrationsgebietes, *und welche* (wie aus der Bedeutung von $A, B, \ldots P$ hervorgeht) *verschwinden, sobald die Function φ und sämmtliche Ableitungen derselben an jener Grenze Null sind.*

Definition der Variationscoefficienten.

Es sei u eine *unbestimmte* Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; wiederum repräsentire $\alpha, \beta, \ldots \pi$ eine beliebige Auswahl dieser Variablen, jede gewählte beliebig oft wiederholt, und zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(4) \qquad \frac{\partial^p u}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi} = u'.$$

Ferner sei

$$(5) \qquad G = G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, u')$$

ein *gegebener* aus jenen Variablen, aus u und u' zusammengesetzter Ausdruck. Es soll die Variation untersucht werden, welche das über ein beliebig gegebenes Gebiet ausgedehnte Integral

$$(6) \qquad \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

erleidet durch eine Aenderung von u, unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Function u und alle ihre Ableitungen an der *Grenze*

des gegebenen Gebietes ungeändert erhalten werden. Oder, wie wir uns der Kürze willen in Zukunft ausdrücken werden, es soll untersucht werden die *innere Variation* jenes Integrales. Für diese ergiebt sich sofort:

$$(7)\quad \delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = \int^{(n)} \delta G \cdot d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n,$$

$$= \int^{(n)} \left(\frac{\partial G}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial G}{\partial u'}\,\delta u'\right) d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n.$$

Nun ist nach (4):

$$(8)\quad \frac{\partial G}{\partial u'}\,\delta u' = \frac{\partial G}{\partial u'}\,\frac{\partial^p \delta u}{\partial\alpha\,\partial\beta \ldots \partial\pi},$$

also nach (3):

$$(9)\quad \int^{(n)} \frac{\partial G}{\partial u'}\,\delta u'\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

$$= \Sigma + (-1)^p \int^{(n)} \frac{\partial^p}{\partial\alpha\,\partial\beta \ldots \partial\pi}\,\frac{\partial G}{\partial u'} \cdot \delta u\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n.$$

Der vorhin angemerkte Fall eines Verschwindens von Σ tritt hier ein. Denn die hier an Stelle von φ befindliche Function δu verschwindet nebst allen ihren Ableitungen an der *Grenze* des Integrationsgebietes, weil die auszuführende Variation eine *innere* sein soll. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich, wenn der Werth (9) in (7) substituirt wird:

$$(10)\quad \delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n = \int^{(n)} a\,\delta u\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

wo a die Bedeutung hat:

$$(11\text{a})\quad a = \frac{\partial G}{\partial u} + (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial\alpha\,\partial\beta \ldots \partial\pi}\,\frac{\partial G}{\partial u'},$$

d. i. die Bedeutung:

$$(11\text{b})\quad a = \frac{\partial G}{\partial u} + (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial\alpha\,\partial\beta \ldots \partial\pi}\,\frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial^p u}{\partial\alpha\,\partial\beta \ldots \partial\pi}}.$$

Zur Abkürzung mag diese Grösse so bezeichnet werden:

$$(11\text{c})\quad a = \frac{\partial G}{\partial u} + \varepsilon_{u'} D_{u'}\,\frac{\partial G}{\partial u'},$$

wo alsdann $D_{u'}$ die Differentiation nach allen denjenigen Variablen andeuten soll, in Bezug auf welche die Ableitung u' gebildet ist, und wo gleichzeitig $\varepsilon_{u'}$ eine Zahl bezeichnet, welche den Werth $+1$ oder -1 hat, jenachdem u' eine Ableitung gerader oder ungerader Ordnung ist.

In ganz analoger Weise lässt sich eine allgemeinere Aufgabe behandeln. Ist nämlich nach wie vor u eine *unbestimmte* Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, sind ferner $u', u'', \ldots$ beliebig viele und beliebig hohe Ableitungen jener Function nach diesen Variablen, und ist endlich

(12) $$G = G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, u', u'' \ldots)$$

ein *gegebener* aus jenen Variablen, Functionen und Ableitungen zusammengesetzter Ausdruck, so wird sich für die *innere Variation* des Integrales

(13) $$\int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

folgender Werth ergeben:

(14) $$\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = \int^{(n)} a\,\delta u\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n,$$

wo a bei Anwendung der in (11c) eingeführten Bezeichnung so dargestellt werden kann:

(15) $$a = \frac{\partial G}{\partial u} + \varepsilon_{u'} D_{u'} \frac{\partial G}{\partial u'} + \varepsilon_{u''} D_{u''} \frac{\partial G}{\partial u''} + \cdots.$$

Mit gleicher Leichtigkeit endlich lässt sich eine noch allgemeinere Aufgabe behandeln. Es seien nämlich $u, v, \ldots w$ beliebig viele *unbestimmte* Functionen der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; ferner sei G ein *gegebener* Ausdruck, zusammengesetzt aus den Variablen α, aus den Functionen $u, v, \ldots w$ und aus beliebig gewählten Ableitungen dieser Functionen nach den α; es handele sich darum, die *innere Variation* zu ermitteln, welche das Integral

(16) $$\int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

erleidet durch gleichzeitige Aenderungen von $u, v, \ldots w$. Wie leicht zu übersehen, wird man in diesem Fall zu dem Resultat gelangen:

(17) $$\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$
$$= \int^{(n)} (a\,\delta u + b\,\delta v + \cdots + c\,\delta w)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

wo $a, b, \ldots c$ die Werthe besitzen:

(18) $$\begin{aligned} a &= \frac{\partial G}{\partial u} + \varepsilon_{u'} D_{u'} \frac{\partial G}{\partial u'} + \varepsilon_{u''} D_{u''} \frac{\partial G}{\partial u''} + \cdots, \\ b &= \frac{\partial G}{\partial v} + \varepsilon_{v'} D_{v'} \frac{\partial G}{\partial v'} + \varepsilon_{v''} D_{v''} \frac{\partial G}{\partial v''} + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c &= \frac{\partial G}{\partial w} + \varepsilon_{w'} D_{w'} \frac{\partial G}{\partial w'} + \varepsilon_{w''} D_{w''} \frac{\partial G}{\partial w''} + \cdots. \end{aligned}$$

Dabei sind unter

$$\begin{gathered} u', u'', \ldots, \\ v', v'', \ldots, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w', w'', \ldots \end{gathered}$$

diejenigen Ableitungen von $u, v, \ldots w$ zu verstehen, welche in G enthalten sind.

Es erscheint angemessen, die Grössen $a, b, \ldots c$, vermittelst deren die Variation des Integrales von G sich darstellt, die *Variationscoefficienten von G nach* $u, v, \ldots w$ *zu nennen* (vergl. p. 407), und dieselben in analoger Weise wie die Differentialcoefficienten zu bezeichnen, nur mit dem Unterschiede, dass ein schräges Δ an Stelle des runden ∂ in Anwendung gebracht wird*). Die Bezeichnung wird dann diese sein:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta G}{\Delta u}, \\ b &= \frac{\Delta G}{\Delta v}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c &= \frac{\Delta G}{\Delta w}. \end{aligned} \tag{19}$$

Das gewöhnliche kleine δ bleibt dabei reservirt zur Bezeichnung der Variationen selber.

Diese Variationscoefficienten von G nach $u, v, \ldots w$ verwandeln sich, wie man aus (18) erkennt, in die entsprechenden Differentialcoefficienten $\frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \ldots \frac{\partial G}{\partial w}$, sobald der Ausdruck G nur die Functionen $u, v, \ldots w$ selber, nicht aber deren Ableitungen enthält.

Ein Satz über die Variationscoefficienten.

Mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der folgenden Untersuchungen ist es schliesslich noch erforderlich, einen Satz abzuleiten, durch welchen die Rechnung mit Variationscoefficienten oft wesentlich erleichtert wird, auf den ich übrigens schon bei einer früheren Gelegenheit (Untersuchungen über Elasticität. Crelle's Journal Bd. 57, pag. 299) aufmerksam gemacht habe.

---

*) Das Wort *Differentialcoefficient* wird allerdings nur selten gebraucht, so weit mir aber bekannt immer als synonym gebraucht mit *Ableitung* oder *Differentialquotient*. Diesem Worte *Differentialcoefficient* entsprechend ist hier die Bezeichnung *Variationscoefficient* eingeführt. (In der Originalschrift von 1868 war an Stelle des schrägen Δ ein umgedrehtes ϱ gebraucht worden).

Zu den Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und zu den m unbestimmten Functionen $u, v, \ldots w$ mögen noch hinzutreten M neue Functionen $U, V, \ldots W$, die ebenfalls nur von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ abhängen, ebenfalls unbestimmt sind, an jene früheren Functionen $u, v, \ldots w$ aber gekettet sind durch bestimmt festgesetzte Relationen:

$$(20)\qquad \begin{aligned} U &= \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w), \\ V &= \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W &= \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w). \end{aligned}$$

Ob M grösser oder kleiner als m ist, oder ob beide Zahlen gleich gross sind, bleibt dahingestellt.

Es sei nun G ein *gegebener* Ausdruck, zusammengesetzt aus den Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, aus den Functionen $U, V, \ldots W$ und aus irgend welchen (beliebig hohen) Ableitungen dieser Functionen nach jenen Variablen; es handle sich um die Ermittelung derjenigen *inneren Variation*, welche das Integral

$$(21)\qquad \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

erleidet durch Aenderungen von $u, v, \ldots w$. Diese Aufgabe kann in doppelter Weise gelöst werden.

Erster Weg. Sobald sich $u, v, \ldots w$ um beliebig gegebene Grössen $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$ ändern, werden sich gleichzeitig die in G enthaltenen $U, V, \ldots W$ um gewisse andere Grössen $\delta U, \delta V, \ldots \delta W$ ändern, welche sich auf Grund der Relationen (20) ausdrücken lassen durch

$$(22)\qquad \begin{aligned} \delta U &= \frac{\partial U}{\partial u}\delta u + \frac{\partial U}{\partial v}\delta v \cdots + \frac{\partial U}{\partial w}\delta w, \\ \delta V &= \frac{\partial V}{\partial u}\delta u + \frac{\partial V}{\partial v}\delta v \cdots + \frac{\partial V}{\partial w}\delta w, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta W &= \frac{\partial W}{\partial u}\delta u + \frac{\partial W}{\partial v}\delta v \cdots + \frac{\partial W}{\partial w}\delta w. \end{aligned}$$

In Folge dieser Aenderungen $\delta U, \delta V, \ldots \delta W$ wird aber das Integral (21) eine Aenderung erleiden, dargestellt durch

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \\ &= \int^{(n)} (A\delta U + B\delta V \cdots + C\delta W)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n \end{aligned}$$

wo $A, B, \ldots C$ die Variationscoefficienten von G nach $U, V, \ldots W$ sind.

Zweiter Weg. Man kann die in G enthaltenen Functionen $U, V, \ldots W$ und die darin enthaltenen Ableitungen von $U, V, \ldots W$

eliminiren, nämlich vermittelst der Relationen (20) ersetzen durch die Functionen $u, v, \ldots w$ und durch deren Ableitungen. Denkt man sich solches ausgeführt, so wird die auf Grund der gegebenen Aenderungen $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$ entstehende Aenderung des Integrales (21) repräsentirt sein durch die Formel:

$$(24) \qquad \delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$
$$= \int^{(n)} (a\delta u + b\delta v \cdots + c\delta w)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

wo $a, b, \ldots c$ die Variationscoefficienten von G nach $u, v, \ldots w$ sind.

Vergleichung der Resultate. Die in (23) und (24) erhaltenen Resultate müssen unter einander übereinstimmen für beliebige Werthe von $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$, vorausgesetzt, dass man unter $\delta U, \delta V, \ldots \delta W$ die in (22) gefundenen Ausdrücke versteht. Der Coefficient von δu z. B. muss in (24) derselbe sein wie in (23); daraus folgt:

$$a = A \frac{\partial U}{\partial u} + B \frac{\partial V}{\partial u} \cdots + C \frac{\partial W}{\partial u}.$$

Analoge Formeln ergeben sich durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\delta v, \ldots \delta w$.

Bedient man sich für die Variationscoefficienten der vor einigen Augenblicken eingeführten Bezeichnung, so nehmen diese Formeln folgende Gestalt an:

$$(25) \qquad \begin{aligned} \frac{\Delta G}{\Delta u} &= \frac{\Delta G}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\Delta G}{\Delta V}\frac{\partial V}{\partial u} \cdots + \frac{\Delta G}{\Delta W}\frac{\partial W}{\partial u}, \\ \frac{\Delta G}{\Delta v} &= \frac{\Delta G}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\Delta G}{\Delta V}\frac{\partial V}{\partial v} \cdots + \frac{\Delta G}{\Delta W}\frac{\partial W}{\partial v}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\Delta G}{\Delta w} &= \frac{\Delta G}{\Delta U}\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\Delta G}{\Delta V}\frac{\partial V}{\partial w} \cdots + \frac{\Delta G}{\Delta W}\frac{\partial W}{\partial w}. \end{aligned}$$

Und diese Formeln enthalten den Satz, um dessen Ableitung es sich hier handelte, einen Satz, welcher angesehen werden kann als die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes der Differentialrechnung. Ist nämlich der gegebene Ausdruck G nur von $U, V, \ldots W$ selber, nicht aber von deren Ableitungen abhängig, so wird derselbe nach der durch die Relationen (20) zu bewirkenden Elimination ebenfalls nur von $u, v, \ldots w$ selber abhängig werden, nicht aber von den Ableitungen dieser Functionen. In solchem Falle werden daher die in den Formeln (25) enthaltenen Variationscoefficienten übergehen in die entsprechenden Differentialcoefficienten, die Formeln selber also übergehen in wohlbekannte Formeln der Differentialrechnung.

Um den in den Gleichungen (25) enthaltenen allgemeinen Satz deutlich vor Augen zu haben, wollen wir bemerken, dass derselbe,

wenn die Anzahl der Functionen $u, v, \ldots w$ gleich 1, und die der Functionen $U, V, \ldots W$ ebenfalls gleich 1 ist, folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Ist G in gegebener Weise gekettet an eine unbestimmte Function U und deren Ableitungen, und ist die Function U ihrerseits in gegebener Weise gekettet an eine andere unbestimmte Function u, so wird der Variationscoefficient von G nach u immer dadurch erhalten werden können, dass man den Variationscoefficienten von G nach U bildet und diesen multiplicirt mit dem Differentialcoefficienten von U nach u. Es wird nämlich die Formel stattfinden

$$\frac{\varDelta G}{\varDelta u} = \frac{\varDelta G}{\varDelta U}\,\frac{\partial U}{\partial u}. \tag{26}$$

Dabei sind unter u und U Functionen zu verstehen von beliebig vielen Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, und unter den Ableitungen dieser Functionen diejenigen zu verstehen, welche nach $\alpha_1, \ldots \alpha_2, \alpha_n$ gebildet sind durch beliebig gewählte und beliebig oft wiederholte Differentiationen.

§ 3.

Das emissive und das receptive Potential.*)

Wir betrachten zwei Punkte m und m_1, die sich bewegen unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, und bezeichnen ihre Entfernung für einen *gegebenen* Zeitaugenblick t mit r, andererseits ihre Entfernung für irgend einen *früheren* Zeitaugenblick $t - \Delta t$ mit $r - \Delta r$. Setzen wir

$$r = f(t), \tag{1}$$

so wird unter f eine Function zu verstehen sein, die ebenso *unbekannt* uns ist, wie überhaupt die Bewegung der Punkte. Jedenfalls wird dann aber auch zu setzen sein:

$$r - \Delta r = f(t - \Delta t), \tag{2}$$

oder was dasselbe ist:

$$r - \Delta r = f(t) - \frac{\Delta t}{1} f'(t) + \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} f''(t) - \cdots \text{ in inf.} \tag{3}$$

Diese letztere Formel nimmt mit Hülfe der aus (1) entspringenden Gleichungen

$$\frac{dr}{dt} = f'(t), \quad \frac{d^2r}{dt^2} = f''(t), \quad \text{etc. etc.}$$

folgende Gestalt an:

$$r - \Delta r = r - \frac{\Delta t}{1}\,\frac{dr}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1 \,.\, 2}\,\frac{d^2 r}{dt^2} - \cdots \text{ in inf.} \tag{4}$$

Bedienen wir uns nun der früher (pag. 404, 405) eingeführten Benennungen, und bezeichnen wir demgemäss mit ϖ das *emissive Potential* der beiden Punkte zur Zeit t, so wird:

*) *Genaueres* über den Inhalt dieses (wohl etwas zu kurz gefassten) Paragraphen findet man in diesen Annalen, Bd. I, Seite 317 – 324.

$$\varpi = m m_1 \varphi(r), \tag{5}$$

wo $\varphi(r)$ irgend welche *gegebene* Function vorstellt, welche bei Zugrundelegung des Newton'schen Gesetzes übergehen würde in $\frac{1}{r}$.

Andererseits mag das *receptive Potential* der beiden Punkte zur Zeit t bezeichnet werden mit ω; und zwar mag, um die Vorstellung zu fixiren, m als Empfänger, m_1 als Aussender gedacht, unter ω also dasjenige Potential verstanden werden, welches m zur Zeit t empfängt, und welches demgemäss bereits zu einer *früheren* Zeit $t - \Delta t$ von m_1 ausgesendet worden ist. Alsdann wird ω identisch sein mit dem dieser früheren Zeit entsprechenden emissiven Potential, folglich den Werth besitzen:

$$\omega = m m_1 \varphi(r - \Delta r). \tag{6}$$

Durch Benutzung von (4) geht dieser Werth über in

$$\omega = m m_1 \varphi\left(r - \frac{\Delta t}{1} \frac{dr}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1\,.\,2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \cdots \text{in inf.}\right). \tag{7}$$

Das hier vorhandene Δt repräsentirt diejenige Zeit, welche das Potential braucht zur Durchlaufung des Weges r. Da wir nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Potentiales mit c bezeichnet haben (pag. 404), unter c also denjenigen Weg verstehen, welchen das Potential in der Zeit 1 durchschreitet, so wird $\Delta t : r = 1 : c$, d. i.

$$\Delta t = \frac{r}{c}. \tag{8}$$

Wir werden nun fortan die Geschwindigkeit c als eine überaus grosse, und demgemäss den Bruch $\frac{r}{c}$ als so klein betrachten, dass seine *dritte* Potenz vernachlässigt werden darf. Durch Substitution des Werthes (8) in (7) ergiebt sich dann:

$$\omega = m m_1 \varphi\left(r - \frac{r}{c} \frac{dr}{dt} + \frac{rr}{2cc} \frac{d^2 r}{dt^2}\right), \tag{9}$$

und hieraus durch weitere Entwicklung:

$$\omega = m m_1 \left[\varphi - \frac{r}{c} \frac{dr}{dt} \varphi' + \frac{rr}{2cc} \frac{d^2 r}{dt^2} \varphi' + \frac{rr}{2cc} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \varphi''\right], \tag{10}$$

oder anders geordnet:

$$\omega = m m_1 \left[\varphi + \frac{rr\varphi''}{2cc} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{rr\varphi'}{2cc} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\varphi'}{c} \frac{dr}{dt}\right], \tag{11}$$

wo zur Abkürzung $\varphi(r) = \varphi$, $\frac{d\varphi(r)}{dr} = \varphi'$, $\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} = \varphi''$ gesetzt ist. Nun gelten, wenn Φ eine beliebige Function von r vorstellt, ganz allgemein die Formeln:

$$\Phi \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\Phi \frac{dr}{dt}\right) - \frac{d\Phi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

$$\Phi \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int \Phi dr\right);$$

und der für ω gefundene Ausdruck (11) verwandelt sich, wenn man seine beiden letzten Glieder nach Maassgabe dieser beiden Formeln umgestaltet, in folgenden:

$$(12) \qquad \omega = mm_1 \left[\varphi + \frac{rr\varphi''}{2cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{(rr\varphi')'}{2cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + mm_1 \frac{d}{dt}\left[\frac{rr\varphi'}{2cc}\frac{dr}{dt} - \frac{\int r\varphi' dr}{c}\right],$$

wo $(rr\varphi')'$ für $\frac{d(rr\varphi')}{dr}$ gesetzt ist, also $= rr\varphi'' + 2r\varphi'$ ist. Substituirt man diesen Werth, und bemerkt man ausserdem, dass $\int r\varphi' dr = r\varphi - \int \varphi dr$ ist, so gewinnt der Ausdruck für ω schliesslich folgende Gestalt:

$$(13) \qquad \omega = mm_1 \left[\varphi - \frac{r\varphi'}{cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + mm_1 \frac{d}{dt}\left[\frac{(\int \varphi dr) - r\varphi}{c} + \frac{rr\varphi'}{2cc}\frac{dr}{dt}\right].$$

Wir haben bisher m_1 als Aussender und m als Empfänger des Potentiales uns gedacht. Schritt für Schritt *dieselbe* Betrachtung, begleitet von genau *denselben* Formeln, wird aber, wie leicht zu übersehen, durchgeführt werden können, wenn wir umgekehrt m als Aussender und m_1 als Empfänger des Potentiales ansehen.

Daraus folgt, dass der in (13) gefundene Potentialwerth ω nicht nur derjenige ist, welcher in dem gegebenen Zeitaugenblick *t in m anlangt, gesendet von m_1*, sondern gleichzeitig auch derjenige, welcher in jenem Augenblick *anlangt in m_1, gesendet von m.*

Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Bewegen sich zwei Punkte m und m_1 unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, und bezeichnet r ihre Entfernung zur Zeit t, ferner ω das derselben Zeit entsprechende receptive Potential der beiden Punkte, so ist

$$(14a) \qquad \omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt},$$

wo w und $\mathfrak{w}$ folgende Ausdrücke repräsentiren:

$$(14b) \qquad \begin{aligned} w &= mm_1 \left[\varphi - \frac{r}{cc}\frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right], \\ \mathfrak{w} &= mm_1 \left[\frac{(\int \varphi dr) - r\varphi}{c} + \frac{rr}{2cc}\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt}\right], \end{aligned}$$

Hier ist zur Abkürzung φ für $\varphi(r)$ gesetzt, und ferner unter c die überaus grosse und constante Geschwindigkeit zu verstehen, mit welcher das Potential durch den Raum sich fortpflanzt.

Zu bemerken ist noch, dass der Werth des Ausdruckes w sich einfacher so darstellen lässt:

$$w = m m_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \tag{14c}$$

wo alsdann unter ψ folgende Function zu verstehen ist:

$$\psi = \int \sqrt{-r \frac{d\varphi}{dr}} \cdot \frac{dr}{c}. \tag{14d}$$

Das receptive Potential ω besteht nach (14a) *aus den beiden Bestandtheilen w und $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$. Von diesen mag der erstere, nämlich w das effective Potential, und der andere, nämlich $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$ das ineffective Potential genannt werden.*

Die hier eingeführten Namen scheinen mir durchaus nothwendig, falls bei den weiteren Untersuchungen die Auseinandersetzung nicht eine zu schleppende werden soll. Und die Art und Weise, *wie* die Namen gewählt sind, dürfte ihre Berechtigung von selber finden im Laufe der folgenden Expositionen.

Für den Fall des Newton'schen Emissionsgesetzes, nämlich für $\varphi = \frac{1}{r}$ wird $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$. Für diesen Fall gestalten sich daher die Formeln (14a, b, c) folgendermaassen:

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}, \tag{15a}$$

$$w = m m_1 \left[\frac{1}{r} + \frac{4}{cc}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dt}\right)^2\right], \tag{15b}$$

$$= \frac{m m_1}{r}\left[1 + \frac{1}{cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

$$\mathfrak{w} = m m_1 \left[\frac{\log r}{c} - \frac{1}{2cc}\frac{dr}{dt}\right]. \tag{15c}$$

§ 4.

Das Weber'sche Gesetz.

Ableitung desselben.

Es handle sich darum, die Bewegung zweier Punkte m und m_1 zu ermitteln, unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass das von jedem der beiden Punkte in einem bestimmten Zeitaugenblick ab-

gesendete Potential immer erst in einem gewissen späteren Zeitaugenblick den andern Punkt erreicht.

Für irgend einen Zeitaugenblick t mögen die Coordinaten der Punkte mit x, y, z, x_1, y_1, z_1 und ihre Entfernung von einander mit r bezeichnet werden. Ferner mag für jenen Zeitaugenblick unter ω das in (14a, b, c) ermittelte receptive Potential der beiden Punkte:

$$(16) \qquad \omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt},$$

und unter τ ihre lebendige Kraft:

$$(17) \qquad \tau = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \frac{m_1}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$

verstanden werden. Da wir nun das Hamilton'sche Princip als unumschränkt gültig ansehen (pag. 404), so wird die Bewegung der Punkte m und m_1 in einer Weise stattfinden, welche charakterisirt ist durch die aus jenem Princip entspringende Formel:

$$(18) \qquad \delta \int (\tau - \omega)\, dt = 0.$$

In dieser Formel ist (pag. 403) die Integration hinerstreckt zu denken über einen beliebig zu wählenden Zeitraum, und andererseits unter δ die *innere Variation*, d. i. eine Variation zu verstehen, welche nicht die Grenzen, sondern nur das Innere jenes Zeitraumes betrifft.

Durch Substitution von (16) nimmt die Formel (18) folgende Gestalt an:

$$(19) \qquad \delta \int \tau\, dt = \delta \int \left(w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right) dt, \\ = \delta\left(\mathfrak{w}_{\prime\prime} - \mathfrak{w}_{\prime} + \int w\, dt\right),$$

oder, weil δ eine *innere* Variation andeutet, mithin $\delta\mathfrak{w}_{\prime\prime} = \delta\mathfrak{w}_{\prime} = 0$ sind, folgende:

$$(20) \qquad \delta \int \tau\, dt = \delta \int w\, dt.$$

Beachtet man nun, dass die in τ und w enthaltenen unbestimmten Functionen durch x, y, z und x_1, y_1, z_1 repräsentirt sind, so ergeben sich durch Ausführung jener Variation und mit Rücksicht auf die von uns eingeführten Bezeichnungen (pag. 414) folgende sechs Gleichungen:

$$(21)\qquad \begin{aligned} \frac{\varDelta\tau}{\varDelta x} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta x}, & \frac{\varDelta\tau}{\varDelta x_1} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta x_1}, \\ \frac{\varDelta\tau}{\varDelta y} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta y}, & \frac{\varDelta\tau}{\varDelta y_1} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta y_1}, \\ \frac{\varDelta\tau}{\varDelta z} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta z}, & \frac{\varDelta\tau}{\varDelta z_1} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta z_1}. \end{aligned}$$

Führt man die Variationscoefficienten linker Hand wirklich aus, mit Zugrundelegung des in (17) für τ gegebenen Werthes, so gewinnen diese sechs Gleichungen folgende Gestalt:

$$(22)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta x}, & m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta x_1}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta y}, & m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta y_1}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta z}, & m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta z_1}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, *dass die negativen Variationscoefficienten rechter Hand die Componenten derjenigen Kräfte repräsentiren, welche auf die Punkte einwirken während ihrer Bewegung.* Um jene Variationscoefficienten wirklich zu bilden, bemerken wir, dass das effective Potential w (14c) den Werth hat:

$$(23)\qquad \begin{aligned} w &= mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \\ &= mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dr}\,\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \end{aligned}$$

also abhängig ist von r und $\frac{dr}{dt}$, während r seinerseits gebunden ist an die unbestimmten Functionen x, y, z, x_1, y_1, z_1 durch die Gleichung

$$(24)\qquad r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2.$$

Jene Variationscoefficienten werden daher berechnet werden können vermittelst eines früher (pag. 416, 417) besprochenen Satzes, nämlich berechnet werden können vermittelst der Formeln:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \frac{\varDelta w}{\varDelta x} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta r}\,\frac{\partial r}{\partial x}, & \frac{\varDelta w}{\varDelta x_1} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta r}\,\frac{\partial r}{\partial x_1}, \\ \frac{\varDelta w}{\varDelta y} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta r}\,\frac{\partial r}{\partial y}, & \frac{\varDelta w}{\varDelta y_1} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta r}\,\frac{\partial r}{\partial y_1}, \\ \frac{\varDelta w}{\varDelta z} &= \frac{\varDelta}{\varDelta r}\,\frac{\partial r}{\partial z}, & \frac{\varDelta w}{\varDelta z_1} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta r}\,\frac{\partial r}{\partial z_1}. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (22), und setzt man dabei gleichzeitig für $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \cdots$ die aus (24) sich ergebenden Werthe, so erhält man die Gleichungen:

$$(26)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{x-x_1}{r}, & m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{x_1-x}{r},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{y-y_1}{r}, & m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{y_1-y}{r},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{z-z_1}{r}, & m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{z_1-z}{r}. \end{aligned}$$

Schliesslich bleibt noch übrig die Berechnung des Variationscoefficienten $\frac{\Delta w}{\Delta r}$. Setzt man zur Abkürzung r' statt $\frac{dr}{dt}$ und r'' statt $\frac{d^2r}{dt^2}$, so wird nach (23):

$$(27)\qquad w = mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dr}r'\right)^2\right],$$

folglich:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = mm_1\left[\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dr^2}r'r'\right],$$

$$\frac{\partial w}{\partial r'} = mm_1\cdot 2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 r',$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial w}{\partial r} = mm_1\left[\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{d\psi}{dr}}{dt}\right],$$

$$(\beta)\qquad \frac{\partial w}{\partial r'} = mm_1\cdot 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d\psi}{dt}.$$

Aus letzterer Formel ergiebt sich durch Differentiation:

$$(\gamma)\qquad \frac{d\frac{\partial w}{\partial r'}}{dt} = mm_1\left[2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{d\psi}{dr}}{dt}\right].$$

Nun wird, weil w (27) nur von r und r' abhängt:

$$(28)\qquad \frac{\Delta w}{\Delta r} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{d\frac{\partial w}{\partial r'}}{dt},$$

folglich, wenn man die Werthe (α), (γ) substituirt:

$$(29)\qquad \frac{\Delta w}{\Delta r} = mm_1\left[\frac{d\varphi}{dr} - 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right].$$

Aus (26) und (29) ergeben sich folgende Sätze:

Zwischen zwei Punkten m und m_1 ist während ihrer Bewegung eine Kraft R thätig, welche in jedem Augenblick zusammenfällt mit ihrer Verbindungslinie r.

Betrachtet man diese Kraft R als eine repulsive, und ist w das effective Potential der beiden Punkte auf einander, so wird R jederzeit

gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von w nach r, also den Werth haben:

$$R = -\frac{\Delta w}{\Delta r}. \tag{30}$$

Ist das in Betreff des Potentiales zu Grunde gelegte Emissionsgesetz ein beliebiges, das emissive Potential also $= m m_1 \varphi(r)$, wo φ eine beliebige Function bezeichnet, und setzt man zur Abkürzung

$$\begin{gathered} \varphi(r) = \varphi, \\ \frac{1}{c}\int\sqrt{-r\frac{d\varphi}{dr}}\,dr = \psi(r) = \psi, \end{gathered} \tag{31}$$

so sind die Werthe für das effective Potential w und für die Kraft R folgende:

$$\begin{gathered} w = m m_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \\ R = -\frac{\Delta w}{\Delta r} = m m_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right]. \end{gathered} \tag{32}$$

Legt man insbesondere das Newton'sche Emissionsgesetz zu Grunde, so wird:

$$\begin{gathered} \varphi = \frac{1}{r}, \\ \psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}, \end{gathered} \tag{31a}$$

und demzufolge:

$$\begin{gathered} w = m m_1 \left[\frac{1}{r} + \frac{4}{cc}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dt}\right)^2\right], \\ R = -\frac{\Delta w}{\Delta r} = m m_1 \left[\frac{1}{rr} + \frac{4}{cc\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right], \\ \text{d. i.: } R = \frac{m m_1}{rr}\left[1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{cc}\frac{d^2 r}{dt^2}\right]. \end{gathered} \tag{32a}$$

Ueberall repräsentirt hier c die constante und überaus grosse Geschwindigkeit, mit welcher das Potential im Raume sich fortpflanzt).*

---

*) Der Werth R (32) kann aus der Formel

$$w = m m_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]$$

auch folgendermassen abgeleitet werden. Nach dem Satz über die Variationscoefficienten (Pag. 416, 417) ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta r} &= \frac{\Delta w}{\Delta \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\Delta w}{\Delta \psi}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ &= m m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - m m_1 \cdot 2\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{aligned}$$

also

$$R = m m_1 \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right].$$

Die allgemeinere Formel (32) stimmt vollständig überein mit demjenigen Gesetze, welches ich in meiner Dissertation: „*Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Halis Saxonum* 1858.“ supponirt habe in Bezug auf die gegenseitige Einwirkung zwischen einem *Elektrischen* und einem *Aethertheilchen*. Denn jene Formel (32) lässt sich so darstellen:

$$(33) \qquad R = mm_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2\,\frac{d\psi}{dr}\,\frac{d^2\psi}{dr^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 \frac{d^2 r}{dt^2}\right],$$

und nimmt also, wenn man

$$(34) \qquad -\frac{d\varphi}{dr} = F, \qquad 2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = \Phi$$

setzt, die Gestalt an:

$$(35) \qquad R = mm_1 \left[F + \frac{1}{2}\,\frac{d\Phi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \Phi\,\frac{d^2 r}{dt^2}\right].$$

Dies aber ist das in jener Dissertation (pag. 3 derselben) supponirte Gesetz*).

---

*) Die Formeln (34) können, zufolge (31), auch so geschrieben werden:

$$(\alpha) \qquad -\frac{d\varphi}{dr} = F, \qquad -\frac{2r}{cc}\,\frac{d\varphi}{dr} = \Phi.$$

Demnach findet zwischen F und Φ die Relation statt:

$$(\beta) \qquad \frac{2F}{cc} = \frac{\Phi}{r}.$$

In der erwähnten Dissertation habe ich die Beziehung zwischen F und Φ unbestimmt gelassen, so dass also zwischen jener Dissertation und der gegenwärtig entwickelten Theorie nicht der geringste Widerspruch stattfindet. — Das in Rede stehende optische Phänomen habe ich später einer ausführlicheren Bearbeitung unterworfen in meiner Schrift: „Ueber die Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Halle. 1863.“ Und hier habe ich leider (und zwar nur, um meiner Darstellung eine grössere Einfachheit und Uebersichtlichkeit zu verleihen) zwischen F und Φ eine gewisse Relation angenommen:

$$(\gamma) \qquad \frac{2F}{cc} = -\frac{d\Phi}{dr},$$

welche *für den Specialfall* $\varphi = \frac{1}{r}$ d. i. $F = \frac{1}{rr}$ identisch ist mit der Relation (β), (nämlich ebenso wie jene den Werth $\Phi = \frac{2}{ccr}$ liefert), *im Allgemeinen aber* in Widerspruch steht mit (β). Ich muss mit Bezug hierauf bemerken, dass die Annahme der Relation (γ) in der eben genannten Schrift durch keinerlei innere Gründe geboten wurde, sondern nur geschah, um in der äusseren Form eine grössere Einfachheit zu erzielen. In der That spielt die Function F bei meiner Untersuchung über die Drehung der Polarisationsebene durchaus keine Rolle. Sie

Wichtig vor allen Dingen aber ist, dass die speciellere Formel (32a) identisch (sogar bis auf die Buchstaben identisch) ist mit dem allgemein bekannten *Weber'schen Gesetz.*

Zusätze.

Bezeichnet man die, während der Bewegung der beiden Punkte m und m_1, auf m einwirkende Kraft R, was ihre Componenten anbelangt, mit X, Y, Z, so ist zufolge der Gleichungen (22):

$$
(36)\qquad \begin{aligned}
X &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta x},\\
Y &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta y},\\
Z &= -\frac{\varDelta w}{\varDelta z},
\end{aligned}
$$

Denkt man sich nun durch den Punkt m eine Linie gelegt in irgend welcher Richtung, bestimmt durch die Richtungscosinus α, β, γ, und bezeichnet man die Componente jener Kraft R nach dieser Richtung mit P, so wird

$$
(37)\qquad \begin{aligned}
P &= X\alpha + Y\beta + Z\gamma,\\
&= -\left[\frac{\varDelta w}{\varDelta x}\,\alpha + \frac{\varDelta w}{\varDelta y}\,\beta + \frac{\varDelta w}{\varDelta z}\,\gamma\right].
\end{aligned}
$$

Denkt man sich die Beweglichkeit des Punktes m oder x, y, z für den Augenblick auf jene Linie beschränkt, setzt man also

$$x = a + p\alpha, \quad y = b + p\beta, \quad z = c + p\gamma,$$

wo a, b, c ein fester Punkt der Linie, und p die Entfernung ist zwischen diesem Punkte und dem Punkte x, y, z; so wird

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial p}, \qquad \beta = \frac{\partial y}{\partial p}, \qquad \gamma = \frac{\partial z}{\partial p}.$$

Und demgemäss verwandelt sich alsdann die Formel (37) in folgende:

$$
(38)\qquad P = -\left[\frac{\varDelta w}{\varDelta x}\,\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\varDelta w}{\varDelta y}\,\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\varDelta w}{\varDelta z}\,\frac{\partial z}{\partial p}\right].
$$

Was die Abhängigkeit zwischen w und p anbelangt, so ist w zunächst abhängig von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, während x, y, z ihrerseits abhängig sind von p. Der in (38) befindliche Ausdruck [ ] ist daher, wie aus einem früheren Satze (p. 416, 417) hervorgeht, nichts Anderes als der Variationscoefficient von w nach p. Somit ergiebt sich:

---

fällt gleich zu Anfang aus den Rechnungen heraus. Und die Resultate, zu welchen jene Untersuchung führt, werden daher *ein und dieselben bleiben*, welche Beschaffenheit die zwischen F und Φ vorhandene Relation auch haben mag.

(39) $$P = -\frac{\Delta w}{\Delta p},$$

eine Formel, welche völlig analog ist mit den Formeln (36), und dieselben als Specialfälle in sich fasst.

Sind beliebig viele Punkte $m, m_1, m_2, m_3, \cdots$ vorhanden, und bezeichnen $w_1, w_2, w_3, \cdots$ die effectiven Potentiale für jedes der Punktpaare (m, m_1), (m, m_2), (m, m_3), $\cdots$, so wird, wie sich aus (39) ergiebt, der Ausdruck

(40) $$-\left(\frac{\Delta w_1}{\Delta p} + \frac{\Delta w_2}{\Delta p} + \frac{\Delta w_3}{\Delta p} + \cdots\right)$$

diejenige Kraft repräsentiren, mit welcher der Punkt m von allen übrigen Punkten zusammengenommen in der Richtung p fortgetrieben wird. Dieser Ausdruck aber kann, wenn man unter W das effective Potential des ganzen Punktsystemes versteht, kürzer dargestellt werden durch:

(41) $$-\frac{\Delta W}{\Delta p}.$$

Somit folgt der Satz:

Ist W das effective Potential eines beliebigen Punktsystemes, so wird die Kraft, mit welcher irgend einer dieser Punkte in einer gegebenen Richtung fortgetrieben wird, immer gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von W nach jener Richtung.

§ 5.

Das Princip der Lebendigen Kraft.

Betrachtung zweier Punkte.

Wir beginnen mit einem möglichst einfachen Fall, mit dem Fall, dass nur *zwei* Punkte m und m_1 vorhanden sind, und setzen überdies voraus, dass nur m *beweglich*, m_1 aber *fest* ist.

Es seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der beiden Punkte, r ihre Entfernung, ferner sei ω das *receptive Potential* der beiden Punkte auf einander, und endlich sei τ ihre lebendige Kraft:

Das receptive Potential ω besteht (pag. 419) aus zwei Theilen:

(1) $$\omega = w + \frac{dw}{dt},$$

von welchem der erstere das *effective*, der letztere das *ineffective* Potential genannt wurde. Ferner besitzt das effective Potential w (pag. 419, 420) den Werth:

(2) $$w = m m_1 \left[\varphi(r) + \left(\frac{d\psi(r)}{dt}\right)^2\right],$$

wo $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ gegebene Functionen von r sind, welche im Falle des Newton'schen Emissionsgesetzes durch $\frac{1}{r}$ und $\frac{2\sqrt{r}}{c}$ repräsentirt sein würden, wo c die mehrfach genannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit vorstellt. Wir bezeichnen die beiden Bestandtheile von w mit u und v, setzen nämlich:

$$\begin{aligned} &w = u + v, \\ &u = mm_1\,\varphi(r) = mm_1\,\varphi, \\ &v = mm_1\left(\frac{d\psi(r)}{dt}\right)^2 = mm_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Im Zustande der Ruhe, d. i. bei sich gleichbleibendem Werthe von r verschwindet v, reducirt sich also w auf u. Von den beiden Bestandtheilen des *effectiven Potentiales* w mag demnach der erstere u das *statische Potential*, der andere v aber das *motorische Potential* genannt werden.

Was die lebendige Kraft τ der beiden Punkte anbelangt, so wird, weil m_1 *fest* gedacht ist:

$$\tau = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Bezeichnen wir die Differentiationen nach der Zeit durch Accente und beachten wiederum, dass x_1, y_1, z_1 *constant* sind, so können wir die Formeln (3) und (4) auch so darstellen:

$$\begin{aligned} &w = u + v, \\ &u = mm_1\,\varphi, \\ &v = mm_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' + \frac{\partial\psi}{\partial z}z'\right)^2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\tau = \frac{m}{2}(x'x' + y'y' + z'z'). \tag{6}$$

Für die Bewegung der Punkte gilt nun nach dem Hamilton'schen Princip die Formel:

$$\delta\int(\tau - \omega)\,dt = 0 \tag{7}$$

d. i. nach (1):

$$\begin{aligned} \delta\int\tau\,dt &= \delta\int\left(w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right)dt, \\ &= \delta\mathfrak{w}_{,,} - \delta\mathfrak{w}_{,} + \delta\int w\,dt, \end{aligned} \tag{8}$$

oder weil die Grenzen der Integrale als unveränderlich zu betrachten sind in Bezug auf Ort und Geschwindigkeit:

$$(9) \qquad \delta \int \tau\, dt = \delta \int w\, dt.$$

Da x_1, y_1, z_1 constant, und nur x, y, z veränderlich sind, so ergeben sich bei Ausführung der Variation δ nur drei Gleichungen. Diese lauten:

$$(10) \qquad \begin{aligned} -mx'' &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'}, \\ -my'' &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial y'}, \\ -mz'' &= \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial z'}, \end{aligned}$$

wo die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten. Multiplicirt man diese Gleichungen (10) mit $-x'$, $-y'$, $-z'$, und addirt dieselben sodann, so erhält man mit Rücksicht auf (6):

$$(11\text{a}) \qquad \begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} = &-\left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + y' \frac{\partial w}{\partial y} + z' \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &+ \left(x' \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'} + y' \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial y'} + z' \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial z'}\right), \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Schreibart:

$$(11\text{b}) \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\right) + \left(x' \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right).$$

Von anderer Seite her ergiebt sich nun, wenn man das effective Potential w (5) nach der Zeit differenzirt, und beachtet, dass dieses w nicht nur von x, y, z, sondern auch von x', y', z' abhängt, die Formel:

$$(12\text{a}) \qquad \frac{dw}{dt} = \left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\right) + \left(x'' \frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(12\text{b}) \qquad \begin{aligned} \frac{dw}{dt} = \left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\right) &+ \frac{d}{dt}\left(x' \frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right) \\ &- \left(x' \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Durch Addition von (11b) und (12b) folgt:

$$(13) \qquad \frac{d(\tau + w)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x' \frac{\partial w}{\partial x'} + y' \frac{\partial w}{\partial y'} + z' \frac{\partial w}{\partial z'}\right).$$

Nun ist nach (5): $w = u + v$, ferner u unabhängig von x', y', z', andererseits v ein homogener Ausdruck zweiten Grades von x', y', z'. Daher ist:

$$x' \frac{\partial w}{\partial x'} + y' \frac{\partial w}{\partial y'} + z' \frac{\partial w}{\partial z'} = x' \frac{\partial v}{\partial x'} + y' \frac{\partial v}{\partial y'} + z' \frac{\partial v}{\partial z'} = 2v.$$

Demnach geht die Gleichung (13) über in:

$$\frac{d(\tau + w)}{dt} = \frac{d(2v)}{dt}. \tag{14}$$

Hieraus aber folgt:

$$\tau + w - 2v = \text{Const.}, \tag{15}$$

oder weil $w = u + v$ ist:

$$\tau + u - v = \text{Const.}, \tag{16}$$

d. h. *Die lebendige Kraft, vermehrt um das statische, und vermindert um das motorische Potential bleibt während der Bewegung constant.*

Betrachtung eines beliebigen Punktsystemes.

Völlig Analoges lässt sich nun durchführen für ein System von beliebig vielen, etwa n Punkten, und zwar ganz gleichgültig, ob die Beweglichkeit des Systems eine freie ist, oder beschränkt ist durch irgend welche gegebenen Bedingungen. In Bezug auf diese letzteren mag jedoch vorausgesetzt werden, dass sie ausdrückbar sind durch eine Anzahl von Gleichungen, in welchen *nur die Coordinaten* der Punkte (nicht aber deren Geschwindigkeiten) sich vorfinden. Diese Gleichungen mögen bezeichnet werden mit

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \text{ etc. etc.} \tag{17}$$

Die lebendige Kraft des Systemes mag T, und das receptive Potential des Systemes Ω genannt werden. Es wird dann T eine Summe von n Gliedern sein, deren jedes die Form hat:

$$\tau = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{m}{2}(x'x' + y'y' + z'z'); \tag{18}$$

und andererseits wird Ω eine Summe von $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern sein, deren jedes, je zweien Punkten zugehörig, die Form hat:

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = u + v + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}. \tag{19}$$

Eine analoge Form wird demnach auch Ω selber besitzen, nämlich:

$$\Omega = W + \frac{d\mathfrak{W}}{dt} = U + V + \frac{d\mathfrak{W}}{dt}, \tag{20}$$

wo W das effective und $\frac{d\mathfrak{W}}{dt}$ das ineffective Potential des Systemes repräsentirt, und wo andererseits, was die beiden Bestandtheile von W anbelangt, U das statische und V das motorische Potential des Systemes bezeichnet.

Das effective Potential $W = U + V$ des Systemes besteht aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern von der Form $w = u + v$. Sind m und m_1 irgend zwei unter den Punkten des Systemes, r ihre Entfernung, ferner x, y, z und x_1, y_1, z_1 ihre Coordinaten, so wird das diesen beiden Punkten zugehörige Glied $w = u + v$ den Werth haben [vergl. die Formel (3)]:

$$\begin{aligned} & w = u + v, \\ (21\text{a}) \qquad & u = m m_1 \varphi(r) = m m_1 \varphi, \\ & v = m m_1 \left(\frac{d\psi(r)}{dt}\right)^2 = m m_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} & w = u + v, \\ (21\text{b}) \qquad & u = m m_1 \varphi, \\ & v = m m_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(x' - x_1') + \frac{\partial \psi}{\partial y}(y' - y_1') + \frac{\partial \psi}{\partial z}(z' - z_1')\right)^2. \end{aligned}$$

Für die Bewegung des Systemes würde, wenn seine Beweglichkeit eine völlig freie wäre, die Formel gelten:

$$\delta \int \mathsf{T}\, dt = \delta \int \Omega\, dt.$$

Da seine Beweglichkeit aber beschränkt ist durch die gegebenen Bedingungsgleichungen (17), so wird die genannte Formel zu ersetzen sein durch folgende:

$$(22) \qquad \delta \int \mathsf{T}\, dt = \delta \int (\Omega + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots)\, dt,$$

in welcher $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ anzusehen sind als unbekannte Functionen der Zeit. Setzt man nach (20): $\Omega = W + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$, so reducirt sich diese Formel auf:

$$(23) \qquad \delta \int \mathsf{T}\, dt = \delta \int (W + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots)\, dt.$$

Und hieraus ergeben sich nun, wenn man die Variation δ ausführt, $3n$ Differentialgleichungen, nämlich ebenso viele Gleichungen als veränderliche Grössen x, y, z vorhanden sind. Diejenigen dieser Gleichungen, welche dem Punkte m mit den Coordinaten x, y, z zugehören, lauten:

$$\begin{aligned} & -m x'' = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial x} + \cdots, \\ (24) \qquad & -m y'' = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial y} + \cdots, \\ & -m z'' = \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial z'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial z} + \cdots. \end{aligned}$$

Durch Multiplication mit $-x'$, $-y'$, $-z'$ und Addition, und mit Rücksicht auf die Bezeichnung (18) ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$(25)\qquad \frac{d\tau}{dt} = -\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y} + z'\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$
$$+\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + y'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y'} + z'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial z'}\right)$$
$$-\lambda_1\left(x'\frac{\partial B_1}{\partial x} + \cdots\right) - \lambda_2\left(x'\frac{\partial B_2}{\partial x} + \cdots\right) - \cdots.$$

Solcher Gleichungen können ebenso viele gebildet werden als Punkte vorhanden sind. Denkt man sich alle diese Gleichungen addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Bedingungen (17) folgende Formel:

$$(26)\qquad \frac{d\mathsf{T}}{dt} = -\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + \cdots\right) + \Sigma\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right).$$

Von anderer Seite her ergiebt sich, wenn man das von den Coordinaten und Geschwindigkeiten abhängende effective Potential W nach der Zeit differenzirt:

$$\frac{dW}{dt} = \Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + \cdots\right) + \Sigma\left(x''\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(27)\qquad \frac{dW}{dt} = \Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + \cdots\right) + \frac{d}{dt}\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right)$$
$$-\Sigma\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right).$$

Durch Addition von (26) und (27) folgt:

$$(28)\qquad \frac{d(\mathsf{T}+W)}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x'} + y'\frac{\partial W}{\partial y'} + z'\frac{\partial W}{\partial z'}\right).$$

Nun ist $W = U + V$, und wie aus (21b) erhellt, U unabhängig von den $3n$ Grössen x', y', z', andererseits V ein homogener Ausdruck zweiten Grades dieser $3n$ Grössen. Demnach wird:

$$\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x'} + y'\frac{\partial W}{\partial y'} + z'\frac{\partial W}{\partial z'}\right) = 2V.$$

Die Gleichung (28) geht daher über in:

$$(29)\qquad \frac{d(\mathsf{T}+W)}{dt} = \frac{d(2V)}{dt};$$

und hieraus folgt:

$$(30)\qquad \mathsf{T} + W - 2V = \text{Const.},$$

oder weil $W = U + V$ ist:

$$(31)\qquad \mathsf{T} + U - V = \text{Const.},$$

eine Formel, welche für $c = \infty$ d. i. für den Fall einer *momentanen* Fortpflanzung des Potentiales sich reducirt auf die wohl bekannte Formel $\mathsf{T} + U = \text{Const.}$ (Vergl. pag. 403.) Die allgemeine Formel (31) enthält den Satz:

Bei der Bewegung eines beliebigen Punktsystemes wird die Lebendige Kraft, vermehrt um das statische und vermindert um das motorische Potential beständig ein und denselben Werth behalten. Dabei ist es gleichgültig, ob die Beweglichkeit des Systemes eine freie ist, oder ob sie beschränkt ist durch irgend welche (die Coordinaten der Punkte betreffende) Bedingungen.

Bei der Ableitung dieses Satzes ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass in dem Punktsystem nur *innere* Kräfte thätig sind. Sollte ein aus den Punkten $m_1, m_2, \cdots m_n$ bestehendes System ausser seinen *inneren* Kräften auch noch gegebenen *äusseren* Kräften unterworfen sein, so werden sich immer irgend welche *feste Punkte* $M_1, M_2, \cdots M_p$ auffinden lassen, welche als die Ausgangspunkte jener letzteren Kräfte angesehen werden können. Das aus all' diesen $n + p$ Punkten bestehende System wird dann aber nur noch *inneren* Kräften unterworfen sein, und daher beherrscht werden von dem soeben aufgestellten Satz. Denn dass einige von jenen $n + p$ Punkten von gegebenen Bedingungen bis zur absoluten Unbeweglichkeit beschränkt sind, ist für die Anwendbarkeit des Satzes völlig gleichgültig.

Nachschrift.

Wenn man (wie das seit Newton fast allgemein geschieht) annimmt, dass *räumlich* getrennte Gegenstände unmittelbar auf einander wirken, so wird es ebenso gut auch zulässig sein, eine unmittelbare gegenseitige Wirkung zwischen Gegenständen anzunehmen, die *zeitlich* von einander getrennt sind; vorausgesetzt natürlich, dass eine solche Annahme zu ebenso glücklichen Consequenzen führt wie die erstere. Demgemäss bemerkt Herr Professer Weber, dem ich für seine gütige Mittheilung zu grösstem Dank verpflichtet bin, dass die von mir aufgestellte Hypothese $\left(\text{für den Fall } \varphi = \frac{1}{r}\right)$ sich so formuliren lasse:

„*Die von einem Massentheilchen herrührenden Potentialwerthe sind den Entfernungen umgekehrt proportional, und gelten für spätere Zeitmomente nach Proportion der Entfernung.* Der Grund, warum sie für spätere Zeitmomente gelten, *kann* in einer Fortpflanzung liegen, von der sich aber nur sprechen liesse unter Voraussetzung einer *höheren Mechanik* (wie z. B. von der Fortpflanzung der Luftwellen nur auf Grund der Mechanik der Luft), und woraus dann folgen würde, dass die Fortpflanzung in jedem Punkt des Mediums gestört und unterbrochen werden kann.“

Müsste die hier angeregte Frage, ob die zwischen *zeitlich* getrennten Gegenständen zu supponirende Einwirkung als etwas Primäres (nicht weiter Erklärbares) oder als etwas Secundäres (auf einfachere Vorgänge Zurückführbares) angesehen werden solle, *augenblicklich*

entschieden werden, so würde ich in der That der erstern Auffassung unbedenklich den Vorzug geben. Aber auch in diesem Fall dürfte die von mir gewählte Ausdrucksweise wenigstens als eine *bildliche* nicht ungeeignet, und somit *berechtigt* sein.

Tübingen, im Mai 1868.

Nachträgliche Bemerkungen des Verfassers im Jahre 1880.

Die *letzten Worte* der vorliegenden Schrift (pag. 433, 434) dürften *an und für sich* schon deutlich erkennen lassen, wie wenig zutreffend diejenigen Einwendungen waren, welche von *Clausius* im Jahre 1869 (in Poggend. Annal., Bd. 135, pag. 606) gegen den Inhalt der vorliegenden Schrift erhoben sind. Man vergleiche übrigens hierüber meinen Aufsatz in den Math. Annal., Bd. I, pag. 317—324.

Ferner zeigt ein flüchtiger Blick auf die *ersten Seiten* der vorliegenden Schrift (pag. 400—402), dass ich damals, im Jahre 1868, bei Verfassung dieser Schrift unbekannt war mit zwei in dieses Gebiet einschlagenden Betrachtungen von *Weber* und *Riemann*.

Die Weber'sche Betrachtung (eine kurze Notiz in Poggend. Annal., Bd. 73, pag. 229, vom Jahre 1848) *zeigt in einfacher Weise, dass bei Annahme des Weber'schen Grundgesetzes das Princip der lebendigen Kraft fortbesteht.* — Ich kann nur bedauern, dass mir diese Notiz damals unbekannt war; und habe übrigens in meinen späteren Publicationen (z. B. in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 11, 1874, pag. 115) nachträglich jene Weber'sche Betrachtung in das gehörige Licht zu stellen, mich angelegentlichst bemüht.

Andererseits enthalten die Riemann'schen Betrachtungen (vergl. das Hattendorff'sche Werk über Schwere, Elektricität und Magnetismus, Hannover bei Rümpler, 1876, pag. 316—336) *den Gedanken, ein elektrodynamisches Potential einzuführen, und aus diesem die elektrischen Kräfte durch Variation abzuleiten*, also einen Gedanken, der in der vorliegenden Schrift besonders betont, und in ansehnlichem Umfange entwickelt ist. Dass diese Riemann'schen Betrachtungen mir damals, im Jahre 1868, bei Verfassung der vorliegenden Schrift *unbekannt* waren, bedarf offenbar keiner Entschuldigung. Denn dieselben bilden allerdings (wie Hattendorff angiebt) einen Theil einer schon 1861 von Riemann in Göttingen gehaltenen Vorlesung, sind aber erst im Jahre 1876 gedruckt worden (in dem schon genannten Hattendorff'schen Werk).

Ob es unter sobewandten Umständen erlaubt ist, schlechtweg *Riemann* als Urheber dieses Gedankens zu bezeichnen, oder ob es nicht vielmehr gerecht sei, daneben auch *denjenigen* zu nennen, der unabhängig von Riemann auf denselben Gedanken kam, und denselben *zuerst* (und zwar in sorgfältiger Ausarbeitung) publicirte, — darüber mögen Andere entscheiden. Ich meinerseits glaube allerdings, dass wenn z. B. Herr *Clausius* in einem seiner letzten Aufsätze diesen Gedanken der Einführung eines elektrodynamischen Potentials und der Ableitung der Kräfte aus demselben durch Variation reproducirt, ohne dabei meiner Arbeiten *auch nur mit einer Silbe zu gedenken*, — diess namentlich bei denjenigen, welche in der betreffenden Literatur nur oberflächlich bewandert sind, leicht zu einer sehr falschen Auffassungsweise Veranlassung geben könnte.

Leipzig, im November 1880. N.

Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

Martin Krause in Rostock.

Die Grundzüge einer linearen Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung sind durch die Arbeiten von Hermite, Weber, Rohn und anderer Mathematiker als gegeben zu betrachten, indessen sind diese Theorien noch nicht zu derselben Ausbildung gelangt, wie die entsprechenden bei den elliptischen Functionen. Es tritt dieses besonders bei Anwendungen störend auf. Diese Lücke soll durch die vorliegende Arbeit nach bestimmter Richtung hin ausgefüllt werden.

Die Untersuchungen basiren auf der Zusammensetzung der allgemeinen linearen aus Transformationen einfachster Art, für welche das Problem als gelöst angenommen werden soll. Der Gedanke einer derartigen Zusammensetzung von Determinanten rührt von Kronecker her und ist speciell für die hyperelliptischen Functionen in dem Lehrbuche von Clebsch und Gordan verwerthet worden. Hier ist die Untersuchung noch etwas weiter geführt, ähnlich wie es Schläfli (Crelle 72, pag. 360 sequ.) für die elliptischen Functionen gemacht hat.

§ 1.

Es sei eine lineare Transformation vorgelegt,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

bei welcher zwischen den Coefficienten die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 &= 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 &= 0, \\ a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 &= 1, \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 &= 1, \end{aligned}$$

$$a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 = 0,$$
$$a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 = 0.$$

Wir nehmen an, dass die Diagonalglieder ungerade, die übrigen sämmtlich gerade seien, ferner dass a_0 und a_3 keinen gemeinsamen Theiler besitzen, endlich dass $a_0 \equiv 1 \bmod 4$ ist. Dann kann der Bruch: $\frac{a_0}{a_3}$ in einen Kettenbruch mit lauter geraden Theilnennern verwandelt werden, deren Anzahl eine gerade ist:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_3 l_1 + a_0^{(2)}, \\ a_3 &= a_0^{(2)} l_2 + a_0^{(3)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0^{2\varkappa-2} &= a_0^{2k-1}\, l_{2k-1} + 1, \\ a_0^{2\varkappa-1} &= l_{2k}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & a_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^{(1)} & b_1 & b_2 & b_3^{(1)} \\ c_0^{(1)} & c_1 & c_2 & c_3^{(1)} \\ d_0^{(1)} & d_1 & d_2 & d_3^{(1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{2k} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} l_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Grössen $b_0^{(1)} b_3^{(1)}$, $c_0^{(1)} c_3^{(1)}$, $d_0^{(1)} d_3^{(1)}$ sind durch einen kettenbruchartigen Algorithmus aus den Grössen $b_0 b_3$, $c_0 c_3$, $d_0 d_3$ entstanden, ferner bestehen zwischen den Elementen der reducirten Determinante Relationen analog den früheren.

Ferner folgt:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0^{(1)} & b_1 & b_2 & b_3^{(1)} \\ c_0^{(1)} & c_1 & c_2 & c_3^{(1)} \\ d_0^{(1)} & d_1 & d_2 & d_3^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 \\ c_0^{(1)} & c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 \\ d_0^{(1)} & d_1^{(1)} & d_2^{(1)} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & a_1 a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

und es ist:

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} c_2^{(1)} - c_1^{(1)} b_2^{(1)} &= 1, \\ b_0^{(1)} + b_1^{(1)} d_2^{(1)} - b_2^{(1)} d_1^{(1)} &= 0, \\ c_0^{(1)} + c_1^{(1)} d_2^{(1)} - c_2^{(1)} d_1^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Ferner folgt, dass $b_1^{(1)}$ und $c_2^{(1)}$ ungerade sind. Wir nehmen an, dass $b_1^{(1)} \equiv 1 \bmod 4$ ist.

Der Bruch $\frac{b_1^{(1)}}{b_2^{(1)}}$ kann dann in einen Kettenbruch mit einer geraden Anzahl von Theilnennern entwickelt werden, die sämmtlich gerade sind. Wir bezeichnen sie mit $m_1\, m_2 \cdots m_{2r}$. Den letzten Näherungswerth können und wollen wir gleich $\frac{c_1^{(1)}}{c_2^{(1)}}$ annehmen.

Somit wird:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 \\ c_0^{(1)} & c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 \\ d_0^{(1)} & d_1^{(1)} & d_2^{(1)} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^{(1)} & 1 & 0 & 0 \\ c_0^{(1)} & 0 & 1 & 0 \\ d_0^{(1)} & c_0^{(1)} & -b_0^{(1)} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_{2r} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ferner ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^{(1)} & 1 & 0 & 0 \\ c_0^{(1)} & 0 & 1 & 0 \\ d_0^{(1)} & c_0^{(1)} & -b_0^{(1)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_0^{(1)} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & c_0^{(1)} & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^{(1)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0^{(1)} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_0^{(1)} - c_0^{(1)} b_0^{(1)} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da überdies:

$$\begin{vmatrix} l_{2s} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{2s-1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{2s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{2s-1} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_{2s} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_{2s-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m_{2s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2s-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ist, so folgt, dass eine jede lineare Transformation der angegebenen Art sich zusammensetzen lässt aus den Transformationen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{2s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{2s-1} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m_{2s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2s-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Hierbei wollen und können wir annehmen, dass die Zahlen $l\ m\ r\ s\ t\ u$ ganze beliebige Zahlen bedeuten.

Von den beiden letzten Transformationen können wir absehen, da sie sich aus den ersten sechs ableiten lassen. Weitere Vereinfachungen, die thatsächlich möglich sind, sollen nicht vorgenommen werden.

Wäre die allgemeinste lineare Transformation zu Grunde gelegt worden, so hätten sich ähnliche Resultate ergeben.

§ 2.

Die allgemeinste Thetafunction von zwei Veränderlichen werde definirt durch:

$$\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mu\nu p q}$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}(\mu q + \nu p)} \Sigma(-1)^{mq+np} e^{\pi i[(2m+\mu)v_1 + (2n+\nu)v_2] + \frac{\pi i}{4}[(2m+\mu)^2\tau_{11} + 2(2m+\mu)(2n+\nu)(\tau_{12} + (2n+\nu)^2\tau_{22}]}$$

Auf diese wenden wir die vorhin definirten einfachen Transformationen an und nehmen das Resultat derselben bekannt an. Hierbei mögen in den einzelnen Fällen nur die Coefficienten hingeschrieben werden, welche von Null verschieden sind. Die Congruenzen sind nach dem Modul 2 zu nehmen.

(1) $\qquad a_0 = 1,\quad b_1 = 1,\quad c_2 = 1,\quad d_3 = 1,\quad d_0 = l_{2s-1},$

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mu\nu p q} = A e^{-\frac{i\pi}{4}\mu^2 l_{2s-1}} \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1}.$$

$$\mathfrak{m} = \mu \equiv \mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{n} = \nu \equiv \mathfrak{n}_1,\ \mathfrak{p} = p \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q} = q + l_{2s-1}\mu + l_{2s-1} \equiv \mathfrak{q}_1.$$

A ist ein Factor, welcher für alle Thetafunctionen derselbe ist.

(2) $\qquad a_0 = 1,\quad b_1 = 1,\quad c_2 = 1,\quad d_3 = 1,\quad a_3 = l_{2s}.$

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mu\nu p q}$$

$$= B e^{\frac{i\pi q}{2}[\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}]} e^{-\frac{i\pi}{4}[q^2 l_{2s} + 2q l_{2s}]} \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1},$$

$$\mathfrak{m} = \mu + l_{2s}q + l_{2s} \equiv \mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{n} = \nu \equiv \mathfrak{n}_1,\ \mathfrak{p} = p \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q} = q \equiv \mathfrak{q}_1.$$

(3) $\qquad a_0 = 1,\quad b_1 = 1,\quad c_2 = 1,\quad d_3 = 1,\quad c_1 = m_{2s-1},$

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mu\nu p q} = C e^{-\frac{i\pi}{4}\nu^2 m_{2s-1}} \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1},$$

$$\mathfrak{m} = \mu \equiv \mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{n} = \nu \equiv \mathfrak{n}_1,\ \mathfrak{p} = p + m_{2s-1}\nu + m_{2s-1} \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q} = q \equiv \mathfrak{q}_1.$$

$$(4) \qquad a_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad b_2 = m_{2s},$$

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mu\nu pq}$$
$$= D e^{\frac{i\pi}{2}\mathfrak{p}[\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}]} e^{-\frac{i\pi}{4}[p^2 m_{2s} + 2p m_{2s}]} \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1}.$$

$$\mathfrak{m} = \mu \equiv \mathfrak{m}_1, \quad \mathfrak{n} - \nu + m_{2s} p + m_{2s} \equiv \mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{p} = p \equiv \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{q} = q \equiv \mathfrak{q}_1.$$

$$(5) \quad a_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad a_1 = r, \quad c_3 = -r,$$

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mu\nu pq}$$
$$= E e^{\frac{i\pi}{2}\mathfrak{q}[\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}] + \frac{i}{2}[(\mu q + p\nu) - (\mathfrak{m}_1\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{p}_1\mathfrak{n}_1)]} \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1},$$

$$\mathfrak{m} = \mu + r\nu \equiv \mathfrak{m}_1, \ \mathfrak{n} = \nu \equiv \mathfrak{n}_1, \ \mathfrak{p} = p - rq \equiv \mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{q} = q \equiv \mathfrak{q}_1.$$

$$(6) \quad a_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad b_0 = s, \quad d_2 = -s.$$

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mu\nu pq}$$
$$= F e^{\frac{i\pi}{2}\mathfrak{p}[\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}]} e^{\frac{i\pi}{2}[(\mu q + p\nu) - (\mathfrak{m}_1\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{p}_1\mathfrak{n}_1)]} \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1},$$

$$\mathfrak{m} = \mu \equiv \mathfrak{m}_1, \quad \mathfrak{n} = \nu + s\mu \equiv \mathfrak{n}_1, \quad \mathfrak{p} = p \equiv \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{q} = q - sp \equiv \mathfrak{q}_1.$$

Hieraus folgt, dass es lediglich auf das Verhalten der Transformationscoefficienten in Bezug auf den Modul 8 ankommt. Dieses wollen wir untersuchen, bemerken indessen, dass die Untersuchungen für den Modul 16 analog bleiben.

Wir bezeichnen den letzten Näherungswerth des Kettenbruchs $\frac{a_0}{a_3}$ mit $\frac{\alpha_0}{\alpha_3}$, so wird: $a_0\alpha_3 - \alpha_0 a_3 = 1$, $\alpha_3 \equiv 1$ mod. 4.

Ferner lehrt ein Blick auf den angewandten Algorithmus, dass die Relationen stattfinden:

$$l_1 + l_3 + \cdots + l_{2k-1} \equiv \alpha_0 \text{ mod. } 8,$$
$$l_2 + l_4 + \cdots + l_{2k} \quad \equiv \alpha_3 \text{ mod. } 8,$$

$$1 + l_2 l_1 + l_4(l_1 + l_3) + \cdots + l_{2k} \quad (l_1 + l_3 + \cdots + l_{2k-1}) \equiv a_0 \text{ mod } 8,$$
$$1 + l_3 l_2 + l_5(l_2 + l_4) + \cdots + l_{2k-1}(l_2 + l_4 + \cdots + l_{2k-2}) \equiv a_3 \text{ mod } 8.$$

Genau so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{ll} b_0^{(r)} \equiv b_0\alpha_3 - b_3\alpha_0, & b_3^{(r)} \equiv b_3 a_0 - b_0 a_3, \\ c_0^{(r)} \equiv c_0\alpha_3 - c_3\alpha_0, & c_3^{(r)} \equiv c_3 a_0 - c_0 a_3, \\ d_0^{(r)} \equiv d_0\alpha_3 - d_3\alpha_0, & d_3^{(r)} \equiv d_3 a_0 - d_0 a_3, \\ b_1^{(1)} \equiv b_1 \quad - b_0 a_1, & b_2^{(1)} \equiv b_2 \quad - b_0 a_2, \\ c_1^{(1)} \equiv c_1 \quad - c_0 a_1, & c_2^{(1)} \equiv c_2 \quad - c_0 a_2, \end{array}\right\} \text{ mod. } 8.$$

Endlich wird:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 + m_3 + \cdots + m_{2r-1} \equiv c_1 - c_0 a_1 \\ m_2 + m_4 + \cdots + m_{2r} \quad \equiv b_2 - b_0 a_2 \end{array}\right\} \text{ mod. } 8.$$

Hiermit sind alle Daten für die Rechnung gegeben, indessen wollen wir dieselbe nicht durchführen, sondern einfach das Resultat, welches sich mit leichter Mühe finden lässt, angeben. Führt man die Operationen zunächst mechanisch aus, so ergiebt sich ein wenig übersichtliches Resultat. Gewisse Symmetrien müssen aber stattfinden. Unter Zuhülfenahme der gemachten Annahmen und der bestehenden Bedingungsgleichungen lassen sich solche mit leichter Mühe herstellen.

Setzen wir:

$$a = a_0 a_3 + a_1 a_2; \quad b = b_0 b_3 + b_1 b_3,$$

$$\begin{aligned} \omega = {} & \mu^2(a_0 d_0 + b_0 c_0) + \nu^2(a_1 d_1 + b_1 c_1) + p^2(a_2 d_2 + b_2 c_2) + q^2(a_3 d_3 + b_3 c_3) \\ & + 2\mu\nu(c_0 b_1 + d_0 a_1) + 2\mu p(c_0 b_2 + d_0 a_2) + 2\mu q(c_0 b_3 + d_0 a_3) \\ & + 2\nu p(c_1 b_2 + d_1 a_2) + 2\nu q(c_1 b_3 + d_1 a_3) + 2pq(c_2 b_3 - d_2 a_3) \\ & + 2\mu(c_0 b + d_0 a) + 2\nu(c_1 b + d_1 a) + 2p(c_2 b + d_2 a) + 2q(c_3 b + d_3 a), \end{aligned}$$

so wird für die angegebene Transformation:

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')_{\mu\nu pq}$$

$$= A\, e^{\frac{i\pi}{2}\mathfrak{q}[\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}] + \frac{i\pi}{2}\mathfrak{p}[\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}] + \frac{i\pi}{2}[(\mu q + p\nu) - (\mathfrak{m}_1\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{p}_1\mathfrak{n}_1)] - \frac{i\pi}{4}\omega}\, \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{n}_1\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= a_0\mu + a_1\nu + a_2 p + a_3 q + a_0 a_3 + a_1 a_2 \equiv \mathfrak{m}_1. \\ \mathfrak{n} &= b_0\mu + b_1\nu + b_2 p + b_3 q + b_0 b_3 + b_1 b_2 \equiv \mathfrak{n}_1, \\ \mathfrak{p} &= c_0\mu + c_1\nu + c_2 p + c_3 q + c_0 c_3 + c_1 c_2 \equiv \mathfrak{p}_1, \\ \mathfrak{q} &= d_0\mu + d_1\nu + d_2 p + d_3 q + d_0 d_3 + d_1 d_2 \equiv \mathfrak{q}_1. \end{aligned}$$

Diese Formel ist nur unter gewissen Beschränkungen abgeleitet. Betrachtungen einfacher Natur, auf welche hier um so weniger eingegangen zu werden braucht, als die hauptsächlichsten Schwierigkeiten überwunden sind, lehren, dass sie für die allgemeinste lineare Transformation richtig bleibt. —

Die lineare Transformation lässt eine grosse Reihe von Anwendungen zu. Wir wollen uns darauf beschränken eine solche kurz anzudeuten, indem wir uns vorbehalten auf andere bei anderer Gelegenheit näher einzugehen.

Zwischen den Thetafunctionen besteht eine Anzahl von Relationen, welche in drei Kategorien getheilt werden können. Die erste enthält biquadratische Relationen, die zweite lineare Relationen zwischen den Quadraten von vier Thetafunctionen, die dritte Relationen zwischen drei Producten von je zwei Thetafunctionen. Sämmtliche Gleichungen dieser drei Kategorien können aus je einer einzigen beliebigen durch lineare Transformation und Substitution um halbe Perioden hergeleitet werden, so dass also alle Relationen zwischen Thetafunctionen zweier Veränderlichen durch drei Formeln ersetzt werden können.

§ 3.

Es sollen jetzt die Resultate specialisirt werden. Von der Exponentialgrösse, welche eine achte Einheitswurzel ist, sehen wir dabei gänzlich ab. Wir wollen ferner Thetafunctionen mit anderen Indices einführen und zwar soll entsprechen den Indices:

0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011,
0111, 1011, 1101, 1110, 1111

der jedesmalige Index:

5, 01, 4, 34, 12, 23, 2, 02, 3, 03, 0, 04, 1, 13, 24, 14.

Nach dem Modul zwei sind im Ganzen 720 Transformationen zu unterscheiden. Wir brauchen deren nur 90 wirklich zu betrachten.

In der That, wie aus den angegebenen Gleichungen folgt, entsprechen der Transformation $a \quad b \; c \; d$ die Transformationen:

$$\begin{array}{rrrl} b & a & d & c, \\ -c & -d & a & b, \\ -d & -c & b & a, \\ a & -c & b & d, \\ b & -d & a & c, \\ -c & a & d & b, \\ -d & b & c & a. \end{array}$$

Für diese Transformationen gehen über die Thetafunctionen mit den Indices:

5	01	4	34	12	23	2	02	3	03	0	04	1	13	24	14

in die Thetafunctionen mit den Indices:

5	4	01	12	34	23	03	3	02	2	0	1	04	24	13	14
5	34	12	01	4	0	2	3	02	03	23	13	24	04	1	14
5	12	34	4	01	0	03	02	3	2	23	24	13	1	04	14
5	01	34	4	12	2	23	02	3	0	03	04	13	1	24	14
5	34	01	12	4	2	0	3	02	23	03	13	04	24	1	14
5	4	12	01	34	03	23	3	02	0	2	1	24	04	13	14
5	12	4	34	01	03	0	02	3	23	2	24	1	13	04	14

Weitere Vereinfachungen sollen nicht eingeführt werden.

Die 90 übrig beibenden Transformationen sind so gewählt, dass für die ersten 24, $a_0 \equiv 0$, $b_0 \equiv 0$, $c_0 \equiv 0$, $d_0 \equiv 1$ ist, für die zweiten 24, $a_0 \equiv 0$, $b_0 \equiv 0$, $c_0 \equiv 1$, $d_0 \equiv 1$, für die nächsten 12, $a_0 \equiv 0$, $b_0 \equiv 1$, $c_0 \equiv 1$, $d_0 \equiv 0$, für die nächsten 24, $a_0 \equiv 0$, $b_0 \equiv 1$, $c_0 \equiv 1$, $d_0 \equiv 1$, für die letzten sechs: $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$, $d_0 = 1$. Ferner sind die Zahlen so gewählt, dass durch sie eine lineare Transformation definirt wird.

a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	0	−1	−1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	0	−1	−1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	0	0	−1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	0	0	−1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	0	−1	−1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	0	−1	−1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	0	0	−1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	0	0	−1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	−1	−1	−1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	−1	−1	−1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	−1	0	−1	1	−1	1
0	0	0	1	0	0	−1	−1	0	1	−1	0	−1	1	−1	0
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	−1	−1	−1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	−1	−1	−1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	−1	0	−1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	−1	0	−1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	−1	0	0	1	−1	−1	−1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	−1	0	0	1	−1	−1	−1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	−1	0	0	1	0	−1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	−1	0	0	1	0	−1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	−1	0	0	0	1	−1	−1	−1	1	1
0	0	0	1	0	1	−1	0	0	0	1	−1	−1	−1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	−1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	−1	0	0	0
0	0	−1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	−1
0	0	−1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	−1
0	0	−1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	−1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	−1	1	1	1	1	−1	0	0	1	0	−1	0	0	1
0	0	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	−1	1	1	1	1	−1	0	0	1	0	−1	0	1	0

5	01	4	34	12	23	2	02	3	03	0	04	1	13	24	14
5	12	0	03	14	34	4	24	3	23	2	02	1	13	04	01
12	5	34	4	14	0	03	24	04	23	2	02	1	13	3	01
12	5	34	03	23	0	4	13	3	14	01	1	02	24	04	2
5	12	0	4	23	34	03	13	04	14	01	1	02	24	3	2
12	5	0	4	2	34	03	1	3	01	14	13	24	02	04	23
5	12	34	03	2	0	4	1	04	01	14	13	24	02	3	23
12	5	0	03	01	34	4	02	04	2	23	24	13	1	3	14
5	12	34	4	01	0	03	02	3	2	23	24	13	1	04	14
34	0	12	03	14	5	4	24	3	23	01	1	02	13	04	2
0	34	5	4	14	12	03	24	04	23	01	1	02	13	3	2
0	34	5	03	23	12	4	13	3	14	2	02	1	24	04	01
34	0	12	4	23	5	03	13	04	14	2	02	1	24	3	01
0	34	12	4	01	5	03	02	3	2	14	13	24	1	04	23
34	0	5	03	01	12	4	02	04	2	14	13	24	1	3	23
0	34	12	03	2	5	4	1	04	01	23	24	13	02	3	14
34	0	5	4	2	12	03	1	3	01	23	24	13	02	04	14
34	0	03	12	14	4	5	24	3	01	23	1	13	02	04	2
0	34	4	5	14	03	12	24	04	01	23	1	13	02	3	2
0	34	4	12	01	03	5	02	3	14	2	13	1	24	04	23
34	0	03	5	01	4	12	02	04	14	2	13	1	24	3	23
0	34	03	5	23	4	12	13	3	2	14	02	24	1	04	01
34	0	4	12	23	03	5	13	04	2	14	02	24	1	3	01
0	34	03	12	2	4	5	1	04	23	01	24	02	13	3	14
34	0	4	5	2	03	12	1	3	23	01	24	02	13	04	14
14	23	0	34	01	5	12	1	24	4	03	02	3	04	13	2
0	5	14	34	4	23	12	04	24	01	03	02	3	1	13	2
23	14	5	12	01	0	34	1	13	4	03	02	3	04	24	2
5	0	23	12	4	14	34	04	13	01	03	02	3	1	24	2
14	23	5	12	2	0	34	02	24	03	4	1	04	3	13	01
0	5	23	12	2	14	34	02	24	03	01	04	1	3	13	4
23	14	0	34	2	5	12	02	13	03	4	1	04	3	24	01
5	0	14	34	2	23	12	02	13	03	01	04	1	3	24	4

a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	0	1	0	1	1	−1
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	1	−1	0	1	0	−1
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	1	−1	0	1	−1	0
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	0	1	0	1	0	0
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	0	0	0	1	1	−1
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	−1	0	0	1	0	1
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	−1	0	0	1	1	0
0	0	−1	1	0	0	0	1	−1	−1	0	0	0	1	0	0
0	0	−1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	−1
0	0	−1	1	−1	−1	0	1	−1	−1	−1	1	−1	0	0	1
0	0	−1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	−1	1	−1	−1	0	1	−1	−1	−1	1	−1	0	1	0
0	0	−1	1	1	1	0	1	−1	−1	0	0	0	1	1	−1
0	0	−1	1	1	1	0	1	−1	−1	0	0	0	1	0	0
0	0	−1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	−1	0	0	−1
0	0	−1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	−1	0	−1	0
0	1	1	0	1	−1	−1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	−1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	−1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	−1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	−1	0	0	1	1	0	1	−1
0	1	1	0	0	1	1	1	−1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	−1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	−1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	−1	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	−1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	−1	1	0	1	0	0	−1	0	−1
0	1	1	1	0	0	0	−1	1	0	1	1	0	−1	0	−1

5	01	4	34	12	23	2	02	3	03	0	04	1	13	24	14
34	12	0	14	03	5	23	3	24	4	01	02	1	04	13	2
5	0	12	14	03	34	23	3	24	4	2	1	02	04	13	01
0	5	34	23	03	12	14	3	13	4	2	1	02	04	24	01
12	34	5	23	03	0	14	3	13	4	01	02	1	04	24	2
0	5	34	14	4	12	23	04	24	03	01	02	1	3	13	2
12	34	5	14	4	0	23	04	24	03	2	1	02	3	13	01
34	12	0	23	4	5	14	04	13	03	2	1	02	3	24	01
5	0	12	23	4	34	14	04	13	03	01	02	1	3	24	2
34	12	14	0	03	23	5	3	24	01	4	02	04	1	13	2
23	14	12	0	03	34	5	3	24	01	2	04	02	1	13	4
12	34	23	5	03	14	0	3	13	01	4	02	04	1	24	2
14	23	34	5	03	12	0	3	13	01	2	04	02	1	24	4
14	23	34	0	01	12	5	1	24	03	4	02	04	3	13	2
23	14	12	5	01	34	0	1	13	03	4	02	04	3	24	2
12	34	23	0	01	14	5	1	24	03	2	04	02	3	13	4
34	12	14	5	01	23	0	1	13	03	2	04	02	3	24	4
0	03	23	34	5	2	4	3	13	14	12	24	04	02	1	01
03	0	2	34	14	23	4	02	13	5	01	04	24	3	1	12
0	03	2	4	01	23	34	24	13	12	14	3	02	04	1	5
0	03	2	34	12	23	4	04	1	01	5	02	3	24	13	14
0	03	34	23	5	4	2	3	13	12	14	24	02	04	1	01
0	03	34	2	12	4	23	04	1	5	01	02	24	3	13	14
34	4	0	23	12	03	2	04	13	5	14	24	02	3	1	01
34	4	0	2	5	03	23	3	1	12	01	02	24	04	13	14
0	03	4	2	01	34	23	24	13	14	12	3	04	02	1	5
03	0	34	2	14	4	23	02	13	01	5	04	3	24	1	12
4	34	0	2	14	03	23	02	13	01	12	3	04	24	1	5
34	4	03	2	01	0	23	24	13	14	5	04	3	02	1	12
34	03	0	01	5	4	14	04	02	12	2	1	13	3	24	23
0	4	34	01	12	03	14	3	02	5	2	1	13	04	24	23
03	34	4	14	5	0	01	04	24	12	2	1	13	3	02	23
4	0	03	14	12	34	01	3	24	5	2	1	13	04	02	23

a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	−1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	−1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	−1	0	0	−1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	−1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	−1	0	−1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	−1	0	−1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	−1	0	0	−1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	−1	0	0	−1	−1	−1	−1
0	1	1	1	1	0	1	0	0	−1	−1	0	−1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	−1	−1	0	−1	−1	−1	−1
0	1	1	1	1	0	1	1	−1	0	−1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	−1	0	−1	0	0	−1	0	−1
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	−1	0	−1
0	1	1	1	1	0	1	1	0	−1	−1	0	−1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0	−1	−1	0	−1	0	0	−1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	−1	0	1	−1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	−1	0	1	−1	0	0	−1
1	1	1	1	−1	0	0	−1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	−1	0	0	−1	1	0	1	0	−1	−1	0	−1
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	−1	0	−1	0	−1	0	0	−1	−1	−1	0	−1
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	−1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	−1	1	−1	−1	0	−1

5	01	4	34	12	23	2	02	3	03	0	04	1	13	24	14
34	03	4	01	2	0	14	13	24	23	5	3	04	1	02	12
03	34	0	14	2	4	01	13	02	23	5	3	04	1	24	12
0	4	03	01	2	34	14	13	24	23	12	04	3	1	02	5
4	0	34	14	2	03	01	13	02	23	12	04	3	1	24	5
34	03	01	0	5	14	4	04	02	2	12	1	3	13	24	23
03	34	14	4	5	01	0	04	24	2	12	1	3	13	02	23
01	14	34	0	2	03	4	13	02	5	12	1	3	04	24	23
14	01	03	4	2	34	0	13.	24	5	12	1	3	04	02	23
01	14	34	4	5	03	0	04	24	2	23	3	1	13	02	12
14	01	03	0	5	34	4	04	02	2	23	3	1	13	24	12
34	03	01	4	2	14	0	13	24	5	23	3	1	04	02	12
03	34	14	0	2	01	4	13	02	5	23	3	1	04	24	12
01	14	0	34	2	4	03	13	02	12	5	1	04	3	24	23
14	01	4	03	2	0	34	13	24	12	5	1	04	3	02	23
0	4	01	34	12	14	03	3	02	2	5	1	04	13	24	23
4	0	14	03	12	01	34	3	24	2	5	1	04	13	02	23
4	0	14	34	2	01	03	13	02	12	23	04	1	3	24	5
0	4	01	03	2	14	34	13	24	12	23	04	1	3	02	5
14	01	4	34	12	0	03	3	02	2	23	04	1	13	24	5
01	14	0	03	12	4	34	3	24	2	23	04	1	13	02	5
2	03	0	5	01	23	14	04	02	12	34	1	13	24	3	4
03	2	23	14	01	0	5	04	3	12	34	1	13	24	02	4
2	03	5	0	01	14	23	04	02	34	12	1	24	13	3	4
03	2	14	23	01	5	0	04	3	34	12	1	24	13	02	4
5	14	2	0	34	03	23	13	02	01	12	1	24	04	3	4
14	5	03	23	34	2	0	13	3	01	12	1	24	04	02	4

Rostock im September 1880.

Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

Martin Krause in Rostock.

Aehnlich wie bei den elliptischen Functionen kann die Multiplication der hyperelliptischen Functionen einen doppelten Ausgangspunkt haben, die Transformationstheorie und das Additionstheorem. In der folgenden Arbeit soll das letztere zu Grunde gelegt werden. Zu gleicher Zeit sollen dabei mit Hülfe der linearen Transformation und der Substitution von halben Perioden eine Reihe von Coefficientenbeziehungen entwickelt werden.

§ 1.

Es sollen zunächst einige Sätze aufgestellt werden, welche mit leichter Mühe aus der Theorie der linearen Transformation und den mit derselben verbundenen Tabellen ersehen werden können. (Siehe die vorangehende Arbeit des Verfassers). Es mag die Thetafunction $\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_\alpha \nu_\alpha p_\alpha q_\alpha}$ der Einfachheit halber bezeichnet werden bald mit $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ bald mit (α), dann sollen den folgenden Betrachtungen Quadrupel von Thetafunctionen $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ zu Grunde gelegt werden, zwischen denen die Relationen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta &\equiv 0, \\ \nu_\alpha + \nu_\beta + \nu_\gamma + \nu_\delta &\equiv 0, \\ p_\alpha + p_\beta + p_\gamma + p_\delta &\equiv 0, \\ q_\alpha + q_\beta + q_\gamma + q_\delta &\equiv 0, \\ s_\alpha + s_\beta + s_\gamma + s_\delta &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \text{mod. } 2 \quad (s_j = \mu_j q_j + \nu_j p_j)$$

Es giebt im Ganzen 60 solcher Systeme, welche in zwei Kategorien zerfallen. Die eine enthält Quadrupel aus lauter geraden Thetafunctionen — an Zahl 15 — die andere Quadrupel aus zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunctionen — an Zahl 45.

Ist (α) (β) (γ) (δ) ein beliebiges System der einen oder der anderen

Art, so können alle Systeme derselben Art geschrieben werden: (a) (b) (c) (d), wenn die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned}
\mu_i &= a_0\mu_j + a_1\nu_j + a_2 p_j + a_3 q_j + a_0 a_3 + a_1 a_2,\\
\nu_i &= b_0\mu_j + b_1\nu_j + b_2 p_j + b_3 q_j + b_0 b_3 + b_1 b_2,\\
p_i &= c_0\mu_j + c_1\nu_j + c_2 p_j + c_3 q_j + c_0 c_3 + c_1 c_2,\\
q_i &= d_0\mu_j + d_1\nu_j + d_2 p_j + d_3 q_j + d_0 d_3 + d_1 d_2.
\end{aligned}$$

Dabei ist zu setzen an Stelle von $i : a, b, c, d$ an Stelle von $j : \alpha, \beta, \gamma, \delta$ und es bestehen zwischen den Grössen $a_0 a_1 \cdots d_3$ die bekannten Beziehungen.

I. Seien (α) (β) (γ) (δ) vier Functionen der definirten Art, (ε) eine beliebige andere, so können immer zwei derselben z. B. (α) und (β) derart bestimmt werden, dass (α) (β) (ε) und (γ) (δ) (ε) mit einer vierten eindeutig bestimmten Function (ζ) je ein System der vorgelegten Art bildet.

Beispiel.

Wir greifen das System heraus:

(2) (34) (01) (5).

Dann sind ebenfalls Systeme der definirten Art:

(2)(34)(4)(23); (2)(34)(24)(3); (2)(01)(0)(12); (2)(01)(1)(02);
(2)(5)(03)(14); (2)(5)(13)(04);
(01)(5)(4)(23); (01)(5)(24)(3); (34)(5)(0)(12); (34)(5)(1)(02);
(34)(01)(03)(14); (34)(01)(13)(04);

II. Sei ein Quadrupel aus lauter geraden Thetafunctionen vorgelegt, (α) (β) (γ) (δ), so giebt es 48 von einander verschiedene lineare Transformationen, welche, von achten Einheitswurzeln und der Reihenfolge abgesehen, dieses Quadrupel in sich selbst überführen. Dieselben bringen zweimal alle möglichen Combinationen hervor.

Beispiel.

Die Transformationen:

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
1)	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
2)	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	−1	1
3)	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	−1	1
4)	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
5)	0	0	−1	0	1	0	0	−1	1	0	0	0	0	1	−1	0

führen das Quadrupel (2) (34) (01) (5) von achten Einheitswurzeln abgesehen der Reihe nach über in:

(2) (34) (01) (5); (2) (34) (01) (5); (34) (2) (01) (5); (01) (34) (2) (5);
(5) (34) (01) (2).

III. Unter den definirten 48 Transformationen giebt es je acht, welche eine beliebige der 12 übrigen Thetafunctionen (ε) in eine beliebige andere derselben Art (gerade oder ungerade) überführen. Sind $(\alpha)\,(\beta)$ und $(\gamma)\,(\delta)$ aus dem vorgelegten Quadrupel die beiden Paare, welche mit (ε) und (ζ) ein System der definirten Art bilden, so führen die Transformationen, die (ε) in (ε) überführen, das Quadrupel $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ über in $(\beta)(\alpha)(\gamma)(\delta)$; $(\alpha)(\beta)(\delta)(\gamma)$; $(\gamma)(\delta)(\alpha)(\beta)$ und den daraus entspringenden Combinationen. Hierbei ist von achten Einheitswurzeln abgesehen.

Beispiel.

Die Transformationen 2, 3, 4, 5 und

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
6)	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
7)	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0

führen der Reihe nach die Function (0) von achten Einheitswurzeln abgesehen über in: (12) (03) (0) (4) (14) (23).

Die Transformation 4 und die Transformationen:

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
8)	-1	0	1	0	-1	-1	0	1	0	0	-1	0	0	0	1	-1
9)	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	1

führen (0) in (0) über und das Quadrupel (2) (34) (01) (5) in:

(01) (34) (2) (5); (2) (5) (01) (34); (34) (2) (5) (01).

IV. Es sei ein Quadrupel von zwei geraden und zwei ungeraden Thetafunctionen $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)\,(\delta)$ vorgelegt, dann giebt es 16 von einander verschiedene lineare Transformationen, welche, von achten Einheitswurzeln und der Reihenfolge abgesehen, dieses Quadrupel in sich selbst überführen. Es werden unter Rücksichtnahme darauf, dass gerade Thetafunctionen in gerade und ungerade in ungerade übergeführt werden, viermal die möglichen Combinationen hervorgebracht.

Beispiel.

Die Transformationen

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3
10)	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
11)	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	-1	1
12)	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
13)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	1	1	1
14)	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
15)	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1

führen das Quadrupel (01) (5) (3) (24) der Reihe nach über in:

(01)(5)(3)(24); (01)(5)(3)(24); (01)(5)(3)(24); (01)(5)(3)(24);
(01)(5)(24)(3); (5)(01)(3)(24).

V. Seien $(\varepsilon)(\zeta)$ und $(\varepsilon_1)(\zeta_1)$ die beiden Paare, welche mit dem geraden Paare des vorgelegten Quadrupels: (α) (β) ausser (γ) (δ) je ein System der definirten Art bilden, dann geht eine jede der vier Functionen (ε) (ζ) (ε_1) (ζ_1) durch vier Transformationen unter den definirten 16 in eine beliebige andere über. Dasselbe gilt von den vier übrigbleibenden geraden Thetafunctionen und von den ungeraden. Hierbei ist wiederum von achten Einheitswurzeln abgesehen.

Ein Beispiel für diesen Fall ist nach dem letzten leicht zu bilden.

In allen diesen Sätzen ist von dem allen Thetafunctionen gemeinsamen Factor, welcher bei der linearen Transformation auftritt, abgesehen.

§ 2.

Seien vier Thetafunctionen der definirten Art vorgelegt, so lassen sich bekanntlich die Quadrate aller Thetafunctionen linear durch die Quadrate derselben ausdrücken. Nehmen wir z. B. das Quadrupel (2) (34) (01) (5), so wird:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0^2(v_1, v_2)(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4) = {} & \vartheta_{03}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) - \vartheta_{03}^2 \vartheta_4^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \\
& - \vartheta_{14}^2 \vartheta_4^2 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{14}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2), \\
\vartheta_{03}^2(v_1, v_2)(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4) = {} & - \vartheta_{23}^2 \vartheta_0^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) + \vartheta_4^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \\
& + \vartheta_{12}^2 \vartheta_{23}^2 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{12}^2 \vartheta_4^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2), \\
\vartheta_4^2(v_1, v_2)(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4) = {} & - \vartheta_{14}^2 \vartheta_{12}^2 \vartheta_2^2(v_1, v_2) + \vartheta_{03}^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) \\
& + \vartheta_{14}^2 \vartheta_0^2 \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{03}^2 \vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

Die übrigen Ausdrücke sind aus diesen durch Substitution von halben Perioden abzuleiten.

Ferner folgt aus dem Additionstheorem der Satz, dass das Product

$$\vartheta_2(v_1 + u_1, v_2 + u_2)\, \vartheta_2(v_1 - u_1, v_2 - u_2)$$

sich als homogene Function zweiter Ordnung der Grössen

$$\begin{gathered}
\vartheta\ ^2(v_1, v_2),\ \vartheta_\beta^2(v_1, v_2),\ \vartheta_\gamma^2(v_1, v_2),\ \vartheta_\delta^2(v_1, v_2); \\
\vartheta_\alpha^2(u_1, u_2),\ \vartheta_\beta^2(u_1, u_2),\ \vartheta_\gamma^2(u_1, u_2),\ \vartheta_\delta^2(u_1, u_2)
\end{gathered}$$

ausdrücken lässt.

Nehmen wir wiederum das Quadrupel (2) (34) (01) (5) und setzen:

$$\begin{aligned}
a &= 2\vartheta_{34}^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2 + \vartheta_2^2[\vartheta_2^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4], \\
b &= 2\vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2 \vartheta_2^2 + \vartheta_{34}^2[\vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_2^4],
\end{aligned}$$

$$c = 2\vartheta_5^2\vartheta_2^2\vartheta_{34}^2 + \vartheta_{01}^2[\vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4 - \vartheta_2^4 - \vartheta_{34}^4],$$

$$d = 2\vartheta_2^2\vartheta_{34}^2\vartheta_{01}^2 + \vartheta_5^2[\vartheta_5^4 - \vartheta_2^4 - \vartheta_{34}^4 - \vartheta_{01}^4],$$

so wird:

$$\vartheta_2(v_1+u_1\; v_2+u_2)\;\; \vartheta_2(v_1-u_1\; v_2-u_2) \prod_{\varepsilon\varepsilon_1} (\vartheta_2^2 + \varepsilon\vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1\vartheta_{01}^2 + \varepsilon\varepsilon_1\vartheta_5^2)$$
$$= a[\vartheta_2^2(v_1, v_2)\vartheta_2^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)\vartheta_{34}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\vartheta_{01}^2(u_1, u_2)$$
$$+ \vartheta_5^2(v_1, v_2)\vartheta_5^2(u_1, u_2)]$$
$$+ b[\vartheta_2^2(v_1, v_2)\vartheta_{34}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)\vartheta_2^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\vartheta_5^2(u_1, u_2)$$
$$+ \vartheta_5^2(v_1, v_2)\vartheta_{01}^2(u_1, u_2)]$$
$$+ c[\vartheta_2^2(v_1, v_2)\vartheta_{01}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)\vartheta_5^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\vartheta_2^2(u_1, u_2)$$
$$+ \vartheta_5^2(v_1, v_2)\vartheta_{34}^2(u_1, u_2)]$$
$$+ d[\vartheta_2^2(v_1, v_2)\vartheta_5^2(u_1, u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)\vartheta_{01}^2(u_1, u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\vartheta_{34}^2(u_1, u_2)$$
$$+ \vartheta_5^2(v_1, v_2)\vartheta_2^2(u_1, u_2)].$$

$\varepsilon\; \pm 1$
$\varepsilon_1 : \pm 1.$

$$\vartheta_0(v_1+u_1, v_2+u_2)\vartheta_0(v_1-u_1, v_2-u_2)(\vartheta_0^4 - \vartheta_{12}^4)$$
$$= \vartheta_0^2[-\vartheta_2^2(v_1,v_2)\vartheta_2^2(u_1,u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\vartheta_{34}^2(u_1,u_2) - \vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\vartheta_{01}^2(u_1,u_2)$$
$$+ \vartheta_5^2(v_1,v_2)\vartheta_5^2(u_1,u_2)]$$
$$+ \vartheta_{12}^2[\;\vartheta_2^2(v_1,v_2)\vartheta_{01}^2(u_1,u_2) - \vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\vartheta_5^2(u_1,u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\vartheta_2^2(u_1,u_2)$$
$$- \vartheta_5^2(v_1,v_2)\vartheta_{34}^2(u_1,u_2)],$$

$$\vartheta_{03}(v_1+u_1, v_2+u_2)\vartheta_{03}(v_1-u_1, v_2-u_2)(\vartheta_{03}^4 - \vartheta_{14}^4)$$
$$= -\vartheta_{03}^2[-\vartheta_2^2(v_1,v_2)\vartheta_2^2(u_1,u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\vartheta_{34}^2(u_1,u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\vartheta_{01}^2(u_1,u_2)$$
$$- \vartheta_5^2(v_1,v_2)\vartheta_5^2(u_1,u_2)]$$
$$+ \vartheta_{14}^2[\;\vartheta_2^2(v_1,v_2)\vartheta_5^2(u_1,u_2) - \vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\vartheta_{01}^2(u_1,u_2) - \vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\vartheta_{34}^2(u_1,u_2)$$
$$+ \vartheta_5^2(v_1,v_2)\vartheta_2^2(u_1,u_2)],$$

$$\vartheta_{23}(v_1+u_1, v_2+u_2)\vartheta_{23}(v_1-u_1, v_2-u_2)(\vartheta_{23}^4 - \vartheta_4^4)$$
$$= \vartheta_{23}^2[-\vartheta_2^2(v_1,v_2)\vartheta_2^2(u_1,u_2) - \vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\vartheta_{34}^2(u_1,u_2) + \vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\vartheta_{01}^2(u_1,u_2)$$
$$+ \vartheta_5^2(v_1,v_2)\vartheta_5^2(u_1,u_2)]$$
$$+ \vartheta_4^2[\;\vartheta_2^2(v_1,v_2)\vartheta_{34}^2(u_1,u_2) + \vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\vartheta_2^2(u_1,u_2) - \vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\vartheta_5^2(u_1,u_2)$$
$$- \vartheta_5^2(v_1,v_2)\vartheta_{01}^2(u_1,u_2)].$$

Aus diesen Formeln sind die übrigen zwölf durch Substitution von halben Perioden abzuleiten.

Zu dem Multiplicationsproblem gelangt man, wenn an Stelle von v_1, v_2, u_1, u_2 resp. gesetzt wird: mv_1, mv_2, nv_1, nv_2.

Wie aus den angestellten Betrachtungen ersichtlich ist, reducirt sich dasselbe wesentlich auf die Betrachtung von

$$\vartheta_\alpha(mv_1, mv_2)\, \vartheta_\beta(mv_1, mv_2)\, \vartheta_\gamma(mv_1, mv_2)\, \vartheta_\delta(mv_1, mv_2).$$

Als speciellen Fall wählen wir wiederum das Quadrupel:

$$(2)\,(34)\,(01)\,(5).$$

Für denselben ergiebt sich:

$$\vartheta_2\vartheta_2(2v_1, 2v_2) \prod_{\varepsilon\,\varepsilon_1} (\vartheta_2^2 + \varepsilon\vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1\vartheta_{01}^2 + \varepsilon\varepsilon_1\vartheta_5^2)$$

$$\begin{aligned} &= a(\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) + \vartheta_5^4(v_1, v_2)) \\ &+ 2b(\vartheta_2^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\,\vartheta_5^2(v_1, v_2)) \\ &+ 2c(\vartheta_2^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{34}^2(v_1, v_2)) \\ &+ 2d(\vartheta_2^2(v_1, v_2)\,\vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{01}^2(v_1, v_2)). \end{aligned}$$

Eine interessante andere Gestalt nimmt diese Formel unter Berücksichtigung der Göpel'schen biquadratischen Relationen an. (Siehe Crelle 83, pag. 239). Im speciellen Falle lautet dieselbe:

$$\begin{aligned} 0 &= \vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) + \vartheta_5^4(v_1, v_2) \\ &+ \frac{2\vartheta_2\vartheta_{34}\vartheta_{01}\vartheta_5 \prod\limits_{\varepsilon\,\varepsilon_1}(\vartheta_2^2+\varepsilon\vartheta_{34}^2+\varepsilon_1\vartheta_{01}^2+\varepsilon\varepsilon_1\vartheta_5^2)\,\vartheta_2(v_1, v_2)\,\vartheta_{34}(v_1, v_2)\,\vartheta_{01}(v_1, v_2)\,\vartheta_5(v_1, v_2)}{(\vartheta_2^2\vartheta_{34}^2 - \vartheta_{01}^2\vartheta_5^2)(\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2 - \vartheta_{34}^2\vartheta_5^2)(\vartheta_2^2\vartheta_5^2 - \vartheta_{34}^2\vartheta_{01}^2)} \\ &- \frac{\vartheta_2^4+\vartheta_{34}^4-\vartheta_{01}^4-\vartheta_5^4}{\vartheta_2^2\vartheta_{34}^2-\vartheta_{01}^2\vartheta_5^2}(\vartheta_2^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{34}^2(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\,\vartheta_5^2(v_1, v_2)) \\ &- \frac{\vartheta_2^4+\vartheta_{01}^4-\vartheta_5^4-\vartheta_{34}^4}{\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2-\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2}(\vartheta_2^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{01}^2(v_1, v_2) + \vartheta_5^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{34}^2(v_1, v_2)) \\ &- \frac{\vartheta_2^4+\vartheta_5^4-\vartheta_{34}^4-\vartheta_{01}^4}{\vartheta_2^2\vartheta_5^2-\vartheta_{34}^2\vartheta_{01}^2}(\vartheta_2^2(v_1, v_2)\,\vartheta_5^2(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^2(v_1, v_2)\,\vartheta_{01}^2(v_1, v_2)). \end{aligned}$$

Mit ihrer Hülfe wird:

$$\begin{aligned} \vartheta_2(2v_1, 2v_2) = \vartheta_2 \Bigg[&\frac{\vartheta_2^2(v_1,v_2)\,\vartheta_{34}^2(v_1,v_2)+\vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\,\vartheta_5^2(v_1,v_2)}{\vartheta_2^2\vartheta_{34}^2-\vartheta_{01}^2\vartheta_5^2} \\ &+ \frac{\vartheta_2^2(v_1,v_2)\,\vartheta_{01}^2(v_1,v_2)+\vartheta_5^2(v_1,v_2)\,\vartheta_{34}^2(v_1,v_2)}{\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2-\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2} \\ &+ \frac{\vartheta_2^2(v_1,v_2)\,\vartheta_{01}^2(v_1,v_2)+\vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\,\vartheta_{01}^2(v_1,v_2)}{\vartheta_2^2\vartheta_5^2-\vartheta_{34}^2\vartheta_{01}^2} \Bigg] \\ &+ \frac{-2a\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{01}\vartheta_2(v_1,v_2)\,\vartheta_{34}(v_1,v_2)\,\vartheta_{01}(v_1,v_2)\,\vartheta_5(v_1,v_2)}{(\vartheta_2^2\vartheta_{34}^2-\vartheta_{01}^2\vartheta_5^2)(\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2-\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2)(\vartheta_2^2\vartheta_5^2-\vartheta_{34}^2\vartheta_{01}^2)}. \end{aligned}$$

Die Formeln für $\vartheta_{34}(2v_1\, 2v_2)$ $\vartheta_{01}(2v_1\, 2v_2)$ $\vartheta_5(2v_1\, 2v_2)$ sind hieraus durch lineare Transformation abzuleiten.

Die Formeln für die Multiplication mit 3 gestalten sich complicirter. Eine der einfachsten Formen ist folgende.

Wir setzen:

$$\vartheta_2^2(v_1, v_2)\ \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\ \vartheta_5^2(v_1, v_2) = B;$$
$$\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) - \vartheta_5^4(v_1, v_2) = B'.$$
$$\vartheta_2^2(v_1, v_2)\ \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) - \vartheta_5^2(v_1, v_2)\ \vartheta_{34}^2(v_1, v_2) = C;$$
$$\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) - \vartheta_5^4(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) = C'.$$
$$\vartheta_2^2(v_1, v_2)\ \vartheta_5^2(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^2(v_1\, v_2)\ \vartheta_{01}^2(v_1, v_2) = D;$$
$$\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_5^4(v_1, v_2) - \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) - \vartheta_{01}^4(v_1, v_2) = D'.$$

Für die Nullwerthe der Argumente mag an Stelle von B, C, D, B', C', D' gesetzt werden. $B_0, C_0, D_0, B_0', C_0', D_0'$. Dann wird:

$$\vartheta_2(3v_1, 3v_2)\ \vartheta_2(v_1, v_2) \prod_{\varepsilon\varepsilon_1} (\vartheta_2^2 + \varepsilon\vartheta_{34}^2 + \varepsilon_1\vartheta_{01}^2 + \varepsilon\varepsilon_1\vartheta_5^2)$$
$$= \vartheta_2^2(v_1, v_2)\Big[\prod_{\varepsilon\varepsilon_1}(\vartheta_2^2(v_1,v_2) + \varepsilon\vartheta_{34}^2(v_1,v_2) + \varepsilon_1\vartheta_{01}^2(v_1,v_2) + \varepsilon\varepsilon_1\vartheta_5^2(v_1,v_2))$$
$$- 4(\vartheta_{34}^4(v_1, v_2)B' + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2)C' + \vartheta_5^4(v_1, v_2)D')$$
$$+ 16\vartheta_2^2(v_1,v_2)\ \vartheta_{34}^2(v_1,v_2)\ \vartheta_{01}^2(v_1,v_2)\ \vartheta_5^2(v_1,v_2)\Big]$$
$$+4\left[\frac{\vartheta_{34}^2(v_1,v_2)B^2B_0'}{B_0} + \frac{\vartheta_{01}^2(v_1,v_2)C^2C_0'}{C_0} + \frac{\vartheta_5^2(v_1,v_2)D^2D_0'}{D_0}\right]$$
$$-4\vartheta_{34}^2(v_1, v_2)\vartheta_{01}^2(v_1, v_2)\vartheta_5^2(v_1, v_2)[\vartheta_2^4(v_1, v_2) + \vartheta_{34}^4(v_1, v_2) + \vartheta_{01}^4(v_1, v_2)$$
$$+ \vartheta_5^4(v_1, v_2)].$$

Unter Zuhülfenahme der vorhin gebrauchten Göpel'schen Relation zeigt sich das Resultat, dass auch die rechte Seite den Factor $\vartheta_2(v_1, v_2)$ besitzt, so dass $\vartheta_2(3v_1, 3v_2)$ eine ganze homogene Function 9ter Ordnung der Grössen $\vartheta_2(v_1, v_2)\ \vartheta_{34}(v_1, v_2)\ \vartheta_{01}(v_1, v_2)\ \vartheta_5(v_1, v_2)$ ist.

Durch Substitution von halben Perioden oder durch lineare Transformation können hieraus die Formeln für $\vartheta_{34}(3v_1, 3v_2)$, $\vartheta_{01}(3v_1, 3v_2)$ $\vartheta_5(3v_1, 3v_2)$ entwickelt werden.

Hieraus folgt mit Hülfe weniger Schlüsse ganz allgemein der Lehrsatz:

Bilden die geraden Thetafunctionen (α), (β), (γ), (δ) *ein Quadrupel der ursprünglich vorgelegten Art, so sind die Functionen* $\vartheta_\alpha(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\beta(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\gamma(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\delta(mv_1, mv_2)$ *ganze homogene Functionen* $m^{2\text{ter}}$ *Ordnung der Grössen* $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$, *deren Coefficienten rationale Functionen der Functionen* ϑ_α, ϑ_β, ϑ_γ, ϑ_δ *sind.*

Bilden die beiden geraden Functionen (α), (β) *mit den ungeraden Functionen* (γ), (δ) *ein Quadrupel der vorgelegten Art und sind* (ε), (ζ), (η), $(\varkappa)$ *die vier geraden Thetafunctionen, welche aus ihnen durch Substitution von halben Perioden hervorgehen, so sind die Functionen* $\vartheta_\alpha(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\beta(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\gamma(mv_1, mv_2)$, $\vartheta_\delta(mv_1, mv_2)$ *homogene ganze Functionen* $m^{2\text{ter}}$ *Ordnung der Grössen* $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$, *deren Coefficienten rationale Functionen von* ϑ_ε, ϑ_ζ, ϑ_η, $\vartheta_\varkappa$ *sind.*

Hieraus wiederum folgt der Lehrsatz:

Ist (α), (β), (γ), (δ) *ein beliebiges Quadrupel der vorgelegten Art,* (ε) *eine beliebige Thetafunction, so ist das Product*

$$\vartheta_\varepsilon((m+n)v_1,\ (m+n)v_2),\ \vartheta_\varepsilon((m-n)v_1,\ (m-n)v_2)$$

eine ganze homogene Function $2(m^2+n^2)^{\text{ter}}$ *Ordnung der Grössen* $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$, $\vartheta_\delta(v_1, v_2)$.

Auch in diesem Falle lassen sich für die Coefficienten specielle Sätze angeben, indessen sehen wir von ihrer Aufstellung ab.

§ 3.

Aus den Sätzen des ersten Paragraphen und durch Substitution von halben Perioden kann eine grosse Reihe von Coefficientenbeziehungen unmittelbar hergestellt werden. In jedem speciellen Falle sind dieselben mit Hülfe der in der citirten Arbeit angegebenen Tabelle mit leichter Mühe zu verificiren. Es sollen diese Beziehungen nicht ausführlich aufgestellt werden. Wir beschränken uns darauf, die Interpretation der angeführten Sätze an einem Beispiele klar zu machen.

Mögen die vier geraden Functionen (α), (β), (γ), (δ) ein Quadrupel der definirten Art bilden, so können wir setzen:

$$\vartheta_\alpha[(m+n)v_1,\ (m+n)v_2]\ \vartheta_\alpha(m-n),\ v_1(m-n)v_2]$$

$$=\sum f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{abcd}\vartheta_\alpha{}^a(v_1, v_2)\,\vartheta_\beta{}^b(v_1, v_2)\,\vartheta_\gamma{}^c(v_1, v_2)\,\vartheta_\delta{}^d(v_1, v_2).$$

Die achten Wurzeln sind in jedem speciellen Falle eindeutig bestimmt, sollen aber aus Gründen, die aus dem Früheren hervorgehen, unbestimmt gelassen werden.

Sind dann m und n einander congruent nach dem Modul 2, so ist:

$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{abcd}=j_1 f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{acbd}.$$
$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8}\right)_{abcd}=j_2 f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{adcb}.$$
$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{abcd}=j_3 f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{badc}.$$
$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{abcd}=j_4 f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{cdab}.$$

Sind dagegen m und n einander nicht congruent nach dem Modul 2, so folgen die Beziehungen:

$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{abcd}=j_1' f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{acbd}.$$
$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8}\right)_{abcd}=j_2' f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{adcb}.$$
$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{abcd}=j_3' f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8}\right)_{abcd}.$$
$$f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8}\right)_{abcd}=j_4' f\left(\sqrt[8]{\vartheta_\gamma^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\delta^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\alpha^8},\ \sqrt[8]{\vartheta_\beta^8}\right)_{abcd}.$$

Die Grössen j sind achte Einheitswurzeln. Die achten Wurzeln links und rechts können von einander verschieden sein.

Rostock im October 1880.

Auszug aus einem Brief an die Redaction der Annalen.

Von

von Gall in Mainz.

In dem von mir p. 149 des 17. Annalenbandes veröffentlichten System der binären Form 8. Ordnung sind drei von Herrn Sylvester als irreducibel erklärte Formen in Folge eines Versehens als überflüssig bezeichnet worden. Pag. 37 ist nämlich bei der Entwickelung der Covariante H''_Δ die unerlaubte Entwickelung $\begin{pmatrix} f & f_\Delta & k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ unterlaufen. Obgleich das hieraus gefolgerte Ausfallen derselben aus allgemeinen pag. 144 entwickelten Gründen erhalten bleibt, so sind die Folgerungen, die durch Verwerthung dieser Entwickelung auf pag. 45 und pag. 151 gezogen wurden, und die gerade zur Ausscheidung der drei genannten Formen führten, hinfällig. Die drei von Herrn Sylvester geforderten Formen sind die beizubehaltenden Covarianten

$$C_7^{\,8} = \Theta_{kk}; \quad C_9^{\,2} = \Theta_{kkk}; \quad C_{11}^{\,2} = \Theta_{kkk2}.$$

Mainz, October 1880.

Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden.

Von

H. Schubert in Hamburg.

Die Methode der neueren synthetischen Geometrie erfährt eine fruchtbare Erweiterung, wenn ausser der projectiven oder bilinearen Verwandtschaft auch die trilineare Verwandtschaft*) als Forschungsinstrument benutzt wird. Die Theorie dieser Verwandtschaft ist in der vorliegenden Abhandlung, zunächst für drei einstufige Grundgebilde**), kurz skizzirt. Von dem neu gewonnenen Gesichtspunkte aus erkennt man sofort einige Resultate für die Geometrie der allgemeinen Fläche dritten Grades.

§ 1.

Definition.

Drei einstufige Grundgebilde g, g', g'' sollen zu einander *trilinear* heissen, wenn ihre Elemente einen derartigen Zusammenhang haben, dass man erst auf zweien von den drei Grundgebilden je ein Element willkürlich annehmen muss, um dadurch auf dem dritten Grundgebilde ein einziges entsprechendes Element hervorzurufen, und wenn ausserdem dieser Zusammenhang algebraisch ist, d. h. durch eine Gleichung von der Form:

$$\begin{aligned} xx'x'' + a\cdot x'x'' + a'\cdot x''x + a''\cdot xx' \\ + b\cdot x + b'\cdot x' + b''\cdot x'' = C \end{aligned}$$

dargestellt werden kann, wo $a, a', a'', b, b', b'', C$ 7 Constante sind, und wo x, x', x'' 3 Veränderliche sind, welche beziehungsweise auf

*) Ich erwähnte dieselbe schon in Crelle's Journal, Bd. 88, p. 342 unter dem Namen Ein-ein-ein-Deutigkeit.

**) Zu der trilinearen Beziehung zwischen drei zweistufigen Grundgebilden steigt man dann in derselben Weise auf, wie von der projectiven Beziehung zur Collineation oder Correlation.

den drei Grundgebilden g, g', g'' die Lage der veränderlichen Elemente bestimmen.

Aus dieser Definition und der analogen Definition für die projective Verwandtschaft ergiebt sich unmittelbar, dass drei Grundgebilde h, h', h'' trilinear sind, wenn sie beziehungsweise dreien trilinearen Grundgebilden g, g', g'' projectiv sind.

Der einfachste Fall einer trilinearen Beziehung entsteht auf drei geraden Punktreihen dadurch, dass man ausserhalb derselben einen festen Punkt annimmt, und als zusammengehörig immer solche 3 Punkte betrachtet, deren Verbindungsebene durch diesen festen Punkt geht. Liegen specieller die drei geraden Punktreihen in einer und derselben Ebene, so wird die trilineare Beziehung von der Lage des festen Punktes x unabhängig, indem immer die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte auf zweien von den drei Geraden die dritte Gerade in dem entsprechenden Punkte schneidet. Wir nennen dann die drei geraden Punktreihen *geradlinigt* auf einander bezogen. Die geradlinigte Beziehung, welche unter den trilinearen Beziehungen dieselbe fundamentale Rolle spielt, wie die perspective Verwandtschaft unter den projectiven Verwandtschaften, giebt das bequemste Mittel an die Hand, um allgemeinere, trilineare Beziehungen auf drei gegebenen Grundgebilden festzustellen. Man hat zu diesem Zwecke nur zu jedem Grundgebilde eine projective gerade Punktreihe irgendwie zu construiren, und die erhaltenen drei Geraden geradlinigt auf einander zu beziehen.

Während die projectiven Beziehungen im allgemeinen Gebilde zweiten Grades erzeugen, so führen die trilinearen Beziehungen zu Gebilden *dritten* Grades. Während z. B. zwei projective Ebenenbüschel durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen eine Fläche zweiten Grades erzeugen, so liefern drei trilineare Ebenenbüschel durch die Schnittpunkte aller möglichen Tripel entsprechender Ebenen die sämmtlichen Punkte einer *Fläche dritten Grades.* Denn das Correspondenzprincip ergiebt, dass jede Gerade des Raumes dreimal einen Punkt enthalten muss, in welchem entsprechende Ebenen sich schneiden.

§ 2.

Die sechs singulären Elemente jeder trilinearen Beziehung.

Auf den drei Geraden g, g', g'' sei irgendwie eine trilineare Beziehung zwischen ihren Punkten festgestellt. Dadurch gehören ∞^2 mal drei Punkte auf den drei Geraden einander zu. Je drei so einander zugehörige Punkte mögen immer X, X', X'' heissen. Wenn man dann auf jeder der drei Geraden zwei Fundamentalpunkte annimmt, und beziehungsweise mit x, x', x'' das Verhältniss bezeichnet, in welchem immer auf g, g' oder g'' der Punkt X, X' oder X'' die Strecke

zwischen den Fundamentalpunkten, auch dem Vorzeichen nach, theilt, so muss zwischen x, x', x'' eine trilineare Gleichung bestehen. Dieselbe heisse:

$$(1) \qquad \begin{aligned} xx'x'' + a \cdot x'x'' + a' \cdot x''x + a'' \cdot xx' \\ + b \cdot x + b' \cdot x' + b'' \cdot x'' = C. \end{aligned}$$

Rechnet man eine der drei Variabeln x, x', x'' aus dieser Gleichung aus, und setzt man dann von dem erhaltenen Bruche sowohl den Zähler wie den Nenner gleich null, so bekommt man zwei Gleichungen zwischen zwei Variabeln, welche durch zwei Werthepaare befriedigt werden. Es kommt demnach immer zweimal vor, dass einem Punkte auf einer von den drei Geraden und einem zugeordneten Punkte auf einer zweiten Geraden *jeder* Punkt auf der dritten Geraden entspricht. Zwei so zugeordnete Punkte zweier Geraden, denen auf der dritten Geraden jeder Punkt entspricht, wollen wir ein *singuläres Paar* und jeden einzeln *singulär* nennen. Es existiren also im ganzen auf den drei Geraden 6 singuläre Paare. Dieselben bestehen jedoch nicht aus 12, sondern nur aus 6 singulären Punkten, wie die folgende Rechnung ergiebt. Man erhält aus Gleichung (1):

$$x'' = -\frac{a''xx' + bx + b'x' - C}{xx' + a'x + ax' + b''}.$$

Setzt man Zähler und Nenner dieses Bruches gleich null und eliminirt x', so kommt:

$$(2) \qquad (x + a) \cdot (bx - C) - (a'x + b'')(a''x + b') = 0.$$

Auf ganz dieselbe Gleichung kommt man aber auch, wenn man erst x' ausrechnet, von dem erhaltenen Bruche Zähler und Nenner gleich null setzt, und dann x'' eliminirt. Daraus ergiebt sich, dass jede der drei Geraden nur zwei singuläre Punkte enthält, indem jeder singuläre Punkt zweien singulären Paaren angehört. Ferner findet man bei Ausführung der Rechnung, dass immer diejenigen beiden Punkte, welche mit einem und demselben Punkte ein singuläres Paar bilden, unter sich kein singuläres Paar constituiren. Es ist desshalb zweckmässig, für die singulären Punkte die folgende Bezeichnung einzuführen. Man nenne p und q die beiden auf g liegenden, singulären Punkte, q' und q'' diejenigen, welche mit p ein singuläres Paar bilden, dagegen p' und p'' diejenigen, welche mit q ein singuläres Paar bilden, natürlich so, dass p' und q' auf g', p'' und q'' auf g'' liegen. Durch diese Bezeichnung erreicht man, dass *immer* ein singuläres Paar constituirt wird durch je zwei auf verschiedenen Geraden liegende Punkte, welche mit *verschiedenen* Buchstaben bezeichnet sind, und dass immer zwei mit denselben Buchstaben bezeichnete Punkte kein singuläres Paar bilden. Ein singuläres Paar bilden also:

$$p \text{ und } q', \quad p' \text{ und } q'', \quad p'' \text{ und } q,$$
$$q \text{ und } p', \quad q' \text{ und } p'', \quad q'' \text{ und } p;$$

dagegen bilden kein singuläres Paar:

$$p \text{ und } p', \quad p' \text{ und } p'', \quad p'' \text{ und } p,$$
$$q \text{ und } q', \quad q' \text{ und } q'', \quad q'' \text{ und } q.$$

Da die eben besprochenen Vorkommnisse durch projective Transformation erhalten bleiben, so können wir alles, was wir eben bei drei geraden Punktreihen hinsichtlich der singulären Elemente festgestellt haben, ohne Weiteres auf irgend welche drei trilinear bezogene Grundgebilde übertragen.

Beispielsweise suchen wir noch die sechs singulären Punkte bei den oben erwähnten, specielleren, trilinearen Beziehungen auf. Entsprechen sich auf drei Geraden immer je drei Punkte, deren Verbindungsebene durch einen festen Punkt geht, so erhält man die sechs singulären Punkte dadurch, dass man jede der drei Geraden mit dem festen Punkte durch eine Ebene verbindet, und dann die Schnittpunkte dieser Ebene mit den beiden andern Geraden aufsucht. Wenn ferner drei in derselben Ebene befindliche Geraden g, g', g'' geradlinigt auf einander bezogen sind, so fallen die singulären Punkte in die drei Ecken des von g, g', g'' gebildeten Dreiecks, und zwar entweder p' und q'' beide in die Gegenecke von g, p'' und q beide in die Gegenecke von g', p und q' beide in die Gegenecke von g'', oder auch p'' und q' in die Gegenecke von g, p und q'' in die Gegenecke von g', p' und q in die Gegenecke von g''. In beiden Fällen wird die Unbestimmtheit des Punktes, welcher einem singulären Paare entspricht, dreimal dadurch hervorgerufen, dass die beiden, das Paar constituirenden Punkte zusammenfallen, und dreimal dadurch, dass sie beide in diejenige Gerade fallen, auf welcher der entsprechende Punkt liegen soll.

§ 3.

Die Doppelverhältnissrelationen bei der trilinearen Beziehung.

Die Gleichung (1), bei deren Aufstellung über die Lage der beiden Fundamentalpunkte jeder Geraden noch keine Disposition getroffen wurde, vereinfacht sich sehr, wenn man die singulären Punkte zu Fundamentalpunkten wählt. Dabei sollen dann x, x', x'' beziehungsweise für die Punkte X, X', X'' die Streckenverhältnisse:

$$\frac{Xp}{Xq}, \quad \frac{X'p'}{X'q'}, \quad \frac{X''p''}{X''q''}$$

bedeuten. Fällt nun X in den Punkt p, X' in q', so muss der Punkt X'' unbestimmt werden, d. h. es muss für $x = 0$ und $x' = \infty$,

x'' vieldeutig werden. Hieraus folgt aber, dass $a = 0$ und $b' = 0$ sein muss. Ebenso erkennt man, dass $a = 0$ und $b'' = 0$ sein muss, indem man X mit p und X'' mit q'' zusammenfallen lässt. Analog ergiebt sich, dass auch die Constanten a', a'', b den Werth null haben. Daraus folgt:

$$(2) \qquad x \cdot x' \cdot x'' = C.$$

Ist Y, Y', Y'' ein zweites Tripel entsprechender Punkte, für welches y, y', y'' die x, x', x'' analogen Brüche sind, so ist auch:

$$y \cdot y' \cdot y'' = C.$$

Also kommt:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} \cdot \frac{x''}{y''} = 1,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(4) \qquad \left(\frac{Xp}{Xq} : \frac{Yp}{Yq}\right) \cdot \left(\frac{X'p'}{X'q'} : \frac{Y'p'}{Y'q'}\right) \cdot \left(\frac{X''p''}{X''q''} : \frac{Y''p''}{Y''q''}\right) = 1.$$

Dieses Resultat lässt sich ausdrücken, wie folgt:

Bei einer trilinearen Beziehung zwischen drei geraden Punktreihen sind die sechs singulären Punkte und zwei Tripel entsprechender Punkte a, a', a'', b, b', b'' in ihrer Lage zu einander derartig von einander abhängig, dass das Product der drei Doppelverhältnisse, welche auf den drei Geraden durch die dreimal vier Punkte hervorgerufen werden, gleich 1 ist; und zwar ist bei Festhaltung der oben für die singulären Punkte eingeführten Bezeichnung und der üblichen Bezeichnung des Doppelverhältnisses von vier Elementen:

$$(5) \qquad (pqab) \cdot (p'q'a'b') \cdot (p''q''a''b'') = 1.$$

Fällt speciell a mit b zusammen, so ist $(pqab) = 1$, also

$$(p'q'a'b') = (q''p''a''b''),$$

eine Relation, welche auch daraus folgt, dass dann der Coincidenzpunkt von a und b mit p' und q'', mit q' und p'', mit a' und a'', mit b' und b'' je ein Tripel entsprechender Punkte constituirt, dass also die Punkte p', q', a', b' den Punkten q'', p'', a'', b'' projectiv entsprechen.

Da in der Formel (5) nur Doppelverhältnisse auftreten, und diese bei projectiver Transformation ihren Werth behalten, so gilt die gefundene Relation auch für drei beliebige, einander trilineare Grundgebilde.

Der durch die Gleichung (5) ausgesprochene Satz bildet im Verein mit mehreren anderen Sätzen das Analogon zu dem Satze, welcher die Gleichheit der Doppelverhältnisse bei vier Paaren von Punkten ausspricht, die in einer projectiven Beziehung sich entsprechen. So wie man aus jenem Satze schliessen kann, dass die projective Beziehung durch drei Paare entsprechender Elemente eindeutig bestimmt ist, so

können wir hier analog schliessen, dass die trilineare Beziehung durch die sechs singulären Elemente und ein Tripel entsprechender Elemente *eindeutig* bestimmt ist. Ueberhaupt müssen zur Bestimmung einer trilinearen Verwandtschaft, da dieselbe die Constantenzahl 7 hat, immer n Tripel entsprechender Elemente und $7 - n$ singuläre Elemente gegeben sein. Doch ist nicht in allen diesen Fällen die Bestimmung eine eindeutige. Sind z. B. vier Tripel entsprechender Elemente und ausserdem in jedem Grundgebilde ein singuläres Element gegeben, aber derartig, dass nie zwei von den drei gegebenen singulären Elementen ein singuläres Paar bilden, so sind dadurch fünf verschiedene, trilineare Beziehungen bestimmt. Wenn dagegen n Tripel entsprechender Elemente und $8 - n$ singuläre Elemente einer trilinearen Beziehung angehören, so müssen dieselben immer durch eine algebraische Relation in ihrer Lage von einander abhängen. Von solchen Relationen giebt es ausser der oben abgeleiteten noch zwölf wesentlich verschiedene. Wir leiten jedoch hier nur noch diejenige ab, welche sich bei drei Geraden auf vier Tripel entsprechender Punkte und solche vier singuläre Punkte bezieht, die sämmtlich auf zwei Geraden liegen.

Die singulären Punkte mögen, wie oben, mit p, q, p', q', p'', q'' bezeichnet sein. Ferner seien

$$a, a', a''; \; b, b', b''; \; c, c', c''; \; d, d', d''$$

vier Tripel entsprechender Punkte. Der Kürze wegen bezeichnen wir für die Gerade g die vier Brüche

$$\frac{pa}{qa}, \; \frac{pb}{qb}, \; \frac{pc}{qc}, \; \frac{pd}{qd}$$

beziehungsweise mit $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d$, und für die beiden anderen Geraden die analogen Brüche mit

$$\lambda_a', \lambda_b', \lambda_c', \lambda_d'; \; \lambda_a'', \lambda_b'', \lambda_c'', \lambda_d''.$$

Zunächst ist, wie eine leichte Umformung ergiebt,

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\lambda_a - \lambda_c}{\lambda_b - \lambda_c} : \frac{\lambda_a - \lambda_d}{\lambda_b - \lambda_d}.$$

In dieser Gleichung ersetzen wir die nichtgestrichelten λ durch die gestrichelten gemäss den aus Gleichung (3) folgenden Gleichungen:

$$\lambda_a = \frac{C}{\lambda_a' \lambda_a''}, \quad \lambda_b = \frac{C}{\lambda_b' \lambda_b''}, \quad \lambda_c = \frac{C}{\lambda_c' \lambda_c''}, \quad \lambda_d = \frac{C}{\lambda_d' \lambda_d''}.$$

Dann hebt sich die Constante C heraus, und es ergiebt sich die gesuchte Relation:

$$(6) \qquad \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\lambda_a' \lambda_a'' - \lambda_c' \lambda_c''}{\lambda_b' \lambda_b'' - \lambda_c' \lambda_c''} : \frac{\lambda_a' \lambda_a'' - \lambda_d' \lambda_d''}{\lambda_b' \lambda_b'' - \lambda_d' \lambda_d''},$$

für welche man auch, indem man nur Doppelverhältnisse einführt, schreiben kann:

$$(abcd) = \frac{(p'q'a'c')\cdot(p''q''a''c'') - 1}{(p'q'b'c')\cdot(p''q''b''c'') - 1} : \frac{(p'q'a'd')\cdot(p''q''a''d'') - 1}{(p'q'b'd')\cdot(p''q''b''d'') - 1}.$$

In dem speciellen Falle, wo zwei von den vier Punkten a, b, c, d in die singulären Punkte p und q fallen, entsteht aus der Relation (6) wieder die Relation (5).

§ 4.

Kennzeichen, ob eine trilineare Beziehung geradlinigt sei.

Wenn bei zwei projectiven geraden Punktreihen, die in derselben Ebene liegen, irgendwelche drei Paare entsprechender Punkte so liegen, dass die drei Verbindungsgeraden von dreimal zwei sich entsprechenden Punkten durch einen und denselben Punkt gehen, so ist dies ein Kennzeichen dafür, dass die geraden Punktreihen perspectivisch liegen. Bei der trilinearen Beziehung dreier gerader Punktreihen suchen wir nach einem analogen Kennzeichen, welches darüber entscheiden soll, ob die Beziehung geradlinigt ist. Wir setzen voraus, erstens dass bei einer trilinearen Beziehung, die auf den drei Seiten g, g', g'' eines Dreiecks liegt, die sechs singulären Punkte p, q, p', q', p'', q'' in die drei Ecken fallen, und zwar immer in jede Ecke ein singuläres Paar, zweitens, dass ein Tripel entsprechender Elemente a, a', a'' in gerader Linie liegt. Dann ist nach dem Lehrsatze des Menelaos:

$$\frac{ap}{aq}\cdot\frac{a'p'}{a'q'}\cdot\frac{a''p''}{a''q''} = +1.$$

Ist nun b, b', b'' ein beliebiges zweites Tripel von Punkten, welche durch die trilineare Beziehung zusammengehören, so ist zufolge der Gleichung (5):

$$\left(\frac{ap}{aq}:\frac{bp}{bq}\right)\cdot\left(\frac{a'p'}{a'q'}:\frac{b'p'}{b'q'}\right)\cdot\left(\frac{a''p''}{a''q''}:\frac{b''p''}{b''q''}\right) = +1.$$

Aus beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\left(\frac{bp}{bq}\right)\cdot\left(\frac{b'p'}{b'q'}\right)\cdot\left(\frac{b''p''}{b''q''}\right) = +1.$$

Folglich müssen nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos auch b, b', b'' in gerader Linie liegen. Also ist folgender Satz bewiesen:

Wenn auf den drei Seiten eines Dreiecks eine trilineare Beziehung ihrer Punkte so liegt, dass in jede Ecke des Dreiecks ein singuläres Paar fällt, und dass ausserdem ein einziges Tripel entsprechender Punkte in gerader Linie liegt, so liegen alle Tripel entsprechender Punkte in

gerader Linie, oder, was dasselbe ist, so ist die trilineare Beziehung eine geradlinigte.

Durch duale Transformation resultirt hieraus ein analoger Satz für drei trilineare Ebenenbüschel, deren Axen sich in einem und demselben Punkte schneiden. Ausserdem aber kann man auch noch durch leicht ersichtliche Projectionen die folgende Verallgemeinerung auf drei windschiefe Geraden ableiten.

Wenn auf drei Geraden im Raume eine trilineare Beziehung so liegt, dass ein Punkt existirt, durch welchen die Verbindungsebene eines einzigen Tripels entsprechender Punkte und ausserdem die drei Verbindungsgeraden pq', $p'q''$, $p''q$ oder pq'', $p'q$, $p''q'$ gehen, so müssen sich in jenem Punkte die Verbindungsebenen aller möglichen Tripel entsprechender Punkte schneiden.

Wie man das eben besprochene Kennzeichen mit Hilfe der Formel (5) erhielt, so kann man ein zweites Kennzeichen mit Hilfe der Formel (6) erhalten. Dasselbe lässt sich aussprechen, wie folgt:

Wenn auf den drei Seiten g, g', g'' eines Dreiecks eine trilineare Beziehung so liegt, dass die vier auf zwei Seiten liegenden singulären Punkte in die drei Ecken fallen, und zwar in die eine Ecke das eine singuläre Paar, und dass ausserdem dreimal ein Tripel entsprechender Punkte in gerader Linie liegt, so ist die trilineare Beziehung eine geradlinigte.

§ 5.

Lineare Construction eines neuen Tripels entsprechender Elemente.

Die eben abgeleiteten Sätze liefern die besten Mittel, um bei einer eindeutig bestimmten, trilinearen Beziehung dreier Grundgebilde, zu zwei Elementen, welche in zweien von den drei Grundgebilden gegeben sind, das entsprechende Element des dritten Grundgebildes linear zu construiren.

Es seien bei drei trilinear zu beziehenden geraden Punktreihen g, g', g'' die singulären Punkte p, q, p', q', p'', q'' und ein Tripel entsprechender Punkte a, a', a'' gegeben. Dann construirt man denjenigen Punkt b'' auf g'', welcher zweien beliebigen Punkten b' auf g' und b auf g vermöge der trilinearen Beziehung entspricht, mit Benutzung des ersten der beiden oben gefundenen Kennzeichen, nach folgender Vorschrift. Man nehme in beliebiger Ebene ein beliebiges Dreieck an, dessen Seiten h, h', h'' und dessen Ecken entsprechend P, P', P'' heissen mögen, ferner nehme man eine beliebige Gerade an, welche h, h', h'' in A, A', A'' schneiden möge. Darauf ziehe man die Verbindungsgeraden $P'p$, $P''q$, Aa, und construire eine Gerade l, welche diese drei Geraden schneidet, was auf unendlich viele Arten linear möglich

ist. Ebenso construire man eine $P''p'$, Pq', $A'a'$ schneidende Gerade l', und eine Pp'', $P'q''$, $A''a''$ schneidende Gerade l''. Wenn man dann durch l und b eine Ebene legt, ihren Schnittpunkt B mit h bestimmt, ebenso durch l' und b' eine Ebene legt, ihren Schnittpunkt B' mit h' bestimmt, darauf den Schnittpunkt B'' der Verbindungsgeraden BB' mit h'' aufsucht, und endlich B'' mit l'' durch eine Ebene verbindet, so schneidet diese Ebene die Gerade g'' in dem gesuchten Punkte b'', welcher b und b' trilinear entspricht.

In ähnlicher Weise kann man das zweite der oben angegebenen Kennzeichen zu der folgenden linearen Construction verwerthen.

Es seien bei drei trilinear auf einander zu beziehenden geraden Punktreihen g, g', g'' die singulären Punkte auf g und g', also p, q, p', q' und drei Tripel entsprechender Punkte a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' gegeben. Um dann alle möglichen Tripel entsprechender Punkte, sowie auch die singulären Punkte p'' und q'' linear zu construiren, verfahre man, wie folgt. Man nehme wieder in beliebiger Ebene ein beliebiges Dreieck an, dessen Seiten h, h', h'', und dessen Ecken entsprechend P, P', P'' heissen mögen, dann ziehe man die Verbindungsgeraden $P'p$ und $P''q$, construire eine beliebige Gerade l, welche beide schneidet, und projicire von l aus die Punkte a, b, c auf h, die Projectionen mögen A, B, C heissen. Ebenso construire man eine $P''p'$ und Pq' schneidende Gerade l', von welcher aus man durch a', b', c' Ebenen legt, welche h' in A', B', C' schneiden. Darauf suche man auf h'' die drei Punkte A'', B'', C'', in welchen h'' beziehungsweise von den Verbindungsgeraden AA', BB', CC' geschnitten wird. Endlich ziehe man eine Gerade l'', welche die Verbindungsgeraden $A''a''$, $B''b''$, $C''c''$ schneidet. Dann entsprechen sich immer drei Punkte d, d', d'' auf g, g', g'' trilinear, wenn ihre Projectionen D, D', D'' von l, l', l'' aus auf die Geraden h, h', h'' in gerader Linie liegen. Ist z. B. auf g ein Punkt d, auf g'' ein Punkt d'' gegeben, so sucht man auf h und h'' die Punkte D und D'' auf, wo die Verbindungsebenen von d mit l und von d'' mit l'' schneiden, zieht dann DD'' und bestimmt den Punkt D', wo h' von DD'' geschnitten wird. Dann schneidet die Verbindungsebene von D' mit l' die Gerade g' in demjenigen Punkte d', welcher den Punkten d und d'' entspricht. Die nicht gegebenen, singulären Punkte p'' und q'' liegen auf g'' da, wo die Verbindungsebenen von l'' mit P resp. mit P' schneiden.

Besteht die trilineare Verwandtschaft zwischen andern drei Grundgebilden als drei geraden Punktreihen, so kann man immer die beiden eben angegebenen Constructionen benutzen, um in den beiden analogen Fällen ein neues Tripel entsprechender Elemente linear zu construiren. Man hat dann nur die drei Grundgebilde zuvor auf drei gerade Punktreihen zu projiciren. Freilich kommt man in solchen Fällen oft auch

kürzer zum Ziele. Beispielsweise wird man bei drei trilinear zu beziehenden Ebenenbüscheln diejenigen Constructionen anwenden, welche den obigen dual entsprechen.

§ 6.

Eigenschaften und lineare Construction der allgemeinen Fläche dritten Grades.

Wie ich schon einleitend bemerkte, hängt die trilineare Beziehung in ähnlicher Weise mit den Gebilden dritten Grades zusammen, wie die projective Beziehung mit den Kegelschnitten, Kegeln und Flächen zweiten Grades zusammenhängt. Hat man z. B. eine trilineare Beziehung zwischen den Punkten der drei Seiten eines Dreiecks, so kommt es, wenn die Beziehung keine geradlinigte ist, ∞^1 mal vor, dass drei einander entsprechende Punkte in gerader Linie liegen, und die so entstehenden geraden Linien hüllen eine Curve dritten Ranges ein, welche auch von den drei Dreiecksseiten berührt wird. Wenn ferner zwei Strahlbüschel und eine gerade Punktreihe in allgemeiner Lage sich trilinear entsprechen, so bilden alle diejenigen Geraden, welche zwei Strahlen der beiden Strahlbüschel und den ihnen entsprechenden Punkt der geraden Punktreihe treffen, eine Congruenz, deren Strahlen sämmtlich den Träger der geraden Punktreihe so schneiden, dass sie auf jeder Ebene, die durch denselben geht, eine Curve *dritten* Ranges einhüllen, und in jedem auf der geraden Punktreihe liegenden Punkte einen Kegel zweiten Grades bilden.

Am ergiebigsten ist die Theorie der trilinearen Beziehung jedoch in ihrer Anwendung auf allgemeine und specielle *Flächen dritten Grades.* Wir betrachten zunächst eine allgemeine Fläche dritten Grades, und irgend welche drei auf ihr liegende, zu einander windschiefe Geraden g, g', g''. Wir legen durch zwei von diesen Geraden, etwa durch g und g', zwei beliebige Ebenen, dann trifft deren Schnittgerade die Fläche ausser auf g und g' noch in einem einzigen dritten Punkte, dessen Verbindungsebene mit g'' also den beiden angenommenen Ebenen eindeutig zugeordnet ist. Da diese Zuordnung auch eine algebraische ist, so können wir schliessen, dass die Fläche in je drei auf ihr liegenden, windschiefen Geraden drei trilinear bezogene Ebenenbüschel erzeugt. Es liegt nun nahe, zu untersuchen, welche Rolle die sechs singulären Ebenen dieser drei Ebenenbüschel auf der Fläche spielen. Sie mögen $\pi, \varkappa, \pi', \varkappa', \pi'', \varkappa''$ heissen, so dass π und $\varkappa$ sich in g, π' und $\varkappa'$ sich in g', π'' und $\varkappa''$ sich in g'' schneiden, und dass π mit $\varkappa'$, π' mit $\varkappa''$, π'' mit $\varkappa$, ferner $\varkappa$ mit π', $\varkappa'$ mit π'', $\varkappa''$ mit π je ein singuläres Paar bilden. Da jedem solchen singulären Paare unendlich viele Ebenen entsprechen, so muss jeder Punkt,

welcher den beiden Ebenen eines singulären Paares zugleich angehört, auf der Fläche liegen, d. h. es müssen auch die sechs Schnittgeraden

$$\pi\varkappa',\ \pi'\varkappa'',\ \pi''\varkappa;\quad \varkappa\pi',\ \varkappa'\pi'',\ \varkappa''\pi$$

ganz auf der Fläche liegen. Man erkennt ferner, dass, wenn man aus den neun Geraden statt des Tripels g, g', g'' das Tripel $\pi\varkappa'$, $\pi'\varkappa''$, $\pi''\varkappa$ oder $\varkappa\pi'$, $\varkappa'\pi''$, $\varkappa''\pi$ oder g, $\pi'\varkappa''$, $\varkappa'\pi''$ oder g', $\pi''\varkappa$, $\varkappa''\pi$ oder g'', $\pi\varkappa'$, $\varkappa\pi'$ als Träger der trilinearen Beziehung herausgreift, dass dann immer die übrigen sechs Geraden als Schnittlinien der singulären Paare von Ebenen auftreten. Von solchen sechs Geraden schneidet immer jede nur zwei von den ursprünglich angenommenen drei Geraden*). Es giebt aber bekanntlich auch noch drei Gerade, deren jede alle drei ursprünglichen Geraden schneidet. Auf diese wird man geführt, wenn man danach fragt, wie oft es bei einer trilinearen Beziehung dreier Ebenenbüschel vorkommen muss, dass drei einander entsprechende Ebenen sich in einer Geraden schneiden. Das Correspondenzprincip ergiebt, dass die gesuchte Zahl drei sein muss.

Die in § 3. abgeleiteten Relationen können jetzt als Eigenschaften der Fläche dritten Grades folgendermassen ausgesprochen werden. Man wähle auf einer Fläche dritten Grades ein beliebiges Tripel windschiefer Geraden g, g', g'' aus, bezeichne mit π und $\varkappa$ diejenigen beiden, durch g gehenden Ebenen, deren jede sowohl eine g' aber nicht g'' schneidende Gerade, wie auch eine g'' aber nicht g' schneidende Gerade enthält, ferner mit π' und $\varkappa'$ die analogen Ebenen durch g', mit π'' und $\varkappa''$ die analogen Ebenen durch g'', und zwar so, dass immer nur zwei mit verschiedenen Buchstaben bezeichnete Ebenen sich in einer auf der Fläche liegenden Geraden schneiden. Endlich bezeichne man für zwei beliebige Punkte A und B der Fläche mit

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \beta,\ \beta',\ \beta''$$

diejenigen Ebenen, welche A und B beziehungsweise mit g, g', g'' verbinden. Dann behält das Doppelverhältnissproduct:

$$(\pi\varkappa\alpha\beta)\cdot(\pi'\varkappa'\alpha'\beta')\cdot(\pi''\varkappa''\alpha''\beta'')$$

stets den Werth 1, wo auch die Punkte A und B auf der Fläche liegen mögen. Wenn noch zwei andere beliebige Flächenpunkte C und D mit g, g', g'' durch die Ebenen

$$\gamma,\ \gamma',\ \gamma'',\ \delta,\ \delta',\ \delta''$$

verbunden werden, so gilt auch die folgende Doppelverhältnissrelation:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{(\pi'\varkappa'\alpha'\gamma')\cdot(\pi''\varkappa''\alpha''\gamma'') - 1}{(\pi'\varkappa'\beta'\gamma')\cdot(\pi''\varkappa''\beta''\gamma'') - 1} : \frac{(\pi'\varkappa'\alpha'\delta')\cdot(\pi''\varkappa''\alpha''\delta'') - 1}{(\pi'\varkappa'\beta'\delta')\cdot(\pi''\varkappa''\beta''\delta'') - 1}.$$

Wir betrachten umgekehrt eine trilineare Beziehung dreier Ebenen-

*) Cf. Sturm's „Flächen dritter Ordnung“, pag. 48.

büschel mit den Axen g, g', g'' als gegeben, und suchen den Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen. Zunächst erkennen wir, dass dieser Ort auf einer beliebigen Geraden k des Raumes drei Punkte besitzt. Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt A auf k mit g und g', so entspricht den beiden Verbindungsebenen trilinear eine Ebene durch g'', welche k in B schneidet. Umgekehrt entsprechen einer solchen Ebene Bg'' ∞^1 Paare von Ebenen durch g und g'. Diese bilden zwei projective Ebenenbüschel, deren Erzeugniss eine Fläche zweiten Grades ist, und deshalb die Gerade k in zwei Punkten A schneidet. Demnach giebt es nach dem Correspondenzprincip auf k drei Stellen, wo ein Punkt A mit einem Punkte B zusammenfällt. Das gesuchte Erzeugniss ist also eine Fläche dritter Ordnung*). Man erkennt ferner, dass jeder auf einer der drei Geraden g, g', g'' liegende Punkt der Fläche angehört, weil seinen Verbindungsebenen mit den beiden andern Geraden eine Ebene entspricht, welche sich mit den beiden Verbindungsebenen in dem angenommenen Punkte selbst schneidet. Indem aber die Fläche dritten Grades durch eine gegebene Gerade ganz hindurchgeht, erfüllt sie eine vierfache Bedingung. Folglich erfüllt die Fläche dadurch, dass sie Erzeugniss von drei gegebenen trilinearen Ebenenbüscheln ist, eine

$$(4+4+4+7)\text{-fache oder } 19\text{-fache}$$

Bedingung, vorausgesetzt, dass die trilineare Beziehung so allgemein wie möglich ist, also die Constantenzahl 7 hat. Die erzeugte Fläche dritter Ordnung hat also die Constantenzahl 19, das heisst, sie ist *punktallgemein*. Auf ihr liegen ausser g, g', g'' noch die sechs Schnittgeraden der sechs singulären Ebenenpaare, welche die trilineare Beziehung liefert, weil wieder jeder Punkt einer solchen Schnittgeraden als Schnittpunkt eines Tripels entsprechender Ebenen betrachtet werden darf.

Die in § 5. auseinandergesetzten linearen Constructionen liefern bei dualer Transformation die lineare Construction der allgemeinen Fläche dritter Ordnung in folgenden beiden Fällen:

1) wenn sie durch einen gegebenen Punkt, durch drei windschiefe Gerade und durch diejenigen sechs Geraden gehen soll, von denen jede nur zwei von den drei windschiefen Geraden schneidet;
2) wenn sie durch drei gegebene Punkte, durch drei windschiefe Gerade und diejenigen beiden Geraden gehen soll, deren jede gewisse zwei von den drei windschiefen Geraden schneidet, die dritte aber nicht.

*) August in Berlin erzeugte in seiner Dissertationsschrift (Berlin 1862) die Fläche dritter Ordnung durch drei Ebenenbüschel, welche, nach unserer Terminologie, trilinear auf einander bezogen waren, ohne jedoch dieses Beziehen als ein neues Forschungsmittel der synthetischen Geometrie zu betrachten.

In beiden Fällen kann man *sämmtliche* Punkte der Fläche finden, weil man auf jeder beliebigen Geraden, welche zwei der drei gegebenen, windschiefen Geraden schneidet, den dritten, der Fläche angehörigen Punkt linear construiren kann. Wir geben beispielsweise die Vorschrift für die Construction der Fläche im zweiten Falle.

Von den drei gegebenen windschiefen Geraden g, g', g'' mögen g und g' diejenigen sein, welche von den beiden sonst noch gegebenen Geraden l'' und h'' geschnitten werden, ferner mögen die drei gegebenen Punkte a, b, c heissen. Man lege durch g und l'' eine Ebene π, durch g und h'' eine Ebene $\varkappa$, ebenso durch g' und l'' eine Ebene $\varkappa'$, durch g' und h' eine Ebene π', ausserdem durch g, g', g'' einerseits und a, b, c andererseits die Ebenen

$$\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''.$$

Dann nehme man drei beliebige Ebenen $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ an, welche sich zu je zweien in den drei Strahlen h, h', h'' schneiden mögen, suche die beiden Geraden, in denen sich ε' mit π und ε'' mit $\varkappa$ schneidet, construire eine Gerade l, welche diese beiden Geraden schneidet, und verbinde die drei Punkte, wo l von α, β, γ geschnitten wird, mit h durch die Ebenen A, B, C. Ebenso construire man eine Gerade l', welche die beiden Schnittgeraden von ε'' mit π' und von ε mit $\varkappa'$ schneidet, und verbinde die drei Punkte, wo l' von α', β', γ' geschnitten wird, mit h' durch die Ebenen A', B', C'. Darauf suche man die drei Schnittgeraden der Ebenen A und A', B und B', C und C', und verbinde dieselben mit h'' durch die Ebenen A'', B'', C''. Endlich ziehe man eine Gerade l'', welche die drei Geraden trifft, in denen sich A'' und α'', B'' und β'', C'' und γ'' schneiden. Wählt man dann eine beliebige Gerade, welche zwei der drei Geraden g, g', g'', etwa g und g'' schneidet, so findet man den auf dieser beliebigen Geraden k' liegenden, dritten Flächenpunkt d auf folgende Weise. Man lege durch g und k', sowie durch g'' und k' je eine Ebene, δ und δ'', suche die Schnittpunkte von δ mit l und von δ'' mit l'', verbinde diese Punkte mit h resp. h'' durch die Ebenen D und D'', lege eine Ebene D' durch h' und die Schnittlinie von D und D'', und verbinde den Punkt, wo sich D' und l' schneiden, mit der Geraden g' durch eine Ebene δ'. Dann ist schliesslich der Schnittpunkt von k' und δ' der gesuchte Flächenpunkt d. Man kann so auch immer diejenigen vier Geraden der Fläche erhalten, welche, noch ausser l'' und h'', nur zwei von den drei Geraden g, g', g'' schneiden. Man verbinde zu diesem Zweck g'' mit den beiden Punkten, wo l' von ε und von ε' geschnitten wird, durch die beiden Ebenen π'' und $\varkappa''$. Dann sind die Schnittlinien $\pi\varkappa''$, $\pi'\varkappa''$, $\varkappa\pi''$, $\varkappa'\pi''$ die gesuchten vier Geraden.

§ 7.

Ausgeartete trilineare Beziehungen.

Ausgeartete trilineare Beziehungen auf drei Grundgebilden kann man bei Festhaltung der allgemeinen Lage der Grundgebilde zu einander namentlich dadurch erhalten, dass man den drei Trägern einer geradlinigten Beziehung specielle Lagen zu einander ertheilt, und dann die entstandenen geradlinigt bezogenen Punktreihen auf die gegebenen Grundgebilde projicirt. Geht man z. B. von drei Geraden aus, welche sowohl in einer Ebene liegen, wie auch durch einen und denselben Punkt gehen, und dabei geradlinigt auf einander bezogen sind, so gelangt man zu einer specielleren trilinearen Beziehung, welche als Ausartung der allgemeinen aufgefasst werden kann, und folgende Definition hat.

1) Die Ausartung η ist eine trilineare Beziehung, bei welcher auf jedem der drei Grundgebilde die singulären Elemente zusammenfallen. Sie hat die Constantenzahl sechs, ist also z. B. durch die drei singulären Elemente und drei Tripel entsprechender Elemente oder durch sechs Tripel entsprechender Elemente bestimmt, und zwar im ersten Falle eindeutig, im letzten Falle aber vierdeutig. Man kann η noch auf manche andere Weise erhalten, z. B. wenn man von drei geraden Punktreihen und einem festen Punkte ausgeht, der auf der durch die drei geraden Punktreihen erzeugten Regelfläche liegt, und wenn man dann als zusammengehörig je drei Punkte bezeichnet, deren Verbindungsebene durch den festen Punkt geht. Je drei, den so erzeugten geraden Punktreihen projective Grundgebilde bilden eine Ausartung η.

Zu einer zweiten Ausartung der trilinearen Beziehung gelangt man, wenn man von einer geradliuigten Beziehung auf drei Geraden ausgeht, von denen zwei zusammenfallen und die dritte schneiden, und wenn man dann die erhaltenen Punktreihen auf den drei trilinear auf einander zu beziehenden Grundgebilden projectiv abbildet. Eine so entstehende, ausgeartete trilineare Beziehung hat folgende Definition.

2) Die Ausartung ω besteht aus drei Grundgebilden g, g', g'', von denen das eine, es sei g, ein ausgezeichnetes Element enthält, welches nicht bloss die beiden singulären Elemente in sich vereinigt, sondern auch immer irgend welchen zwei Elementen der beiden andern Grundgebilde g' und g'' entspricht. Dagegen sind die Elemente in g' und in g'' einander projectiv zugeordnet, so dass zwei zugeordneten Elementen jedes beliebige Element auf g entspricht. Die singulären Paare auf g' und g'' liegen so, dass immer die beiden Elemente eines Paares sich projectiv entsprechen. Die Ausartung ω hat die Constantenzahl sechs, ist aber nur dann vollständig bestimmt, wenn ausser Tripeln entsprechender Elemente ein singuläres Element auf g', und das nicht

zugehörige singuläre Element auf g'' gegeben ist. Dieselbe trilineare Beziehung erhält man auch, wenn man von drei geraden Punktreihen und einem festen Punkte ausgeht, der auf einer dieser Punktreihen liegt, und wenn man dann als zusammengehörig je drei Punkte definirt, deren Verbindungsebene durch den festen Punkt geht. Indem man nicht, wie eben geschehen ist, das Grundgebilde g, sondern g' oder g'' bevorzugt, erhält man zwei analoge Ausartungen ω' und ω''.

Eine dritte Ausartung der trilinearen Beziehung entsteht in drei Grundgebilden dadurch, dass man von drei Geraden ausgeht, die sich in einem und demselben Punkt S schneiden, aber nicht in derselben Ebene liegen, und wenn man dann als einander entsprechend je drei Punkte definirt, deren Verbindungsebene durch den gemeinsamen Punkt S geht. Bezieht man die so entstehenden, trilinearen Punktreihen projectiv auf die drei Grundgebilde, so kommt man zu folgender Definition.

3) Die Ausartung φ besitzt in jedem der drei Grundgebilde ein ausgezeichnetes Element, welches immer irgend zwei Elementen der beiden andern Grundgebilde entspricht. Was die sechs singulären Elemente anbetrifft, so liegen dieselben so, dass immer das eine Element eines singulären Paares eins der drei ausgezeichneten Elemente ist, das andere aber nicht. Es liegen also, gemäss unserer früher eingeführten Bezeichnung (§ 2.), entweder p, p', p'' in den ausgezeichneten Elementen, aber q, q', q'' nicht, oder gerade umgekehrt. Auch diese Ausartung hat die Constantenzahl 6, ist aber nur dann vollständig bestimmt, wenn die nicht in die ausgezeichneten Elemente fallenden drei singulären Elemente gegeben sind. Ausserdem können n Tripel entsprechender Elemente und $3 - n$ singuläre Punkte gegeben sein, wo n gleich 0, 1, 2 oder 3 ist.

Die gefundenen Ausartungen der trilinearen Beziehung liefern zugleich für die allgemeine *Fläche* dritter Ordnung gewisse Ausartungen von der Constantenzahl 18, welche möglich sind, wenn drei windschiefe Gerade gegeben sind, die auf der Fläche liegen sollen. Man hat immer nur das Erzeugniss von drei Ebenenbüscheln zu untersuchen, welche, den obigen Definitionen gemäss, trilinear auf einander bezogen sind. Demgemäss führt die oben mit η bezeichnete Ausartung zu einer Fläche, welche sich von der allgemeinen dadurch unterscheidet, dass dreimal zwei von den sechs Geraden, die nur zwei von den drei windschiefen schneiden, zusammengefallen sind. Dagegen führt die Definition von ω zu einer ausgearteten Fläche, welche aus einer Ebene und einer Regelfläche zweiten Grades besteht, so dass die eine von den drei windschiefen Geraden auf der Ebene, die beiden andern auf der Regelfläche liegen. Endlich liefert die oben mit φ bezeichnete Ausartung eine in drei Ebenen zerfallene Fläche dritter Ordnung, so

dass jede der drei Ebenen durch eine von den drei windschiefen Geraden geht.

Zn weiteren Specialisirungen der Fläche dritter Ordnung gelangt man, wenn man den drei Trägern der drei trilinear auf einander zu beziehenden Ebenenbüschel specielle Lagen zu einander ertheilt. Wenn man z. B. zwei von den drei Geraden zusammenfallen lässt, ohne aber die Allgemeinheit der trilinearen Beziehung zu stören, so erhält man die bekannte *Regelfläche* dritter Ordnung. Es kommt nämlich dann für jede durch die dritte Gerade gelegte Ebene zweimal vor, dass die ihr entsprechenden Ebenen zusammenfallen.

Mit Hilfe der oben beschriebenen Ausartungen konnte der Verfasser für die trilineare Beziehung alle Anzahlprobleme lösen, und für die Fläche dritter Ordnung einen grossen Theil derjenigen Anzahlen berechnen, welche sich auf gegebene Punkte und Bedingungen für die 27 Geraden beziehen. Diese Resultate beabsichtigt der Verfasser, später in einer besonderen Abhandlung mitzutheilen.*)

Hamburg, im September 1880.

*) In einer mir während des Druckes zugegangenen Abhandlung aus den Mémoires de l'Académie de Belgique behandeln die Herren Folie und Le Paige die trilineare Form vom Standpunkte der Invariantentheorie. Diese Arbeit hat jedoch, so viel ich sehen kann, mit der meinigen auch rücksichtlich der angestrebten Ziele sonst keine Berührungspunkte. (Nov. 1880.)

Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen.

Von

Walther Dyck in Leipzig.

(Hierbei 2 lithographirte Tafeln.)

Man hat noch kein allgemeines Princip, welches für eine geometrisch vollständig gegebene Riemann'sche Fläche die Frage nach der zugehörigen Irrationalität beantworten lässt. Die vorliegende Abhandlung nimmt diese Fragestellung für *die specielle Classe der regulären Riemann'schen Flächen in Angriff*. Eine reguläre Riemann'sche Fläche ist dabei definirt als eine über der complexen Ebene oder über einer beliebigen Riemann'schen Fläche N-blättrig ausgebreitete Fläche, welche durch eine Gruppe von N Transformationen, die Vertauschungen der Blätter, ungeändert in sich übergeht. Die Gruppe dieser Vertauschungen lässt sich einer geometrischen Discussion unterwerfen; wir erschliessen namentlich ihre Zusammensetzung aus *einfachen* Gruppen durch gestaltliche Umformungen der Riemann'schen Fläche. Jene *einfachen* Gruppen erscheinen uns bei dieser geometrischen Untersuchungsweise ebenfalls in Gestalt regulärer Riemann'scher Flächen. *Setzen wir dann die einfachen Irrationalitäten, welche diesen letzteren Flächen entsprechen, als bekannt voraus, so giebt die geometrische Deformation unserer ursprünglichen Fläche unmittelbar den Weg, wie wir jene einfachen Irrationalitäten zu der Irrationalität dieser Fläche von zusammengesetzter Gruppe zu verbinden haben; sie lässt unmittelbar die Gleichung dieser Fläche aufstellen.*

Der Ausgangspunkt vorliegender Untersuchung war die von Herrn Klein aufgeworfene Aufgabe, *für die niedrigsten Geschlechter alle regulären Riemann'schen Flächen aufzustellen und algebraisch zu formuliren.* *) Hiezu war zunächst erforderlich, Methoden auszubilden,

*) Klein „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen." Math. Ann. Bd. XIV, p. 460 Anm.

Citate auf Klein'sche Abhandlungen sind im Folgenden einfach durch Annalenband und Seitenzahl bezeichnet.

alle regulären Riemann'schen Flächen für ein gegebenes Geschlecht in einer geometrischen Definition zu erhalten, und hieran knüpften sich die Untersuchungen, welche die Gruppe jener Flächen betreffen. Die Flächen vom Geschlechte $p = 0, 1, 2, 3$ boten hiezu das Uebungsmaterial.

In meiner Inauguraldissertation*), auf welche ich namentlich bezüglich einer weiteren Ausführung der geometrischen und gruppentheoretischen Seite unseres Problems verweisen möchte, findet sich die Frage von diesen Gesichtspunkten aus behandelt.

In vorliegender Arbeit sind, in Fortsetzung der dortigen Untersuchungen, allgemeine Methoden dargelegt, *Gruppe* [Abschnitt 1.] und *Irrationalität* [Abschnitt 2.] einer regulären Riemann'schen Fläche aus der geometrischen Definition derselben zu erschliessen**). Neben den Beispielen, welche sich in beiden Abschnitten der Arbeit unmittelbar an die allgemeinen Erörterungen anfügen, sind in einem besonderen 3. Abschnitte *die regulären Flächen vom Geschlechte eins* im Anschluss an unsere gruppentheoretischen Untersuchungen behandelt und dabei ihre Beziehung zu dem bekannten Transformationsprobleme bez. Theilungsprobleme der elliptischen Functionen entwickelt.

Was die Specialisirung der Fragestellungen auf *reguläre* Riemann'sche Flächen betrifft und die Beziehung zu den analogen allgemeineren Fragen, so sei hierüber das Folgende erwähnt:

Die Beschränkung auf reguläre Riemann'sche Flächen ist keine wesentliche, insofern man, was die Aufstellung der zugehörigen Irrationalität betrifft, *jede* Riemann'sche Fläche durch eine *reguläre* er-

*) München, Straub 1879.

**) Die Frage *nach allen regulären Riemann'schen Flächen eines gegebenen Geschlechtes* tritt damit hier zurück; doch sei gestattet, das Resultat in Kürze anzuführen, welches eine vollständige Aufzählung der regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 0, 1, 2, 3$ ergiebt:

*Innerhalb der angeführten Geschlechter sind die cyklischen Gruppen von Primzahlordnung, die Gruppe des Ikosaeders und eine Gruppe von 168 Substitutionen [bei $p = 3$] die einzigen einfachen Gruppen. Die beiden letzteren definiren zwei von Herrn Klein ausführlich untersuchte Irrationalitäten**).

Alle innerhalb unserer Geschlechter auftretenden zusammengesetzten Gruppen aber lassen sich in eine Reihenfolge bloss cyklischer Gruppen zerlegen.

Sämmtliche Irrationalitäten also, welche durch diese Flächen definirt sind, lassen sich [mit Ausnahme jener beiden von Herrn Klein discutirten] durch die blosse Ueber- und Nebeneinanderstellung von Wurzelzeichen aufbauen.

*) Man vergleiche hier die zugehörigen Abhandlungen Herrn Klein's in den Annalenbänden IX bis XV. Bezüglich der Fälle $p = 0$ sehe man ferner: Schwarz, „Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt." Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 292 ff. und „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche." Preisschrift. Berlin 1871.

setzen kann, welche die *Gruppe der Monodromie* für die ursprüngliche Fläche charakterisirt. Der Uebergang von der nichtregulären zur regulären Fläche stellt sich dabei analog dem Uebergange von einer allgemeinen algebraischen Gleichung zu ihrer Galois'schen Resolvente. *Thatsächlich sind ja auch die Gleichungen, zu denen wir durch unsere regulären Riemann'schen Flächen geführt werden, Galois'sche Resolventen mit einem oder mehreren Parametern.* Insofern nun gerade solche Irrationalitäten, die in Form gewisser Galois'scher Resolventen erscheinen, in bestimmtem Sinne als *Fundamentalirrationalitäten* zu betrachten sind*), auf die wir alle anderen transformiren, *wird man* gegebenen Falles *eine solche Zurückführung einer nichtregulären Riemann'schen Fläche auf eine reguläre zweckmässiger Weise jedesmal auch wirklich durchführen*, und damit die zugehörige Irrationalität mit Hülfe jener Fundamentalirrationalitäten darstellen. Ich denke auf die geometrische Ueberführung einer nichtregulären Riemann'schen Fläche in eine reguläre und den entsprechenden algebraischen Process bei einer anderen Gelegenheit eingehen zu können.

Eine analoge Beziehung, wie die eben betrachtete, welche gleich hier angeschlossen sein mag, besteht, *rein gruppentheoretisch* genommen, zwischen dem Studium einer Gruppe, sofern sie durch eine *Galois'sche Resolvente* mit einem oder mehreren Parametern, also durch eine *reguläre Riemann'sche Fläche* definirt ist und dem Studium der gleichen Gruppe, insofern sie uns durch eine *allgemeine Resolvente*, also durch eine Gleichung schlechthin, gegeben ist, sofern sie also als Gruppe der Monodromie für eine *nichtreguläre Fläche* erscheint.

Denken wir uns im ersten Falle zur Darstellung der einzelnen Substitutionen der Gruppe eine Indexbezeichnung der Art eingeführt, dass wir jedes Blatt unserer regulären Fläche mit einem Index belegen; es kommt dann die Gruppe durch bestimmte Vertauschungen dieser Indices zu Stande, wobei jeder Index *einmal* die Stelle jedes anderen vertritt**). Wir haben die Gruppe in einer Form dargestellt, in welcher sie *einfach transitiv* erscheint***). — Legen wir andererseits zum Studium der Gruppe eine beliebige Resolvente zu Grunde, lesen wir sie also aus einer nichtregulären Fläche ab, so lässt sich auch hier wieder eine Indexbezeichnung durch Benennung der einzelnen Blätter dieser Fläche einführen und die Gruppe der Fläche drückt sich durch Vertauschungen dieser Indices aus. Aber dabei stellt sich die

*) Man vergl. diese Annalen Bd. XIV. pag. 170.

**) Für unsere rein geometrische Discussion der Gruppen vertreten gewissermassen die Blätter der Fläche selbst jene Indexbezeichnung.

***) Man sehe hiezu den Aufsatz von Cayley „On the Theory of Groups" in den Proceedings of the London Math. Soc. Vol. IX. 1878.

Gruppe als *mehrfach transitiv* dar und besitzt neben ihren allgemeinen und wesentlichen Eigenschaften noch specielle, welche sich auf die Auszeichnung jener Resolvente, also auf die specielle Form ihrer Darstellung beziehen. Man kann vielleicht jene *wesentlichen* Eigenschaften, die für alle möglichen Darstellungen einer Gruppe unverändert bleiben, als die *invarianten Eigenschaften* der Gruppe bezeichnen. Es sind gerade diejenigen, deren wir zum Studium der Zusammensetzung unserer Gruppen bedürfen. Insofern sie für sich, ohne „fremde" Eigenschaften eben an jener „*Galois'schen Form*" der Gruppe — wenn dieser Ausdruck gestattet ist — auftreten, werden wir allgemein dazu geführt, *Gruppenuntersuchungen, die sich auf ein Studium der zugehörigen Irrationalitäten beziehen, stets eben an jener Form der Gruppe durchzuführen, in welcher sie einfach transitiv erscheint.*

Es sei schliesslich noch folgende Bemerkung gestattet. Wir gehen hier stets von einer regulären Riemann'schen Fläche aus und studiren die zugehörige Gruppe. Die umgekehrte Frage, *wie man zu jeder Gruppe eine reguläre Riemann'sche Fläche findet*, ist zunächst ausgeschlossen. Ich denke gerade dieser Fragestellung in Fortsetzung dieser Untersuchungen näher treten zu können.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Felix Klein, bei dem ich Anregung und mannigfachste Unterstützung in vorliegender Arbeit fand, bin ich zu grossem Danke verpflichtet.

I. Abschnitt.

Geometrisch-gruppentheoretischer Theil des Problems.

§ 1.

Gestalten, welche wir einer regulären Riemann'schen Fläche ertheilen können.

Wir betrachten reguläre Riemann'sche Flächen F, welche sich N-blättrig über der complexen Ebene z, oder über einer beliebigen Riemann'schen Fläche f ausbreiten. *Ihre Regularität spricht sich geometrisch zunächst dadurch aus, dass jedes Blatt genau so verzweigt ist wie jedes andere.* Weiter aber, wenn die Riemann'sche Fläche f ein Geschlecht $p > 0$ besitzt, wenn also das „einzelne Blatt" der über ihr ausgebreiteten Fläche für sich genommen ein Geschlecht $p > 0$ hat*), so können diese Blätter, ausser durch Verzweigungsschnitte

*) Des kurzen Ausdrucks halber ist in der Folge unter dem „Geschlecht des einzelnen Blattes" einer Fläche stets das Geschlecht verstanden, welches sich ergiebt, wenn wir ein Blatt der Fläche von den übrigen losgetrennt und die dabei in demselben entstandenen Schnitte uns geschlossen denken.

ineinander überzugehen, auch *längs geschlossener Curven ineinander geschlungen* sein. *Die Regularität der Fläche fordert dann, dass jedes Blatt genau so verschlungen ist, wie jedes andere.* Dabei haben wir auf f bekanntlich $2.p$ wesentlich verschiedene Durchschlingungscurven zu unterscheiden.

Die Regularität einer Fläche F verlangt insbesondere, dass, wenn in einer gewissen Verzweigungsstelle, bez. längs einer gewissen geschlossenen Curve ν Blätter im Cyklus zusammenhängen, dort dann die sämmtlichen Blätter zu je ν verzweigt bez. verschlungen sind.

Insofern unsere folgenden Untersuchungen wesentlich an der Riemann'schen Fläche selbst geführt werden, handelt es sich zuvörderst um deren anschauliche Darstellung. Wir werden hier vor allem die Darstellung verwenden, in welcher die Riemann'sche Fläche als eine *frei im Raume gelegene* erscheint, indem wir ihre N Blätter uns nicht *übereinander* sondern *nebeneinander* gelegt denken.*)

Für den Fall einer über der z-Ebene N-blättrig ausgebreiteten regulären Riemann'schen Fläche soll das Verfahren der Deformation zu einer frei im Raume gelegenen Fläche, die dann in N Gebiete vom Geschlechte Null *regulär eingetheilt* erscheint, in Kürze vorgeführt werden. Es ist diese Umformung von Herrn Klein, Ann. XIV, p. 458 ff. ausführlich entwickelt. Wir wiederholen sie hier aber namentlich desshalb, weil wir in der Folge von ähnlichen Deformationen unserer Riemann'schen Flächen ausgedehnten Gebrauch zu machen haben.

Es seien $z_1, z_2 \ldots z_n$ die Verzweigungsstellen unserer N-blättrigen Fläche, so dass bei z_1 die Blätter zu je ν_1, bei z_2 zu je ν_2 u. s. w. zusammenhängen. Dann legen wir in der z-Ebene durch die sämmtlichen Verzweigungsstellen eine geschlossene Curve, der Art, dass die z-Ebene und gleicher Weise jedes Blatt der Riemann'schen Fläche in zwei Gebiete getheilt wird — ein schraffirtes und ein nichtschraffirtes — die im Sinne der analysis situs symmetrisch sind. Die Fläche längs dieser Curve durchschneidend, erhalten wir $2.N$ getrennte Gebiete, die wir nach passender Deformation in der früheren Anordnung zusammenfügen, so zwar, dass die einzelnen Gebiete nicht mehr *über*, sondern *nebeneinander* zu liegen kommen. Dadurch werden die Windungspunkte der Fläche aufgehoben. Wo ν Blätter im Cyklus übereinander lagen, da liegen jetzt $2.\nu$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Gebietstheile, einen Cyklus bildend, nebeneinander. Die Fläche ist somit verwandelt in eine frei im Raume gelegene, geschlossene Fläche, die in $2.N$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte n-Ecke eingetheilt ist, und zwar ist die so erzeugte Eintheilung zunächst eine

*) Eine schon von Riemann gebrauchte Vorstellungsweise. Vergl. Ann. XIV, p. 134.

regulär-symmetrische, insofern wir jedes der N Blätter unserer ursprünglichen Fläche noch in zwei zu einander symmetrische Theile getrennt haben. Wenn auch diese Spaltung der einzelnen, unseren Blättern entsprechenden Gebietstheile für die folgenden Betrachtungen nicht wesentlich ist, so ermöglicht sie uns doch eine grössere Uebersichtlichkeit in der geometrischen Darstellung unserer Flächen und zugleich eine freiere Beweglichkeit in ihrer Auffassung, indem wir bei Aufhebung dieser Spaltung, also beim Uebergang von einer regulär-symmetrischen Eintheilung zu einer bloss regulären, noch die Wahl haben, *welches* der n an ein schraffirtes n-Eck der Eintheilung anstossenden nichtschraffirten n-Ecke wir mit dem ersteren zusammen als *ein Blatt* unserer Fläche betrachten wollen.

Zu einer übersichtlichen Zeichnung der durch unseren Process erhaltenen Fläche denken wir uns dieselbe in eine einfach zusammenhängende zerschnitten und breiten ein solches „Netz der Fläche" in die Zeichnungsebene aus. Dabei lässt sich dieses Netz bezüglich der verschiedenen Polygone der Eintheilung in bestimmter regulärer Weise anordnen. Nehmen wir etwa einen Eckpunkt ν [um den sich $2.\nu$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte n-Ecke lagern] in die Mitte, so breitet sich, falls wir nur die Zerschneidung unserer Fläche passend getroffen haben, um diesen Punkt das Netz in ν-facher Regularität und ν-facher Symmetrie aus — die letzteren Begriffe dabei im Sinne der analysis situs genommen.

Wir erleichtern uns die Uebersicht eines solchen Netzes durch Einführung auch einer gestaltlichen Symmetrie, indem wir unsere Polygone als Kreisbogenpolygone mit den Winkeln $\frac{\pi}{\nu_i}$ zeichnen*), wie dies bei den ersten Netzen, die man studirte, zufolge der functionentheoretischen Betrachtungen von selbst der Fall war**).

Durch analoge Deformationen lässt sich nun jede reguläre Riemann'sche Fläche in eine frei im Raume gelegene regulär eingetheilte Oberfläche verwandeln; nur sehen wir im allgemeinen Falle davon ab, die einzelnen Gebiete dieser Eintheilung, die, für sich betrachtet, jetzt allgemein einen höheren Zusammenhang als 1 haben, weiter in einen schraffirten und einen nichtschraffirten Theil zu spalten, wie wir dies für den Fall der über der z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Flächen soeben gethan haben.

§ 2.

Die Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche.

Die Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche ist dadurch gegeben, dass wir ein bestimmtes Blatt in jedes andere und in sich

---

*) Man vergleiche hierzu Ann. XIV, p. 463.

**) Schwarz a. a. O. Borchardt's Journal, Bd. 75, p. 316.

selbst überführen. Bei diesen Zuordnungen sollen stets contigue Blätter wieder in contigue übergehen. Dadurch wird dann jedesmal die Fläche eindeutig in sich transformirt; die Punkte der Fläche werden dabei je zu N Punkten einander zugeordnet, welche in der regulären Riemann'schen Fläche übereinander, in der stellvertretenden regulär eingetheilten Oberfläche an *„homologen Stellen"* der Gebietseintheilung liegen. Die Verzweigungspunkte der Fläche, bez. die Polygon-Eckpunkte der Flächeneintheilung bilden Punktgruppen von nur $\frac{N}{\nu_1}, \frac{N}{\nu_2} \cdots$ Punkten. Diese Punkte bleiben also bei gewissen Transformationen fest, bei denjenigen nämlich, welche die Blätter des betreffenden Cyklus in einander überführen. Demgemäss wollen wir Transformationen unserer Fläche in sich, bei denen ein Punkt der Fläche fest bleibt, als *Drehungen* um diesen Punkt bezeichnen, während wir andererseits Transformationen der Fläche in sich, bei denen keiner ihrer Punkte fest bleibt, als *Verschiebungen* bezeichnen.

Zur wirklichen Aufstellung der N Transformationen einer Fläche in sich fragen wir zunächst nach der *Periode* der einzelnen Substitutionen und untersuchen dann das Verhalten der etwa vorhandenen ausgezeichneten Punktgruppen bei diesen Transformationen. Hiernach trennen wir die einzelnen Substitutionen in unter sich *gleichberechtigte*. Eine Transformation bewirkt nämlich eine bestimmte gegenseitige Zuordnung der Punkte unserer Fläche. Jede analoge Zuordnung entspricht einer gleichberechtigten Transformation. Rein gruppentheoretisch ausgedrückt sind mit einer Substitution S alle Substitutionen $S' = T^{-1}ST$, d. i. alle aus S „transformirten" Substitutionen*) gleichberechtigt [T bezeichnet dabei irgend eine Substitution unserer Gruppe]. Handelt es sich speciell um „Drehungen" der Fläche in sich, so fragen wir nach Anzahl und Art der dabei festbleibenden Punkte. Bleiben dann bei einer Drehung von der Periode μ [deren es um einen Punkt $\varphi(\mu)$ giebt, wo φ die bekannte zahlentheoretische Function bezeichnet] gewisse a der Punkte ν**) [μ ein Theiler von ν] fest, während die übrigen Punkte ν sich in Gruppen von je μ Punkten cyklisch vertauschen, so giebt es im Ganzen $\frac{N}{a \cdot \nu}$ getrennte Punktgruppen von je a Punkten ν, deren jede bei $\varphi(\mu)$ Drehungen von der Periode μ fest

*) Man vergleiche etwa C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, p. 23 ff. Im Folgenden ist stets das Jordan'sche Werk citirt, weil dort die begrifflichen Definitionen der hier studirten gruppentheoretischen Eigenschaften zusammengestellt sind.

**) Wir verstehen dabei unter den „Punkten ν" *nur die* $\frac{N}{\nu}$ zusammengehörigen Verzweigungspunkte, in welchen für *eine* gewisse Stelle der Riemann'schen Fläche die sämmtlichen Blätter zu je ν zusammenhängen.

bleibt. Diese $\frac{N}{a \cdot \nu}$ Gruppen von $\varphi(\mu)$ Drehungen sind dann *gleichberechtigte*.

Eine hiernach angeordnete Uebersicht der N Transformationen lässt uns die Gruppe einer Fläche mit allen ihren Untergruppen erkennen. Wir wenden uns jetzt zu deren rein *geometrischem* Studium.

§ 3.

Geometrisches Kennzeichen einer Untergruppe und speciell einer „ausgezeichneten Untergruppe".

Das Studium unserer Gruppen richtet sich — im Hinblick auf die spätere Aufstellung der durch unsere Flächen definirten Irrationalitäten — hauptsächlich auf das Vorhandensein „ausgezeichneter Untergruppen"*), also auf die Frage, ob die Gruppe *einfach* oder *zusammengesetzt* ist. Im letzteren Falle haben wir die *Factoren der Composition***) und ihre gegenseitige Anordnung, die uns unmittelbar den gruppentheoretischen Aufbau unserer Irrationalität versinnlicht, zu erschliessen. Indem wir diese Untersuchungen, im Anschluss an die geometrische Definition unserer Gruppen, in geometrische Form kleiden, haben wir vor allem *die Frage nach einem geometrischen Charakteristikum einer Untergruppe überhaupt und speciell einer ausgezeichneten Untergruppe der gegebenen Gruppe* zu beantworten. Zu dem Ende betrachten wir noch weitere Deformationen unserer Riemann'schen Flächen.

Wir haben in § 1. die über der z-Ebene oder über einer Riemann'schen Fläche f N-blättrig ausgebreitete reguläre Riemann'sche Fläche durch Nebeneinanderlegen der Blätter in eine regulär eingetheilte Oberfläche verwandelt. Wir fassen jetzt gewisse *Uebergangsstadien* einer solchen Deformation ins Auge, bei denen noch nicht alle Blätter nebeneinander ausgebreitet sind, sondern dieselben theils über-, theils nebeneinander liegen. Eine solche „*Uebergangsform*" besteht also im Allgemeinen aus M Blättern, deren jedes eine gewisse Gebietseintheilung trägt. Die einzelnen Blätter, je vom Geschlechte p', hängen dabei mit einander allgemein längs gewisser Verzweigungsschnitte und längs geschlossener Curven zusammen, so dass die Uebergangsform erst als Totalität aufgefasst die ursprüngliche reguläre Fläche darstellt.

Wir richten unser Augenmerk speciell auf das Vorhandensein *regulärer Uebergangsformen*, welche wir folgendermassen definiren:

N_1 Blätter vom Geschlechte p' sind unter einander regulär ver-

---

*) Nach einer von Lie herrührenden Bezeichnung sind darunter solche Untergruppen verstanden, die mit der Gesammtheit aller Transformationen vertauschbar sind.

**) Vgl. C. Jordan, a. a. O. pag. 41 ff.

bunden; jedes Blatt ist in gleicher Weise, wie jedes andere in N_2 Gebiete der Art eingetheilt, dass die Gesammtfläche eine in $N = N_1 \cdot N_2$ Gebiete regulär getheilte Fläche darstellt.

Die N Transformationen dieser Fläche lassen sich dann zusammensetzen aus:

1. Den Substitutionen $T, T' \cdots$, welche ein gewisses Gebiet A in sämmtliche unter bez. über ihm befindlichen überführen. Wir heissen diese N_1 Substitutionen die *Verticalsubstitutionen.*

2. Den N_2 Substitutionen $S, S' \cdots$, welche dasselbe Gebiet A in sämmtliche mit ihm auf dem gleichen Blatte gelegenen überführen — den *Horizontalsubstitutionen.*

Bei den *Verticalsubstitutionen* $T, T' \cdots$ werden sämmtliche Gebiete der Fläche in darüber beziehungsweise darunter gelegene übergeführt [ohne dass darum im Allgemeinen die Gesammtheit der Gebiete *eines* Blattes in die Gesammtheit der Gebiete eines anderen Blattes übergeht]. Die Iteration und Combination der Substitutionen T, T' ergiebt stets wieder eben solche Substitutionen. *Die Verticalsubstitutionen bilden also eine geschlossene Gruppe von Operationen, eine Untergruppe der Gesammtheit.*

Für die *Horizontalsubstitutionen* gelten im Allgemeinen analoge Sätze nicht. Es gehen bei ihnen übereinanderliegende [und ebenso nebeneinanderliegende] Gebiete im Allgemeinen nicht wieder in übereinander liegende [bez. nebeneinanderliegende] über. Dass diese Substitutionen hiernach im Allgemeinen *keine* Gruppe bilden, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Wir specialisiren jetzt unsere Uebergangsformen:

Die Gebietseintheilung, welche in jedem einzelnen Blatte vorliegt, soll für sich genommen eine reguläre und die Verzweigung bez. Durchschlingung der einzelnen Blätter untereinander dabei für alle homologen Stellen dieser Eintheilung dieselbe sein, so dass wieder die reguläre Gesammtfläche aus unserer Uebergangsform resultirt. Wir wollen solche specielle Uebergangsformen, die uns in der Folge hauptsächlich beschäftigen, als *„regulär-reguläre“* bezeichnen.

Die N_2 *Horizontalsubstitutionen* bilden auch jetzt noch nicht nothwendig eine Gruppe; aber sie *definiren indirect eine Gruppe in der jetzt regulären Eintheilung des einzelnen Blattes der Uebergangsform.*

Für die *Verticalsubstitutionen* gilt jetzt der Satz:

*Die Untergruppe, welche wir in den N_1 Verticalsubstitutionen einer regulär-regulären Uebergangsform abgeschieden haben, ist eine in der Gesammtheit ausgezeichnete.**)

---

*) In meiner Dissertation sind nur die „ausgezeichneten Untergruppen“ in geometrische Betrachtung gezogen und so ist in der dortigen Terminologie [vgl. dort pag. 36 ff.] in der „regulären Uebergangsform“ eine „ausgezeichnete Untergruppe“ gekennzeichnet, während die „reguläre Uebergangsform“ in ihrer jetzigen Definition Kennzeichen überhaupt einer Untergruppe der Gesammtheit ist.

Zum Beweise machen wir eine ganz allgemeine Substitution S, welche ein Gebiet A einer Verticalreihe R_1 überführt in ein Gebiet B einer anderen Verticalschicht R_2; hierauf eine Verticalsubstitution T, welche das Gebiet B in ein neues C derselben Schichte R_2 übergehen lässt. Wenden wir dann die Substitution S rückwärts an [führen also B wieder nach A zurück], so geht das Gebiet C in ein viertes D über, *welches der ursprünglichen Verticalreihe R_1 angehört*, denn jetzt gehen auch bei den Horizontalsubstitutionen übereinanderliegende Gebiete wieder in übereinanderliegende über. Also ist $S^{-1}TS = T'$, d. h. die Gruppe der Verticalsubstitutionen eine in der Gesammtheit ausgezeichnete.

Im folgenden Paragraphen wird uns ein specieller Fall dieser Uebergangsformen beschäftigen, dadurch charakterisirt, dass dabei nicht nur die Verticalsubstitutionen, sondern auch die Horizontalsubstitutionen für sich genommen eine Gruppe bilden.

§ 4.

Zerfallende Gruppen.

Bilden im speciellen Falle auch die Horizontalsubstitutionen einer regulär-regulären Uebergangsform eine Gruppe, so ist diese ebenso, wie die Gruppe der Verticalsubstitutionen in der Gesammtheit ausgezeichnet und mit jener gleichgestellt. *Wir heissen dann die Gruppe der Gesammtfläche zerfallend.* Ihre Substitutionen setzen sich nämlich zusammen:

1. *Aus der Gruppe der Verticalsubstitutionen*, bei welcher die einzelnen Blätter der Uebergangsform *in ihrer Totalität* vertauscht werden.

2. *Aus der Gruppe der Horizontalsubstitutionen*, bei denen die einzelnen Blätter der Uebergangsform je in gleicher Weise *in sich* transformirt werden.

Dann ist es möglich, unserer Uebergangsform U_1 eine zweite U_2 an die Seite zu stellen, in der die Horizontalsubstitutionen dort als Verticalsubstitutionen hier erscheinen und umgekehrt. Die Gesammtgruppe wird dann auch erzeugt, wenn wir die Gruppen der Horizontalsubstitutionen bezüglich von U_1 und von U_2 mit einander combiniren. Nehmen wir dem entsprechend ein Blatt der U_1 und ebenso ein Blatt der U_2 heraus, so sind dies für sich genommen zwei in N_1 bez. N_2 Gebiete regulär eingetheilte Flächen F_1 und F_2, durch deren „Simultanstellung" die $N = N_1 \cdot N_2$ blättrige Fläche F sich erzeugen lässt. Zu dem Ende denken wir uns die F_1 und F_2 so „zurück" deformirt, dass die N_1 bez. N_2 Gebiete wieder übereinander zu liegen kommen. Sie bilden dann zwei Flächen, die über der z-Ebene oder allgemeiner über einer Riemann'schen Fläche f, in gleicher Weise wie die Ge-

sammtfläche F, ausgebreitet sind. Durch diese Umformung liegen jetzt die homologen Stellen der Flächen F_1, F_2 und F übereinander, und dadurch ist es möglich, die Combination der Transformationsgruppen von F_1 und F_2, durch welche wir die Gruppe der F erhalten, auch *geometrisch* zu bewerkstelligen. Die N_1 Transformationen von F_1 in sich stellen sich nämlich durch ebensoviele „*Transformationswege*" dar, welche von einem Ausgangsblatt in sämmtliche andere Blätter führen. Das Gleiche gilt für die N_2 Transformationen der Fläche F_2. Die Combination dieser Transformationswege ergiebt also die $N_1 \cdot N_2 = N$ Substitutionen, durch welche die Fläche F in sich übergeht. Wir können unmittelbar sagen:

Die Fläche F entsteht durch die Uebereinanderlagerung der beiden Flächen F_1 und F_2.

Insbesondere können wir die Verzweigung von F unmittelbar aus derjenigen von F_1 und F_2 ablesen. Hängen nämlich an einer Stelle die Blätter von F_1 zu je ν_1, die von F_2 zu je ν_2 zusammen, so sind dort die Blätter von F zu je ν verzweigt, wo ν das kleinste gemeinschaftliche Multiplum von ν_1 und ν_2 ist. Das Gleiche gilt bezüglich der Durchschlingungen der Blätter.

Umgekehrt können wir jetzt auch durch Uebereinanderlagerung zweier regulärer Riemann'scher Flächen F_1 und F_2 von N_1 bez. N_2 Blättern eine neue reguläre Fläche F erzeugen, welche dann eine zerfallende Gruppe definirt. Die Verzweigung und Durchschlingung der Blätter setzt sich dabei in der eben geschilderten Weise zusammen aus Verzweigung und Durchschlingung der beiden erzeugenden Flächen. *Diese Auffassung einer zerfallenden Gruppe ist jedoch eine allgemeinere als die soeben betrachtete.*

Die Blätterzahl der erzeugten Fläche F wird nämlich nur dann, wenn die beiden Flächen von einander „unabhängig" sind, $N = N_1 \cdot N_2$ sein.

Können wir aber aus F_1 und F_2 je eine regulär-reguläre Uebergangsform ableiten, für welche die reguläre Eintheilung der Blätter in beiden Formen dieselbe ist und der Art, dass die in beiden Eintheilungen homologen Stellen bei der Uebereinanderlagerung sich decken, so kommt, wenn wir hier durch Combination der Transformationswege beider Flächen unsere resultirende Fläche bilden, nur eine Fläche von der Blätterzahl $N = \frac{N_1 \cdot N_2}{P}$, wenn P die Ordnung jener durch die reguläre Gebietseintheilung definirten Fläche ist; denn ersichtlich setzen sich die Wege, welche wir in den beiden regulär eingetheilten Flächen unserer Uebergangsformen ziehen, immer nur zu Wegen einer ebensolchen Fläche zusammen und so treten die zugehörigen Substitutionen nicht zweimal-, sondern nur einmalzählend in der Gesammtheit auf.

Eine derartige Uebereinanderlagerung zweier Flächen mag als eine *„Uebereinanderlagerung mit Reduction"* bezeichnet sein. Wir nennen dabei die Gruppe der entstandenen Fläche ebenfalls eine zerfallende, und zwar *„uneigentlich zerfallend"* in die Gruppen von F_1 und F_2.

§ 5.

Die successive Decomposition einer Gruppe, die durch eine reguläre Riemann'sche Fläche definirt ist.

Die in den vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Hülfsmittel gestatten uns jetzt, alle Fragen, welche die Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche betreffen, auf geometrischem Wege, durch eine endliche Anzahl von Versuchen, zu beantworten.

Wir erhalten alle Untergruppen der gegebenen Gruppe durch die Bildung aller möglichen regulären Uebergangsformen der zugehörigen Riemann'schen Fläche. Die gegenseitige Stellung dieser Untergruppen erhellt aus dem Verhalten jener Uebergangsformen zu einander.

Für das Studium der *Decomposition* einer Gruppe fällt das Hauptgewicht auf eine Aufsuchung der *ausgezeichneten Untergruppen*, also *die Frage nach regulär-regulären Uebergangsformen.*

Liegt uns nun in einer regulären Riemann'schen Fläche eine Gruppe vor, deren Decomposition wir suchen, so haben wir der Reihe nach die folgenden Schritte auszuführen:*)

1. *Wir untersuchen, ob die Gruppe einfach oder zusammengesetzt ist.* Eine Gruppe ist einfach, wenn sie [ausser der identischen Substitution] keine ausgezeichnete Untergruppe besitzt, zusammengesetzt im entgegengesetzten Falle. *Gelingt es also nicht, aus einer regulären Riemann'schen Fläche eine regulär-reguläre Uebergangsform abzuleiten, so ist die zugehörige Gruppe einfach, entgegengesetzten Falles ist sie zusammengesetzt.* Die Untersuchung einer einfachen Gruppe ist damit, vom gruppentheoretischen Standpunkt, zunächst abgeschlossen. Für die *zusammengesetzte Gruppe* fragen wir weiter:

2. *Ist die Gruppe zerfallend oder nichtzerfallend?* Gelingt uns die Erzeugung der unsere Gruppe definirenden Riemann'schen Fläche F in der § 4. gemeinten Weise durch Uebereinanderlagerung zweier regulären Riemann'schen Flächen F' und F'', so ist die Gruppe zerfallend in die Gruppen dieser beiden Flächen. An diese wendet sich dann gleicherweise die Untersuchung, und indem wir diesen Process soweit möglich fortsetzen, erhalten wir eine Reihe von Flächen $F_1, F_2, F_3, \cdots$, welche jetzt *nichtzerfallende* Gruppen definiren und

*) § 11. der Diss. inaug.

deren Uebereinanderlagerung die Fläche F erzeugt. *Wir heissen dann diese Flächen die Componenten, in welche die vorgelegte Gruppe zerfällt.* Die Blätterzahlen N_1, N_2, N_3, $\cdots$ derselben mögen als *Factoren des Zerfallens* bezeichnet sein. Dabei ist $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdots = N$, sofern die Uebereinanderlagerung eine einfache ist, und wir heissen dann die Gesammtgruppe *eigentlich zerfallend.* Tritt jedoch [und dies ist die *allgemeinere Art* der Uebereinanderlagerung] eine „Reduction" in dem in § 4. gemeinten Sinne ein, so ist $N = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdots}{P^{p-1} \cdot Q^{q-1} \cdots}$, wenn P, $Q \cdots$ die Ordnungen jener gemeinsamen Flächeneintheilungen, p, $q \cdots$ die Anzahl bezeichnet, in welcher sie sich in den Componenten der Fläche finden; wir bezeichnen dann die Gruppe als *uneigentlich zerfallend* in die Flächen F_1, F_2, $F_3 \cdots$

Die Zerlegung einer Fläche in ihre nichtzerfallenden Bestandtheile kann nun entweder nur auf *eine* oder auf *mehrere* Arten möglich sein, und wir wollen darnach *ein-* und *mehrdeutig zerfallende* Gruppen unterscheiden; dabei kann es auch vorkommen, dass gemäss einer Zerlegung die Gruppe eigentlich zerfallend ist, während sie sich gemäss einer anderen als uneigentlich zerfallend darstellt.

Nach Zerlegung der Gruppe in ihre *nichtzerfallenden* Bestandtheile haben wir

3. *die Frage nach der Einfachheit bez. der Zusammensetzung dieser letzteren* zu beantworten. Ist eine Gruppe zusammengesetzt, so können wir*) eine Reihenfolge von Untergruppen aufstellen, deren jede ausgezeichnet in der unmittelbar vorhergehenden enthalten ist und dabei nicht gleichzeitig Theil einer dort enthaltenen umfassenderen ausgezeichneten Untergruppe.**)

Geometrisch suchen wir also zunächst eine regulär-reguläre Uebergangsform zu der regulären Riemann'schen Fläche der Art, dass die Gruppe ihrer Verticalsubstitutionen in keiner *„umfassenderen"* Uebergangsform dieser Fläche in Form von Verticalsubstitutionen enthalten ist. Die reguläre Riemann'sche Fläche, welche diese Uebergangsform, von der Gebietseintheilung des einzelnen Blattes abgesehen, bildet, mit anderen Worten, die in der Ausgangsfläche enthaltene ausgezeichnete Untergruppe, untersuchen wir dann analog bezüglich etwaiger ausgezeichneter Untergruppen u. s. f.

Dabei kann es vorkommen, dass in einer der so successive auftretenden Flächen *mehrere Uebergangsformen* enthalten sind, *deren*

---

*) C. Jordan, a. a. O. pag. 41ff.

**) Die Herstellung einer solchen Reihenfolge ausgezeichneter Untergruppen ist selbstverständlich auch für jede *zerfallende* Gruppe möglich; doch wird man, wenn es sich um die systematische Zerlegung der Gruppe handelt, diese zweckmässiger Weise immer erst in ihre *nicht zerfallenden* Bestandtheile trennen.

keine die andere umfasst; dann greifen wir zunächst irgend eine derselben zu weiterer Decomposition heraus; ebenso mit den anderen verfahrend, erhalten wir dann *mehrere Reihen von Zerlegungen, deren keine vor der anderen bevorzugt ist.* Wir wollen dann (analog wie oben bei den zerfallenden Gruppen) sagen, die betr. Gruppe lässt eine *mehrdeutige Decomposition* zu. Ferner kann eintreten, dass gewisse Gruppen unserer Reihenfolge ihrerseits wieder *zerfallende* sind [ohne dass darum die Gesammtgruppe eine zerfallende zu sein braucht]. Wir zerlegen sie dann in ihre nichtzerfallenden Bestandtheile, deren jeder für sich weiter zu discutiren ist.

Die Zergliederung der Gruppe erreicht ihr Ende, wenn wir bei *einfachen* Gruppen angekommen sind, welche also nur die identische Substitution [1] ausgezeichnet enthalten.

Die Blätterzahlen $N_1, N_2, \cdots, N_k$, 1 der successive gebildeten Uebergangsformen sind unmittelbar die Ordnungen der successive ausgezeichneten Untergruppen; die Zahlen $\frac{N}{N_1}, \frac{N_1}{N_2}, \cdots, \frac{N_k}{1}$ geben dann die Zahl der Horizontalsubstitutionen jeder Uebergangsform an: *Es sind die Factoren der Composition unserer Gruppe.* Jene Gruppen aber, welche in unseren successiven Uebergangsformen durch die regulären Eintheilungen je der einzelnen Blätter, diese für sich als reguläre Riemann'sche Flächen betrachtet, definirt sind, bilden die *einfachen* Gruppen, aus deren Composition die Gesammtgruppe entsteht.

Die *Reihenfolge* der Factoren der Composition giebt uns die Reihenfolge der Zerlegung unserer Gruppe an. Die oben auch geometrisch erkannte *Mehrdeutigkeit dieser Zerlegung* spricht sich in der *Vertauschbarkeit gewisser Factoren der Composition* aus. Ergab eine der Uebergangsformen eine *zerfallende* Gruppe, so stellen sich die Factoren der Composition für die Zerlegung derselben in ihre nichtzerfallenden Bestandtheile als gleichmässig berechtigte *neben einander.* Dabei ist noch eine mögliche Vieldeutigkeit dieser Zerlegung, sowie die Möglichkeit einer Reduction bei der Uebereinanderlagerung (pag. 483) zu beachten.

In der auf der nebenstehenden Seite abgedruckten Tafel stellen wir in gedrängten Definitionen die Gesichtspunkte zusammen, welche sich aus unseren geometrischen Betrachtungen für die Discussion einer Gruppe ergeben haben, die uns in Form einer regulären Riemann'schen Fläche vorliegt.

Um jetzt ein vollständiges Bild der Composition einer zu untersuchenden Gruppe G zu entwerfen, stellen wir für sie *zwei Tabellen* auf: die eine, Tabelle I., zählt die regulären Flächen auf, welche in den successive auseinander abgeleiteten regulär-regulären Uebergangsformen als Definitionen der ausgezeichneten Untergruppen auftreten; Tabelle II. giebt jene einfachen Gruppen, denen das System

[Zu pag. 486.]

Gruppe G,

definirt durch eine reguläre Riemann'sche Fläche F.

Einfache Gruppe.	**Zusammengesetzte Gruppe.**
Die Fläche F besitzt *keine regulär-reguläre Uebergangsform.*	Die Fläche F besitzt *wenigstens eine regulär-reguläre Uebergangsform.*

Zusammengesetzte Gruppe:

Nichtzerfallende Gruppe.	**Zerfallende Gruppe.**
Die Fläche F kann *nicht* durch „*Uebereinanderlagerung*" von Flächen $F_1, F_2 \cdots$ erzeugt werden.	Die Fläche F kann durch „*Uebereinanderlagerung*" mehrerer Flächen $F_1, F_2 \cdots$ erzeugt werden.

Nichtzerfallende Gruppe:

Gruppe mit eindeutiger Decomposition.	**Gruppe mit mehrdeut. Decomposition.**
Es existirt *nur* „*eine umfassendste Uebergangsform.*"	Es existiren *mehrere* gleichgestellte „*umfassendste Uebergangsformen.*"

Weitere Untersuchung der durch die *Verticalsubstitutionen* der Uebergangsformen definirten Gruppen.

Zerfallende Gruppe:

Eindeutig zerfallende Gruppe.	**Mehrdeutig zerfallende Gruppe.**
Es existirt nur *eine* Reihe von „*componirenden Flächen*" $F_1, F_2 \cdots$	Es existiren *mehrere* Reihen von „*componirenden Flächen*" $F_1, F_2 \cdots$

Uneigentliches Zerfallen.	**Eigentliches Zerfallen.**
Die Uebereinanderlagerung der Flächen $F_1, F_2 \cdots$ ist eine „*Uebereinanderlagerung mit Reduction.*"	Die Uebereinanderlagerung der Flächen $F_1, F_2 \cdots$ ist eine „*Uebereinanderlagerung ohne Reduction.*"

Weitere Untersuchung der *nichtzerfallenden Bestandtheile* unserer Gruppe.

der jedesmaligen Horizontalsubstitutionen entspricht und welche in der regulären Eintheilung der Blätter der Uebergangsformen vorliegen.

In beiden Tabellen, deren letztere uns unmittelbar auch die Factoren der Composition ergiebt, charakterisiren wir den gruppentheoretischen Aufbau der Gesammtfläche auch noch durch die Stellung der einzelnen Glieder. Dabei sind für Tabelle I. Flächenformen *übereinander gestellte*, wenn die eine Fläche als ausgezeichneter Theil in der vorhergehenden enthalten ist, *nebeneinandergestellte*, wenn die betr. Formen als Componenten des Zerfallens für die nächst höhere Form, die dann eine zerfallende Gruppe definirt, erscheinen. Der Aufbau wird sich da verästeln, wo wir auf mehrere Weisen aus einer Fläche ausgezeichnete Untergruppen ausscheiden können, deren keine die andere umfasst. Dann ist die Decomposition auf mehrere Weisen möglich, die zwar dieselben Zahlen als compositionelle Factoren ergeben*), aber in verschiedener Anordnung und durch verschiedene Flächen definirt. Die Anordnung der Tabelle II. läuft — weil für jede Uebergangsform in I. die reguläre Verzweigung und Durchschlingung der Blätter untereinander, in II. die reguläre Eintheilung des einzelnen Blattes gegeben ist — mit der Anordnung der Tabelle I. parallel.

§ 6.

Beispiele.

Wir wollen die hiermit exponirten Methoden der Gruppenuntersuchung an einigen speciellen regulären Riemann'schen Flächen näher verfolgen, welche wir späterhin auch als Beispiele der algebraischen Formulirung unseres Problems verwenden.

Erstes Beispiel.

Wir untersuchen zunächst die Gruppe einer 96-blättrigen regulären Fläche, deren einzelne Blätter an einer Stelle zu je zweien, an einer zweiten zu je dreien, an einer dritten zu je acht zusammenhängen. Diese Angaben über die Verzweigung zusammen mit den Anforderungen der völligen Regularität bestimmen in unserem Falle die Fläche eindeutig, was allgemein keineswegs statthat.**)

In dem § 1. entwickelten Sinne kommt als geometrische Repräsentation unserer Fläche das in Fig. 1 (der Tafel I) gezeichnete Netz, welches wir uns in der beigeschriebenen Weise geschlossen zu denken haben. Die Fläche besitzt das Geschlecht $p = 3$ und wir wollen sie Kürze halber bezeichnen als Fläche $[2, 3, 8]$; $N = 96$.

---

*) Nach dem Satz von der Erhaltung der Factoren der Composition; vergl. C. Jordan, a. a. O. p. 42.

**) Man vergleiche etwa die in meiner Dissertation angeführten Beispiele pag. 26ff. und pag. 60ff., sowie die Discussion der Fälle $p = 1$ in Theil III. der vorliegenden Arbeit und das auf pag. 491 u. 499 Anm. erwähnte einfachste Beispiel.

Die 96 Transformationen nun, durch welche unsere Fläche in sich übergeht, trennen sich in folgende:

a) in Drehungen um die Punkte 8.

Bei diesen trennen wir wieder:

α) Die $6 \cdot 4$ Drehungen von der Periode 8, bei denen jedesmal 2 Punkte 8 fest bleiben.

β) Die $3 \cdot 2$ Drehungen von der Periode 4, bei denen jedesmal 4 Punkte 8 fest bleiben.

γ) Die $3 \cdot 1$ Drehungen von der Periode 2, bei denen jedesmal 4 Punkte 8 fest bleiben.

b) in $16 \cdot 2$ Drehungen um die Punkte 3 (von der Periode 3), bei denen jedesmal 2 Punkte 3 fest bleiben.

c) In $12 \cdot 1$ Drehungen um die Punkte 2 (von der Periode 2), bei denen jedesmal 4 Punkte 3 fest bleiben.

Fügen wir hierzu noch

d) 18 Verschiebungen unserer Fläche in sich, je von der Periode 4, und endlich

e) die identische Transformation (von der Periode 1), bei der jedes Blatt sich selbst zugeordnet ist,

so haben wir damit eine vollständige Tabelle unserer 96 Transformationen.

Die Gruppe, die sich hierin kennzeichnet, ist eine zusammengesetzte. Ihre Zergliederung wird in folgenden geometrischen Ueberlegungen klar:

1. Unsere Fläche besitzt eine umfassendste regulär-reguläre Uebergangsform, bestehend aus 48 Blättern [je vom Geschlechte Null], die unter sich durch die reguläre Verzweigung [3, 3, 4]*) verbunden sind; dabei ist auf jedem Blatte eine reguläre Eintheilung nach dem „Kreistheilungstypus"**) [2, 2]; $N = 2$ derart getroffen, dass einer der Eckpunkte 2 auf die Stelle zu liegen kommt, an welcher die Blätter zu vieren verzweigt sind, während die Verzweigungspunkte 3 der Fläche auf homologen Stellen der Gebietseintheilung liegen. Fig. 2 (Tafel I) zeigt die reguläre Eintheilung eines Blattes, wobei die markirten Punkte der Zeichnung die Verzweigungsstellen der Blätter unter sich andeuten. Bei A hängen die Blätter zu vieren, bei B und C zu je dreien zusammen. Die Gesammtfläche stellt so unsere ursprüngliche Fläche [2, 3, 8]; $N = 96$ dar, während wir in der Gruppe der Fläche [3, 3, 4]; $N = 48$ eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit erkennen.

2. Die Fläche (3, 3, 4); $N = 48$ besitzt eine umfassendste Uebergangsform in Gestalt einer 16-blättrigen Fläche, deren jedes Blatt,

*) Wir halten an der zu Anfang des Paragraphen eingeführten Art der Bezeichnung für die Verzweigung einer Fläche fest.

**) Wegen dieser Ausdrucksweisen vergl. z. B. Ann. XII, p. 167.

vom Geschlechte Null, die Eintheilung des Kreistheilungstypus [3, 3]; $N=3$ trägt. Dabei sind die Blätter unter sich an drei homologen Stellen der Gebietseintheilung zu je vieren verzweigt [Fig 3, Tafel I]. Dadurch ist eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit ausgeschieden, charakterisirt durch die Fläche [4, 4, 4]; $N=16$.

Diese Untergruppe ist dabei auch ausgezeichnet in unserer ursprünglichen Fläche [2, 3, 8]; $N=96$. Diese letztere Fläche besitzt nämlich eine Uebergangsform [die natürlich keine „umfassendste" ist], in welcher die einzelnen Blätter [vom Geschlechte Null] eine Eintheilung nach dem „Doppelpyramidentypus" [3, 2, 2]; $N=6$ tragen, während sie, 16 an Zahl, unter einander an drei homologen Eckpunkten 2 zu je vieren verzweigt sind [Fig. 4, Tafel I].

3. Die Gruppe der letzten Fläche ist nun eine zerfallende, indem wir sie erzeugen können durch Uebereinanderlagerung zweier Riemann'scher Flächen, deren jede einen Kreistheilungstypus [4, 4]; $N=4$ repräsentirt. Bei der ersten dieser Flächen findet dabei die Verzweigung der Blätter zu vieren an zwei Stellen A und B statt, während die Blätter der zweiten Fläche an zwei Stellen B und C untereinander verzweigt sind. So entsteht durch die Uebereinanderlagerung die 16blättrige Fläche, deren Blätter bei A, B und C zu vieren verzweigt sind. Wir drücken die Uebereinanderlagerung kurz aus durch die Schreibweise:

$$\begin{array}{ccccl} & A & B & C & \\ & [4, & 4] & \cdot\,; & N=4 \\ & \cdot & [4, & 4]; & N=4 \\ \hline & [4, & 4, & 4]; & N=16. \end{array}$$

4. Die Zusammensetzung jeder der beiden letzten cyklischen Gruppen ist sofort klar. Sie spricht sich für jede derselben aus in einer zweiblättrigen Uebergangsform, deren jedes Blatt (vom Geschlechte Null) eine Eintheilung nach dem Kreistheilungstypus (2, 2); $N=2$ trägt und wobei diese Blätter an den Eckpunkten jener Eintheilung untereinander verzweigt sind.

5. Statt, wie eben, die Zerfällbarkeit der Gruppe [4, 4, 4]; $N=16$ zu benützen, könnten wir die Zerlegung der Gruppe auch durch successives Abscheiden ausgezeichneter Untergruppen bewerkstelligen. Diese sind der Reihe nach definirt durch die Flächen

$$[2, 2, 4, 4];\ N=8,$$
$$[4, 4, 4, 4];\ N=4.$$

Die Zerlegung der letzten Gruppe charakterisirt sich in einer zweiblättrigen Uebergangsform, deren jedes Blatt, vom Geschlechte eins, die reguläre Eintheilung [2, 2, 2, 2]; $N=2$ trägt, während gleichzeitig die beiden Blätter, die wir uns als zwei übereinander liegende

Ringe denken, an jenen Eckpunkten 2 unter einander verzweigt sind. Beide Ringe sind dabei noch längs einer Meridian- und einer Breitencurve ineinander geschlungen*). Fig. 5 stellt die so eingetheilten und verzweigten Ringe aufgeschnitten und in die Zeichenebene ausgebreitet dar. Die Durchschlingung ist dabei in der kreuzweisen Zusammenheftung der Blätter ersichtlich.

Die Zerlegung der Fläche [2, 2, 4, 4]; $N = 8$ lässt sich noch durch die Bemerkung modificiren, dass ihre Gruppe zerfallend ist. Wir können die Fläche erzeugen durch folgende Uebereinanderlagerung:

$$\begin{array}{l} \quad [2,\ 4,\ 4];\ N = 4 \\ \underline{[2,\ 2]\ \ .\ \ .\ ;\ N = 2} \\ [2,\ 2,\ 4,\ 4];\ N = 8. \end{array}$$

Demgemäss leitet sich aus ihr (vergl. p. 482) neben der oben gegebenen Uebergangsform U_1, welche die Fläche [4, 4, 4, 4]; $N = 4$ ergab, noch eine zweite zweiblättrige Uebergangsform U_2 ab. Jedes Blatt derselben, vom Geschlechte eins [wir denken es uns wieder als einen Ring], trägt dabei die Eintheilung [2, 4, 4]; $N = 4$. Dabei sind die Blätter an vier homologen Stellen der Eintheilung untereinander verzweigt und ausserdem noch längs zweier Curven, der Meridian- und Breitencurve des Ringes, ineinander geschlungen. In Figur 6 der I. Tafel sind beide Ringe aufgeschnitten und übereinanderliegend gezeichnet, wobei die Durchschlingung der Ringe wieder durch die kreuzweise Zusammenheftung der Blätter zu Stande kommt.

6. Wollen wir nun die Zerlegung unserer Gruppe übersichtlich darstellen, so bilden wir für die Reihenfolge unserer Uebergangsformen jene in § 5. pag. 486 erwähnten Tabellen, welche für unser Beispiel auf pag. 492 zusammengestellt sind. Die erste giebt uns die ausgezeichneten Untergruppen, die als Verticalsubstitutionen der Uebergangsformen gegeben sind, die zweite die jedesmal getroffene reguläre Eintheilung der Blätter dieser Uebergangsformen und damit die in den Horizontalsubstitutionen definirten Gruppen.

Zweites Beispiel.

In der vorigen Reihe von Flächen boten sich, in einfachster Gestalt, zwei Beispiele von regulären Riemann'schen Flächen, deren Blätter (vom Geschlechte eins) gleichzeitig verzweigt und ineinander geschlungen waren (Fig. 5 u. 6 der Tafel I). Wir wollen noch in Kürze eine Fläche

*) Lassen wir diese Durchschlingung der beiden Ringe fort, so ist die nun entstandene Fläche gleichfalls eine reguläre. Eine Betrachtung der beiden, so gegebenen Flächen [4, 4, 4, 4]; $N = 4$ zeigt, dass dieselben zwar *die gleiche Gruppe* besitzen, dass diese aber bei beiden *in verschiedener Weise* zu Stande kommt. Man vergl. die auf pag. 499 gegebene algebraische Formulirung beider Flächen.

Uebersicht

der Decomposition der Gruppe unserer regulären Riemann'schen Fläche

$[2, 3, 8], \; N = 96.$

[Vergleiche pag. 491, Ziffer 6.]

I.

$[2,3,8];\; N=96$

|

$[3,3,4];\; N=48$

|

$[4,4,4];\; N=16$

zerfällbar in

$[4,4];\; N=4$	$[4,4];\; N=4$
$[2,2];\; N=2$	$[2,2];\; N=2$
[1]	[1]

oder zusammengesetzt aus

$[2,2,4,4];\; N=8$

zerfällbar in		oder zusammengesetzt aus
$[2,4,4];\; N=4$	$[2,2];\; N=2$	$[4,4,4,4];\; N=4$
$[2,2,2,2];\; N=2$	[1]	$[2,2,2,2];\; N=2$
[1]		[1]

II.

$[2,2];\; N=2$

|

$[3,3];\; N=3$

$[2,2];\; N=2$	$[2,2];\; N=2$
$[2,2];\; N=2$	$[2,2];\; N=2$

$[2,2];\; N=2$

		$[2,2];\; N=2$
$[2,2];\; N=2$	$[2,2];\; N=2$	$[2,2,2,2];\; N=2$
$[2,2,2,2];\; N=2$		$[2,2,2,2];\; N=2$

Die gegenseitige Anordnung von Tabelle I und II ist folgende:

Um von einer Gruppe A der in I aufgezählten Reihenfolge von Gruppen zu der nächsten, in A enthaltenen, ausgezeichneten Untergruppe B zu gelangen, ist jedesmal diejenige Gruppe der Tabelle II zu „adjungiren", welche mit B correspondirt.

erwähnen, deren Blätter *nur längs geschlossener Curven* miteinander zusammenhängen:

Eine Fläche vom Geschlechte $p = 2$, die wir etwa als Doppelring [vergl. Fig. 7 der Tafel I] uns vorstellen können, sei doppelt überdeckt. Wenn wir die beiden Blätter längs geschlossener Curven ineinander übergehen lassen, haben wir in einfachster Form eine regulär verschlungene Riemann'sche Fläche vom Geschlechte $p = 3$.

Auf dem Ringe $p = 2$ unterscheiden wir nun *vier* wesentlich verschiedene Durchschlingungscurven [etwa die in der Figur gezogenen]. Indem wir nun die Blätter längs einer dieser Curven oder längs zwei, drei, vier derselben ineinanderschlingen, entstehen lauter *wesentlich von einander verschiedene* regulär verschlungene Flächen $p = 3$. Es kommt also der Satz: *Es giebt über dem gegebenen Doppelringe ausgebreitet fünfzehn verschiedene Flächen der gemeinten Art.*

Selbstverständlich besteht die „Gruppe" dieser Flächen in der Vertauschung der beiden Blätter, welche als eine Verschiebung der Fläche in sich zu bezeichnen ist. Wir kommen im algebraischen Theil auf das Beispiel zurück.

Zu weiteren Gruppenuntersuchungen werden uns die im Abschnitt III. behandelten regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$ Anlass bieten. Weiter mag hier auf die ausführlich behandelten Beispiele meiner Inauguraldissertation verwiesen sein.

II. Abschnitt.

Algebraischer Theil des Problems.

§ 7.

Die algebraischen Beziehungen im Allgemeinen.

Ehe wir speciell zur Aufstellung der Irrationalitäten übergehen, die durch unsere regulären Riemann'schen Flächen definirt sind, formuliren wir allgemein die algebraischen Beziehungen, welche uns in den verschiedenen Gestalten, die wir einer Riemann'schen Fläche ertheilt haben, vorliegen.

Dem Umstande entsprechend, dass wir es hier nur mit *regulären Riemann'schen Flächen* zu thuen haben, sind, wie schon in der Einleitung erwähnt, alle unsere Gleichungen *Galois'sche Gleichungen* mit einem oder mehreren Parametern. Jede Wurzel η_i derselben drückt sich also durch jede andere η_k und übrigens die Parameter rational aus.

Wir betrachten nun Riemann'sche Flächen F, sofern sie sich über der complexen Ebene z und insofern sie sich über einer anderen Riemann'schen Fläche f, vom Geschlechte p, ausbreiten. Diese letzteren

Flächen f denken wir uns dabei am einfachsten durch Auflösung ihrer Verzweigungspunkte als „frei im Raume" gelegene Riemann'sche Flächen ausgebreitet (vergl. § 1.). Dann haben wir bei den über der Ebene z oder, was gleichbedeutend, über einer Riemann'schen Fläche f vom Geschlechte $p = 0$ ausgebreiteten Flächen auf die Verzweigung, bei den über einer allgemeinen Riemann'schen Fläche f [deren Geschlecht $p > 0$ ist] ausgebreiteten Flächen auf Verzweigung und Verschlingung der einzelnen Blätter zu achten.

Im ersteren Falle giebt uns eine complexe Variable z eindeutig den Ort in der Ebene an und diese führen wir als unabhängig Variable ein. Im zweiten Falle bedarf es zur Punktbestimmung auf f *zweier* Variablen y, z. Zwischen diesen besteht eine Relation $f[y, z] = 0$, die, sofern wir darin z als unabhängig Variable auffassen, eben unsere Fläche f definirt. Ueber dieser breitet sich die Fläche $F(\eta, y, z) = 0$ aus, bei der es nur auf die Verzweigung und Durchschlingung von η in Bezug auf $f(y, z) = 0$ ankommt.

So definirt z. B. $F(\eta, y, z) = 0$ eine völlig unverzweigte und nur verschlungene Fläche, wenn die Verzweigungen für η in Bezug auf z in Ort und Ordnung mit denen von y in Bezug auf z übereinstimmen. Es mag hierbei noch bemerkt sein, dass wir, geometrisch sowohl wie analytisch, die Durchschlingung zweier Blätter uns entstanden denken können durch das Zusammenrücken zweier Verzweigungspunkte, welche durch einen nicht zusammenziehbaren Verzweigungsschnitt verbunden sind. Es fällt dabei die Verzweigung fort, während doch die Blätter längs jenes Schnittes in einander übergehen.

§ 8.

Algebraische Formulirung für die Decomposition der Gruppe einer regulären Riemann'schen Fläche.

Wir wenden uns jetzt dem Probleme zu, eine reguläre Riemann'sche Fläche durch eine Gleichung mit einem bez. mit zwei Parametern darzustellen. Zu dem Ende gehen wir auf die geometrische Methode zurück, mit deren Hülfe wir die Zusammensetzung der Gruppe einer Riemann'schen Fläche aus einer Reihe von einfachen Gruppen studirt haben. Sie bedarf nur der algebraischen Umsetzung, um auch sofort die Zusammensetzung der Irrationalität jener Riemann'schen Fläche aus einer Reihe einfacher Irrationalitäten der Art und Form nach zu ermöglichen.

1. Algebraische Darstellung einer regulär-regulären Uebergangsform.

Eine regulär-reguläre Uebergangsform war definirt als reguläre Riemann'sche Fläche F, deren einzelnes Blatt selbst eine reguläre

Eintheilung der Art trug, dass die „Gesammtfläche“ eine reguläre war. Von der Gruppe der Gesammtfläche ist damit eine gewisse Untergruppe abgespalten, welche durch die reguläre Blättereintheilung definirt ist. *Algebraisch ausgesprochen ist von der Gesammtirrationalität ein Theil, welcher der regulären Blättertheilung entspricht, abgesondert.* Indem wir dort von „Horizontalsubstitutionen“ absehen, bleibt eine Gruppe von Verticalsubstitutionen übrig, die in der Gesammtheit ausgezeichnet ist: *indem wir hier die Irrationalität, welche der regulären Blatteintheilung zukommt, adjungiren, reduciren wir die Gesammtirrationalität auf die Irrationalität, welche jener Gruppe von Verticalsubstitutionen entspricht.* Zur algebraischen Formulirung trennen wir *zwei Fälle:*

a) *Das Geschlecht des einzelnen Blattes der Uebergangsform ist gleich Null.*

Es definire dann $F(\eta, y) = 0$ die Riemann'sche Fläche F, von der Eintheilung der Blätter abgesehen. Fügen wir eine Gleichung $f(y, z) = 0$ hinzu, wo z eine *eindeutige* Function von y, und fragen nach der Verzweigung von η in Bezug auf z, so ist durch die zugetretene Function f eine Spaltung jedes einzelnen Blattes der ursprünglichen Fläche F bewirkt. Ergiebt dann die Verzweigung von y in Bezug auf z gerade jene reguläre Riemann'sche Fläche f, welche uns in der obigen regulären Eintheilung jedes Blattes von F vorliegt, so bildet die Verzweigung von η in Bezug auf z gerade die Gesammtfläche unserer regulär-regulären Uebergangsform. Dabei müssen selbstverständlich die Constanten für beide Flächen so bestimmt sein, dass die Eintheilung f des einzelnen Blattes der Uebergangsform in der geometrisch verlangten Weise erfolgt. Die Möglichkeit einer solchen Bestimmung folgt aber eben aus dem Vorhandensein der Uebergangsform, sofern wir den Riemann'schen Satz, dass zu jeder Riemann'schen Fläche eine Function gehört, für gültig erachten.

b) *Das Geschlecht des einzelnen Blattes der Uebergangsform sei grösser als Null.*

Eine solche Fläche stellt sich, wenn wir von der Eintheilung eines Blattes zunächst absehen, mit Hülfe zweier Parameter (§ 7.) in der Form $F(\eta, y, z) = 0$ dar und dabei besteht zwischen y und z noch eine Relation $f(y, z) = 0$, welche jenes einzelne Blatt bezeichnet. Formuliren wir jetzt — und auf Grund jener obigen Riemann'schen Principien ist dies möglich — diese Relation zwischen y und z gerade so, dass sie die reguläre Eintheilung f definirt, welche in der Uebergangsform auf jedem Blatte getroffen ist, so stellt analog wie vorhin die Beziehung zwischen η und z die Gesammtfläche dar. Hier ist aber noch eine Erweiterung zuzufügen. Die auf jedem Blatte der F getroffene Eintheilung kann selbst der Art sein, dass die einzelnen

Gebiete derselben einen höheren Zusammenhang als 1 haben; d. h. wenn wir die entsprechenden (homologen) Ränder eines solchen Gebietes vereinigen, entsteht eine Fläche von höherem Geschlecht als Null. Dann bedürfen wir zur Darstellung dieser Eintheilung ebenfalls zweier Parameter z, w. Die algebraische Formulirung besteht also in diesem Falle aus drei Gleichungen:

$$F(\eta, y, z, w) = 0,$$
$$f(y, z, w) \quad = 0,$$
$$f_1(z, w) \quad = 0.$$

Dabei definirt die Verzweigung von η in Bezug auf f die Fläche F von der Eintheilung ihrer Blätter abgesehen; die Verzweigung von y in Bezug auf f_1 die Fläche f (die Blatteintheilung); die Beziehung von η zu f_1 endlich stellt die Gesammtfläche dar. Selbstverständlich ist auch hier die richtige Lagenbeziehung der beiden Flächen auf einander durch Bestimmung gewisser Constanten in den Flächengleichungen zu treffen.

2. Algebraische Darstellung der Uebereinanderlagerung zweier Riemann'scher Flächen.

Eine reguläre Riemann'sche Fläche F von zerfallender Gruppe liess sich durch die Uebereinanderlagerung von Flächen F_1, $F_2 \cdots$ darstellen (§ 4.). Es seien

$$F_1(y_1, z) = 0, \quad F_2(y_2, z) = 0 \cdots$$

die Gleichungen dieser Flächen. Wir setzen zunächst wieder die Blätter unserer Flächen vom Geschlechte Null voraus. Bilden wir dann irgend eine rationale Function η unserer y_i, so stellt die Verzweigung von η in Bezug auf z unmittelbar die Fläche F dar. Dabei muss die rationale Function der y_i so beschaffen sein, dass durch ihre Bildung keine Irrationalität verloren geht; es muss, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, eine „allgemeine“ rationale Function der y_i sein. Der Unterschied zwischen uneigentlichem und eigentlichem Zerfallen, d. h. das Eintreten bez. Nichteintreten einer „Reduction“ (pag. 483) ist algebraisch dadurch bezeichnet, dass in zweien oder mehreren der Irrationalitäten y_i, die ja im Allgemeinen zusammengesetzte sind, implicite ein und dieselbe Irrationalität vorkommt, die dann natürlich in der Gesammtirrationalität nur einmalzählend auftritt.

Analog gestaltet sich die Uebereinanderlagerung, wenn das Geschlecht der Blätter unserer Flächen F_1, $F_2 \cdots$ grösser als Null ist. Die Relation $f(\eta, z) = 0$ zwischen den zwei dann vorhandenen Parametern ist in diesem Falle, wie dies ja auch geometrisch deutlich, für alle übereinandergelagerten Flächen dieselbe.

Das Resultat unserer Ueberlegungen ist das folgende:

Es ist in jedem Falle möglich, den von uns eingeschlagenen geometrischen Gang der Zerlegung einer Gruppe algebraisch zu verfolgen. Wir können unmittelbar den Tabellen I und II, die wir für die Composition einer Gruppe aufgestellt, die zugehörigen algebraischen Beziehungen an die Seite setzen, soferne wir nur die dabei auftretenden einfachen Irrationalitäten kennen.

Wir entwickeln die wirklich rechnerische Durchführung an den schon oben, Abschnitt I, gebrachten Beispielen.

§ 9.

Beispiele.

Beispiel 1.

Wir verlangen, den beiden Tabellen, welche wir in § 6. (pag. 492) für unser erstes Beispiel der Decomposition einer regulären Riemann'schen Fläche entworfen haben, die algebraische Formulirung zur Seite zu setzen. Dies wird, entsprechend der Mehrdeutigkeit jener Zerlegung, in verschiedener Weise bewerkstelligt werden können.

I. Wir wollen, von der Gruppe der Fläche [4, 4, 4]; $N = 16$ als zerfallender Gruppe ausgehend, die Irrationalität der Fläche [2, 3, 8]; $N = 96$ aufstellen. Die Darstellung der ersteren Fläche durch die Uebereinanderlagerung zweier Kreistheilungstypen:

$$\begin{array}{llll} A & B & C & \\ [4, & 4] & & ;\ N = 4 \\ & [4, & 4]; & N = 4 \\ \hline [4, & 4, & 4]; & N = 16 \end{array}$$

ist nach § 8., 2 algebraisch unmittelbar gegeben, wenn wir η gleich einer „allgemeinen“ rationalen Function R zweier vierten Wurzeln aus linearen Functionen von z_1 setzen, deren eine bei A und B, die andere bei B und C verzweigt ist. Nehmen wir, der folgenden Darstellung wegen, diese Verzweigungen für die speciellen Werthe $z_1 = \varepsilon, \varepsilon^2, 1$ $\left[\text{wo } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right]$, so haben wir

(1) $$\eta = \mathrm{R}(\eta_1, \eta_2),$$

wobei

$$\eta_1^4 = \frac{z_1 - \varepsilon}{z_1 - 1}, \quad \eta_2^4 = \frac{z_1 - \varepsilon^2}{z_1 - 1},$$

als algebraische Darstellung unserer Fläche. Indem wir jetzt auf jedem Blatte dieser Fläche eine Eintheilung nach dem Kreistheilungstypus [3, 3]; $N = 3$ anbringen und dabei die Verzweigungspunkte 4 auf homologe Stellen dieser Eintheilung fallen lassen, entsteht, wie wir

oben gesehen, die Fläche [3, 3, 4]; $N = 48$ (vergl. pag. 489 und Fig. 3 der Tafel I). Algebraisch setzen wir

$$z_1^3 = z_2, \tag{2}$$

so hat η in Bezug auf z_2 die verlangte Verzweigung. Denn für $z_2 = 0$ und $z_2 = \infty$ hat eine Verzweigung der Blätter zu dreien statt, während für $z_2 = 1$ [und nur für diesen Werth] z_1 die Werthe 1, ε, ε^2 annimmt und somit an dieser Stelle die Blätter der Fläche zu vieren zusammenhängen.

Um jetzt schliesslich auf die Fläche [2, 3, 8]; $N = 96$ zu kommen, haben wir jedes Blatt der eben behandelten Fläche nach dem Kreistheilungstypus [2, 2]; $N = 2$ so einzutheilen, dass ein Eckpunkt 2 auf $z_2 = 1$ fällt, während die Stellen, an welchen die Blätter zu dreien zusammenhängen, $z_2 = 0, \infty$, homologe Stellen der Eintheilung werden. Algebraisch ersetzen wir z_2 durch

$$\left[\frac{z_2 + 1}{z_2 - 1}\right]^2 = z. \tag{3}$$

Dann ist die Verzweigung von η in Bezug auf z dargestellt durch die 96 blättrige Fläche, deren Blätter bei $z = 0$ zu zweien, bei $z = 1$ zu dreien und bei $z = \infty$ zu acht zusammenhängen.

Wir haben hier successive die Irrationalität unserer Fläche aufgebaut. Der umgekehrte Weg würde verlangen, die fertige Gleichung zwischen η und z aufzulösen. Dann haben wir der Reihe nach die in den Gleichungen (3), (2), (1) gegebenen Irrationalitäten zu adjungiren. Jede dieser Adjunctionen bewirkt dann eine Reduction der Gruppe unserer Gleichung, die wir gerade geometrisch an der zugehörigen Uebergangsform erkannt haben.

Die Reihenfolge der Gleichungen (1), (2), (3) stellt sich unmittelbar dem bezüglichen Theil der Tabelle II unserer Gruppenzerlegung an die Seite. Der Aufbau der ganzen Gruppe aber lässt sich am besten erkennen, wenn wir jetzt die Beziehung zwischen η und z in ausgerechneter Form schreiben:

$$\eta = R\left\{\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}} - \varepsilon}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}} - 1}},\quad \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}} - \varepsilon^2}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}} - 1}}\right\}.$$

II. Gehen wir zur Herstellung der gewollten Irrationalität von einer anderen Art der Gruppenzerlegung aus, so stellt sich dieselbe zunächst in etwas anderer Form dar. Beginnen wir z. B. [vergleiche die Tabelle pag. 492] mit der Fläche

$$[2,\ 2,\ 2,\ 2];\ N = 2 \tag{α}$$

und gehen der Reihe nach durch die Flächen

(β) $[4, 4, 4, 4]$; $N = 4$,

(γ) $[2, 2, 4, 4]$; $N = 8$,

(δ) $[4, 4, 4]$; $N = 16$,

(ε) $[3, 3, 4]$; $N = 48$

zu unserer gewünschten Fläche

(ζ) $[2, 3, 8]$; $N = 96$,

so ergiebt sich folgende entsprechende algebraische Formulirung:

Fläche (α) zunächst ist unmittelbar gegeben durch die Gleichung

$$\eta^2 = z_1^4 - 1\,^{*}). \tag{4}$$

Fläche (β) wird erhalten, wenn wir noch zufügen

$$(z_1^4 - 1)^2 = (z_2^4 - 1)\,^{**}). \tag{5}$$

Um jetzt auf die Flächen (γ) und (δ) zu kommen, sind die Relationen einzuführen

$$z_2^2 = z_3, \tag{6}$$

$$z_3^2 = z_4. \tag{7}$$

Durch diese Substitutionen wird aber zunächst eine *Reduction* unserer Irrationalität bewirkt, indem wir jetzt die Beziehung zwischen η und z_3, bez. zwischen η und z_4 ausgedrückt haben durch die Formeln

$$\eta^4 = z_3^2 - 1$$

und

$$\eta^4 = z_4 - 1.$$

Wir dürfen desshalb hier nicht η selbst als die abhängig Variable in unseren Gleichungen annehmen, sondern irgend eine rationale Function von η und z_2. Es stellt dann die Beziehung von

$$\eta' = R(\eta, z_2) \tag{8}$$

zu z_2, wobei die Gleichung

$$\eta^4 = z_2 - 1$$

---

*) Wir specialisiren mit Rücksicht auf die folgenden Gleichungen, analog wie vorhin, wieder die Constanten unserer Gleichung. Die *allgemeine* algebraische Formulirung der Fläche α müsste ja, von linearen Transformationen des Parameters abgesehen, *eine* willkürliche Constante enthalten.

**) Wir haben auf pag. 491, Anmerkung erwähnt, dass es zwei wesentlich verschiedene reguläre Flächen $[4, 4, 4, 4]$; $N = 4$ giebt. Ihre algebraische Formulirung ist allgemein die folgende:

$$\eta^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$$

für unsere oben behandelte Fläche, und

$$\eta^4 = (z - a)(z - b)(z - c)^3(z - d)^3$$

für jene zweite reguläre Fläche. Der Unterschied in der Zusammenhängung der einzelnen Blätter, wie wir ihn dort für beide Flächen gekennzeichnet haben, wird hier sofort durch Umkreisung der Verzweigungspunkte deutlich.

statthat, in gleicher Weise wie oben Gleichung (4) und (5), unsere Fläche β dar, aus welcher wir die Flächen γ und δ ableiten.

Indem wir also Gleichung (8) an die Stelle der speciellen Gleichungen (4), (5) treten lassen, schreibt sich die Gleichung der Fläche (γ) explicit in folgender Gestalt:

$$(9) \qquad \eta' = R\left\{\sqrt[4]{z_3^2 - 1},\ \sqrt{z_3}\right\}$$

und ebenso die für Fläche (δ) in der Form

$$(10) \qquad \eta' = R\left\{\sqrt[4]{z_4 - 1},\ \sqrt[4]{z_4}\right\}.$$

Wir sehen, wie auch hier die Eigenschaft, dass die Gruppen unserer letzten beiden Flächen zerfallend sind (vergl. pag. 490 u. 491), zu Tage tritt.

Die Darstellung der weiteren Flächen (ε) und (ζ) gestaltet sich nun genau wie eben in I. durchgeführt. Nur ist, um eine vollständige Uebereinstimmung mit den dortigen Formeln (1) zu erlangen, dabei in Gleichung (10) der Parameter z_4 durch eine lineare Function $z_4 = -\varepsilon \frac{z_4' - \varepsilon}{z_4' - 1}$ zu ersetzen, was wir der kürzeren Schreibweise wegen hier umgangen haben.

Jetzt lassen sich für unsere Fläche den in pag. 492 gegebenen *„gruppentheoretischen" Tabellen* unmittelbar durch unsere in I. und II. abgeleiteten Formeln die Glied für Glied entsprechenden *„algebraischen" Tabellen* an die Seite stellen, wie dies wohl keiner weiteren Ausführung bedarf.

Beispiel 2.

Die algebraische Formulirung unseres zweiblättrigen Doppelringes (pag. 493 und Fig. 7 der Tafel I) gestaltet sich folgendermassen:

Wir haben zunächst den Doppelring durch eine Gleichung zwischen den Grössen y, z auszudrücken, welche wir dann als Parameter unserer Fläche einführen. Am einfachsten wählen wir dazu die Function

$$f(y, z) = y^2 - z(z-1)(z-a)(z-b)(z-c) = 0,$$

für welche die Verzweigung von y in Bezug auf z dargestellt ist durch die Fläche $[2, 2, 2, 2, 2, 2]$; $N = 2$ ($p = 2$), deren Verzweigungspunkte wir in Fig. 8 (Tafel I) angedeutet haben. Mit gleichem Rechte könnten wir irgend eine andere Gleichung $f(y, z) = 0$, welche eine Riemann'sche Fläche vom Geschlechte zwei ergiebt, zu Grunde legen.

Jetzt haben wir eine Function

$$F(\eta, y, z) = 0$$

zu bilden, welche sich zweiblättrig über $f(y, z) = 0$ ausbreitet und dabei in Bezug auf diese Function unverzweigt ist. Dies leistet unmittelbar:

$$\eta = R(y, \sqrt{(z-a)(z-b)}),$$

wo R irgend eine allgemeine rationale Function bedeutet. Denn jedem Werthepaare y, z, welches uns eindeutig einen Ort auf dem Doppelringe bestimmt, entsprechen zwei Werthe η. Dabei ist die Fläche unverzweigt und die beiden Blätter hängen nur längs jener geschlossenen Curve zusammen, welche die Verzweigungspunkte a, b umgiebt. Entsprechend den 15 Paaren der 6 Verzweigungspunkte erhalten wir 15 wesentlich verschiedene Formen unserer Gleichung, die wir ebenso unmittelbar hinschreiben können. Indem wir die 15 Durchschlingungscurven, die wir so erhalten, aus nur 4 derselben zusammensetzen können, kommen unsere Fälle auf jene 15 Möglichkeiten zurück, die wir auf pag. 493 für unsere Fläche unterschieden haben.

III. Abschnitt.

Die regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$.

§ 10.

Aufzählung der hierhergehörigen Flächen.

Das Problem der regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$ ist bekannt und identisch mit dem Problem der Transformation und Theilung der elliptischen Functionen.*) Hier soll es mit den für reguläre Riemann'sche Flächen allgemein gewonnenen Gesichtspunkten behandelt werden.

Wir trennen mit Rücksicht auf die folgende Darstellung die regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte $p = 1$ in folgende zwei Gruppen.

Erste Gruppe.

1. Ueber einem Ringe vom Geschlechte $p = 1$ sich ausbreitend hat man M-blättrige unverzweigte Flächen, deren Blätter längs der Meridian- und Breitencurven des Ringes ineinander geschlungen sind.

2. Ueber der complexen Ebene sich ausbreitend $N = 2M$-blättrige

---

*) Man vergl. hierzu, da ich mich im Folgenden der Weierstrass'schen Bezeichnungen bedienen werde: Felix Müller: „De transformatione functionum ellipticarum". Diss. inaug. Berlin 1867. Kiepert: „Auflösung der Transformationsgleichungen und Division der elliptischen Functionen." Borchardts Journal. Bd. 76, p. 34ff.

Weiter sehe man noch:

Briot-Bouquet: „Théorie des fonctions doublement périodiques etc." p. 302ff. Christoffel: „Sul problema delle temperature stazionarie etc." Annali di matematica. S° II. t. I. p. 99ff., die Abhandlungen von Schwarz in Borchardt's Journal Bd. 70, p. 118, Bd. 75, p. 320 und dessen mehrerwähnte Preisschrift, sowie Klein. Ann. XV. p. 278ff.

Flächen, deren Blätter an vier Stellen je paarweise zusammenhängen und die wir demgemäss als Flächen

$$[2, 2, 2, 2]; \; N = 2M$$

bezeichnen.

Zweite Gruppe.

Hier trennen wir folgende über der complexen Ebene sich ausbreitende Flächen:

1a. Flächen von der Verzweigung

$$[2, 3, 6]$$

und der Blätterzahl

$$N = 6m^2 \quad \text{und} \quad N = 18m^2.$$

1b. Die Flächen

$$[3, 3, 3],$$

$$N = 3m^2 \quad \text{und} \quad N = 9m^2,$$

und endlich

2. Die Flächen

$$[2, 4, 4],$$

$$N = 4m^2 \quad \text{und} \quad N = 8m^2.^{*)}$$

§ 11.

Die Flächen der ersten Gruppe.

Wir untersuchen zunächst die über einem Ringe $p = 1$ unverzweigt sich ausbreitenden Flächen und fragen, auf wie viele Weisen sich ein solcher Ring M-blättrig überdecken lässt.

Indem wir berücksichtigen, dass eine Verschlingung der einzelnen Blätter des Ringes nur längs zweier Curven, also etwa der Meridian- und der Breitencurve des Ringes in Betracht kommt, lässt sich die Zahl der Lösungen allgemein übersehen.

Zwei Ringe zunächst können auf drei Weisen, nämlich 1. längs einer Meridiancurve, 2. längs einer Breitencurve, 3. längs Meridian- und Breitencurve durchschlungen werden. Ersetzen wir unsere beiden Ringe durch ebene Parallelogramme, so haben wir die Ränder derselben in der Art, wie es Fig. 1 (der Tafel II) angiebt, zusammenzuheften, um unsere drei Flächen zu erhalten. Dabei sind unsere beiden Ringe jetzt nebeneinander, die reguläre Gebietseintheilung eines neuen Ringes bildend, ausgebreitet. In dieser Form lassen sich auch die weiteren Fälle übersichtlich discutiren. Man erhält dabei allgemein ausgesprochen das folgende Resultat:

*) Dass mit den hier aufgezählten Flächengruppen *alle* Flächen vom Geschlechte $p = 1$ erschöpft sind, folgt aus geometrischen Betrachtungen, wie ich sie in Theil I meiner Inaugural-Dissertation entwickelt habe.

Ist M die Anzahl der ineinander zu schlingenden Ringe und M von der Form $M = a^\alpha \cdot b^\beta \cdots$, so giebt es $\prod \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$ verschiedene Arten der M-blättrigen regulären Fläche.

Dieselbe Zahl verschiedener Lösungen erhält man auch für die regulären Flächen [2, 2, 2, 2]; $N = 2M$; denn wir brauchen in unseren eben erhaltenen regulär durchschlungenen Flächen nur auf jedem Ringe die Eintheilung [2, 2, 2, 2]; $N = 2$ zu treffen [vgl. Fig. 2 der Tafel II), um unsere neuen Flächen zu erhalten.

Die Anzahl der verschiedenen Arten unserer Fläche ist nun genau auch die Zahl der Transformationen M^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen, wenn wir dabei die Multiplicationen mitzählen. Insoferne wir es hier in der That mit Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen zu thun haben, musste sich dieses Resultat ergeben, dem Umstande entsprechend, dass die Invarianten der vier Verzweigungspunkte auf unseren Ringen sich als Wurzel einer Modulargleichung für die betreffende Transformation ergeben. *Dabei müssen wir einer bestimmten solchen Wurzel nicht nothwendig eine bestimmte unserer Flächen zuordnen, wohl aber entsprechen gewissen Gruppen von Moduln auch gewisse Gruppen von Flächen. Diese Gruppirung entspricht dabei dem Umstande, dass für allgemeines M und unter Mitberücksichtigung der Multiplicationen die Modulargleichung reducibel ist und in eine gewisse Anzahl irreducibler Factoren zerfällt.*

Wir führen die Abzählung der kürzeren Ausdrucksweise wegen an den Beispielen der Transformation 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung durch, wobei die Abzählung für den allgemeinen Fall unmittelbar deutlich wird.

Die Durchschlingung dreier Ringe zunächst ist auf vier Arten möglich. Indem wir unsere Ringe aufgeschnitten in Gestalt von Parallelogrammen in die Zeichenebene breiten, sind diese vier Möglichkeiten in Fig. 3 durch die Zuordnung der Ränder unserer Parallelogramme dargestellt. Diesen vier verschiedenen Flächen stellen sich die 4 verschiedenen Transformationen 3^{ter} Ordnung zur Seite, welche den Periodenpaaren

$$\frac{\omega}{3},\ \omega';\quad \omega,\ \frac{\omega'}{3};\quad \omega,\ \frac{\omega'-\omega}{3};\quad \omega,\ \frac{\omega'-2\omega}{3};$$

entsprechen. Wir können durch geometrische Umformung von einer unserer Flächen zu allen anderen übergehen, ebenso wie wir durch einen Wechsel in der Periodenbezeichnung die obigen Periodenpaare ineinander überführen können.*) So geht Fläche 1 in Fläche 3 und 2 über, wenn wir in Fig 4a unter Beibehaltung der Zuordnung der

*) Man vergleiche die analogen Betrachtungen bei Camille Jordan „Traité des substitutions et des équations algébriques" p. 337 ff.

Ränder eine andere Abtheilung in Gebiete [Fig. 4b und 4c] treffen. Die Fläche 4 geht in die erste durch eine blosse Vertauschung der Meridian- und Breitencurven über.

Die Durchschlingung von vier Ringen lässt sich auf 7 verschiedene Arten bewerkstelligen, den 6 Transformationen und der einen Multiplication 4^{ter} Ordnung entsprechend. Jene 6 den Transformationen entsprechenden Flächen lassen sich analog wie vorhin ineinander überführen. Die siebente, davon abgesonderte, entspricht der Multiplication. Diese letzte Fläche [in Fig. 5, Tafel II dargestellt] lässt sich dabei erzeugen durch die Uebereinanderlagerung zweier zweiblättriger Ringflächen, für deren eine die Durchschlingung der Blätter längs einer Meridiancurve, für deren andere sie längs einer Breitencurve statthat. Analog können die Flächen für Transformation M^{ter} Ordnung, wenn M von der Form $a \cdot b \cdot c \cdots$ und a, b, c relativ prim zu einander sind, erzeugt werden durch die Uebereinanderlagerung der Flächen für Transformation $a^{\text{ter}}, b^{\text{ter}} \cdots$ Ordnung — der bekannte analytische Satz.

Was *die Gruppe* der $2M$ Transformationen einer Fläche $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2M$ in sich angeht, so ist deren Zusammensetzung unmittelbar deutlich. Zunächst ist die Untergruppe der M Verschiebungen in der Gesammtheit ausgezeichnet, was sich in der M-blättrigen regulär-regulären Uebergangsform, an der wir bisher unsere Discussion geführt haben, ausspricht. Die Composition dieser letzten Gruppe bestimmt sich aber unmittelbar aus der Zerlegung der Zahl M in ihre Primfactoren. Indem alle so kommenden einfachen Gruppen bloss cyklische sind, folgt der bekannte Abel'sche Satz, dass die Auflösung der Transformationsgleichungen mit Hülfe von Wurzelzeichen bewerkstelligt werden kann.

Die Theorie der elliptischen Functionen giebt uns unmittelbar die *analytische Formulirung* unseres Problems, indem es gerade die Beziehung zwischen zwei doppeltperiodischen Functionen mit den Perioden 2ω, $2\omega'$ zu den doppeltperiodischen Functionen mit getheilten Perioden sind, welche unsere Irrationalität ergeben.

Wir betrachten zunächst die Flächen $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2M$. Wir führen in der Weierstrass'schen Bezeichnung $p(u)$, $p'(u)$ als doppeltperiodische Functionen mit den Perioden $2\omega, 2\omega'$ ein, und bezeichnen mit $\bar{p}(u)$, $\bar{p}'(u)$ Functionen mit den Perioden $\frac{2\omega}{m}$ und $\frac{2\omega'}{n}$ [indem wir eine Transformation $m \cdot n^{\text{ter}}$ Ordnung herausgreifen]. Dann ist $\bar{p}(u)$ eine Function, welche bei den $2 \cdot m \cdot n$ Transformationen, welche u in $\pm u + \mu \frac{2\omega}{m} + \nu \frac{2\omega'}{n}$ [μ und ν dabei nach dem Modul m, bez. n genommen] überführen, und nur bei diesen Transformationen *ungeän-*

dert bleibt. Die Function $p'(u)$ nimmt dabei $2 \cdot m \cdot n$ verschiedene Werthe an. Die Gleichung also, die zwischen $\bar{p}(u)$ und $p'(u)$ besteht, hat sicher dieselbe *Gruppe*, wie unsere $2M$-blättrige Fläche. Aber die Relation ist auch wirklich durch unsere Fläche dargestellt, wie wir dies sofort übersehen, wenn wir die Verzweigung von p' in Bezug auf $\bar{p}$ untersuchen. Zu dem Ende fragen wir zunächst, wie p in Bezug auf $\bar{p}$ verzweigt ist, dann wie p' in Bezug auf p.

Die Transformationsgleichung in transcendenter Form:*)

$$p\left(u, \frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{n}\right) = \bar{p}(u)$$

$$= p(u, \omega, \omega') + \sum_0^{m-1}{}_\mu \sum_0^{n-1}{}'_\nu \left\{ p\left(u - \frac{2\mu\omega}{m} - \frac{2\nu\omega'}{n}\right) - p\left(\frac{2\mu\omega}{m} + \frac{2\nu\omega'}{n}\right)\right\}$$

[wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass μ und ν *nicht gleichzeitig* Null werden dürfen] lässt unter Zuziehung der Relation:

$$p\left(u + \frac{2\mu\omega}{m} + \frac{2\nu\omega'}{n}\right) = p\left(-u + \frac{2\mu'\omega}{m} + \frac{2\nu'\omega'}{n}\right)$$

$$\mu + \mu' \equiv 0 \bmod m, \qquad \nu + \nu' \equiv 0 \bmod n$$

die Stellen

$$\bar{p}(u) = \bar{p}(0), \quad \bar{p}\left(\frac{\omega}{m}\right), \quad \bar{p}\left(\frac{\omega'}{n}\right), \quad \bar{p}\left(\frac{\omega}{m} + \frac{\omega'}{n}\right)$$

als die Verzweigungsstellen der über $\bar{p}$ ausgebreiteten Fläche erkennen. Dabei hängen dort die Blätter der dem Werthsysteme von $p(u)$ entsprechenden Fläche stets zu zweien zusammen: den Werthen $p(0)$, $p(\omega)$, $p(\omega')$, $p(\omega + \omega')$ entspricht jedoch jedesmal ein in der betreffenden Stelle *unverzweigt* verlaufendes Blatt.

Die so entstehende (nicht reguläre) Fläche hat das Geschlecht Null. Indem wir dieselbe durch Nebeneinanderlegen ihrer Blätter auf die Kugel ausbreiten, kommt die Darstellung der Fig. 6 auf Tafel II [welche für den Fall $m = 4$, $n = 3$ entworfen ist]. An dieser Darstellung ist die Theilung der verschiedenen Perioden leicht ersichtlich.

Fügen wir jetzt unserer Gleichung die Relation

$$p'(u) = \sqrt{4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3}$$

$$= \sqrt{\big(p(u) - p(\omega)\big)\big(p(u) - p(\omega')\big)\big(p(u) - p(\omega + \omega')\big)}$$

hinzu, so besitzt p' in Bezug auf $\bar{p}$ jetzt gerade die Verzweigung unserer regulären $2 \, . \, M$-blättrigen Fläche. Die Blätterzahl $m \cdot n$ der eben besprochenen Fläche wird nämlich gerade verdoppelt und für die vier Werthe, welche vorhin an der betreffenden Stelle unverzweigte

*) Man vergl. z. B. Felix Müller a. a. O. pag. 5 ff.

Blätter ergaben, werden gerade durch die zutretende Quadratwurzel Verzweigungspunkte 2 hergestellt. *Geometrisch denken wir uns einfach die in Fig. 6, Tafel II gezeichnete Fläche doppelt überdeckt und dabei an jenen 4 markirten Stellen verzweigt.*

Die algebraische Darstellung unserer regulär durchschlungenen, übrigens unverzweigten M-blättrigen Flächen lässt sich nun aus dem Bisherigen sofort formuliren. Denken wir uns nämlich in der Fläche $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2M$ die Untergruppe der M Verschiebungen, wie schon früher angegeben, in dem M-blättrigen Ringe ersichtlich gemacht, der in jedem Blatte die Eintheilung $[2, 2, 2, 2]$; $N = 2$ trägt, so haben wir blos das Weglassen dieser Eintheilung algebraisch auszudrücken: Wir fragen jetzt nicht mehr nach der Verzweigung von p' in Bezug auf $\bar{p}$ allein, sondern wir fragen, *wie ist p' verzweigt in Bezug auf die Grössen $\bar{p}$ und $\bar{p}'$ als den unabhängigen Variablen.* Dabei besteht zwischen diesen beiden Parametern $\bar{p}, \bar{p}'$ die Relation:

$$\bar{p}' = \sqrt{4\bar{p}^3 - \bar{g}_2\bar{p} - \bar{g}_3}$$

[vergl. § 8.]. In der That bleiben $\bar{p}$ und $\bar{p}'$ *gleichzeitig* nur mehr ungeändert bei den Transformationen von u in $u + \mu \frac{2\omega}{m} + \nu \frac{2\omega'}{n}$; die Transformationen von der Periode 2, welche u in $-u$ überführen, sind weggefallen, da $\bar{p}'$ eine ungerade Function ist.

§ 12.

Die Flächen der zweiten Gruppe.

Wir gehen zu den Flächen

(1a) $[2, 3, 6]$; $N = 6m^2$ und $N = 18m^2$,

(1b) $[3, 3, 3]$; $N = 3m^2$ und $N = 9m^2$,

(2) $[2, 4, 4]$; $N = 4m^2$ und $N = 8m^2$

über. *Sie finden ihre algebraische Darstellung in Transformationsgleichungen zwischen den speciellen doppeltperiodischen Functionen, für welche g_2, beziehungsweise g_3 gleich Null ist.* In der That ist, wegen der *Dreizahl* der Verzweigungsstellen, jetzt keine absolute Constante mehr vorhanden.

1. Die Flächen der Verzweigung [2, 3, 6] und [3, 3, 3].

Durch einfache geometrische Betrachtungen an den zugehörigen Flächennetzen überzeugt man sich, wie schon oben erwähnt, dass unsere Flächen durch die Verzweigung und Blätterzahl jedesmal völlig *eindeutig* definirt sind.

Ihre Gruppe bestimmt sich unmittelbar durch die Bildung der folgenden regulär-regulären Uebergangsformen: Die Fläche [2,3,6]; $N=6m^2$, bez. [2, 3, 6]; $N=18m^2$ zunächst besitzt eine regulär-reguläre Uebergangsform, gebildet aus $3m^2$ bez. $9m^2$ Blättern (vom Geschlechte Null), deren jedes die Eintheilung des Kreistheilungstypus [2, 2]; $N=2$ trägt [Fig. 7 der Tafel II]. Dabei hängen die Blätter zu je dreien an den in der Figur gekennzeichneten Stellen zusammen. So ergiebt sich die Gruppe der Flächen [3, 3, 3] $N=3m^2$, bez. $N=9m^2$ als ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtheit. Die Zerlegung dieser Gruppe wird ihrerseits durch eine m^2, bez. $3m^2$-blättrige Uebergangsform deutlich, deren Blätter je die in Fig. 8, Taf. II gezeichnete Eintheilung tragen, während sie übrigens unverzweigt und nur ineinander geschlungen verlaufen. Die in den Verschiebungen der m^2-blättrigen Fläche in sich gegebene ausgezeichnete Untergruppe ist dabei dieselbe, wie die vorhin allgemein bestimmte Gruppe der m^2 Verschiebungen, welche sich durch m-Theilung der beiden Perioden 2ω und $2\omega'$ des elliptischen Integrals ergab. Für die $3m^2$-blättrige Fläche ist diese Multiplication noch mit einer Transformation 3^{ter} Ordnung verbunden, die wir sogleich noch näher betrachten.

Zur algebraischen Formulirung untersuchen wir *Theilungsgleichungen* der Functionen $p(u)$, $p'(u)$, wobei

$$p'(u)=\sqrt{4\,p^3(u)-g_3}$$

ist und für welche 2ω und $2\omega'=2\varepsilon\cdot\omega$, wobei $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, ein primitives Periodenpaar ist.

I. Wir behandeln zunächst die Flächen [2, 3, 6]; $N=6m^2$. Es sei dann

$$\overline{p}(u)=p\left(u,\ \frac{\omega}{m},\ \frac{\omega'}{m}\right)=p(u,\ \overline{g}_2,\ \overline{g}_3),\quad \overline{p}'(u)=p'\left(u,\ \frac{\omega}{m},\ \frac{\omega'}{m}\right),$$

so ist zunächst, wie für die Theilung selbstverständlich, $\overline{g}_2=0$.

Daher folgt:

$$\overline{p}(\varepsilon u)=\varepsilon\overline{p}(u);\qquad \overline{p}'(\varepsilon u)=\overline{p}'(u)$$

und so sehen wir in $\overline{p}^{\,3}(u)$ [oder auch etwa $\overline{p}'^{\,2}(u)=4\overline{p}^{\,3}(u)-\overline{g}_3$] eine Function, die bei den $6m^2$ Operationen, durch welche u in

$$\pm\,\varepsilon^{\nu}\cdot u+\mu\,\frac{\omega}{m}+\mu'\,\frac{\varepsilon\cdot\omega}{m},\quad \nu=0,\ 1,\ 2$$

übergeht, und nur bei diesen Operationen, ungeändert bleibt. $p'(u)$ nimmt dabei andere und andere Werthe an.

Die Beziehung zwischen $p'(u)$ und $\overline{p}^{\,3}(u)$ besitzt also jedenfalls dieselbe Gruppe, wie unsere Fläche [2, 3, 6]; $N=6m^2$. Eine Discussion der Verzweigung von p' in Bezug auf $\overline{p}^{\,3}$ zeigt aber, dass diese Gleichung wirklich das analytische Bild unserer Fläche ist.

Wir untersuchen, ähnlich wie vorhin im allgemeinen Fall § 11. pag. 505, zu dem Ende am einfachsten zunächst, wie p in Bezug auf $\bar{p}^3$ verzweigt ist, und erhalten eine $3m^2$ blättrige, im Allgemeinen nicht reguläre Fläche vom Geschlechte Null. Führen wir dann p' statt p als Unbekannte ein, so wird diese Fläche, die wir uns, durch Nebeneinanderlegen der Blätter, auf der Kugel ausgebreitet denken, verdoppelt und es werden die beiden über der Kugel liegenden Blätter dabei an vier Stellen untereinander verzweigt. Dadurch erweist sich dann die Gesammtfläche als eine $6m^2$-blättrige, deren Blätter an der Stelle $\bar{p}^3 = 0$ zu je dreien, bei $\bar{p}^3 = 1$ zu zweien und bei $\bar{p}^3 = \infty$ zu je sechs zusammenhängen.*)

II. Wollen wir jetzt zu den Flächen [3, 3, 3]; $N = 3m^2$ übergehen, so thuen wir dies *geometrisch* durch die Bildung jener auf voriger Seite erwähnten $3m^2$-blättrigen Uebergangsform [Fig. 7, Tafel II.), *algebraisch* durch Adjunction einer Quadratwurzel, welche den in der Uebergangsform abgeschiedenen Kreistheilungstypus repräsentirt.**) Wir führen nämlich eine Grösse $z = \sqrt{\bar{p}^3 - 1}$ als unabhängig Variable ein, wobei die Constanten dieser Wurzel durch die soeben in I. erwähnten Verzweigungsstellen bestimmt sind. Die Verzweigung von p' in Bezug auf z ergiebt dann die gewollte Fläche, deren Blätter für die Stellen $z = +i, -i, \infty$ zu dreien zusammenhängen.

III. Was endlich die Flächen [2, 3, 6]; $N = 18m^2$ und ebenso [3,3,3]; $N = 9m^2$ betrifft, so dient zu ihrer Aufstellung die Bemerkung, dass es für unsere speciellen doppeltperiodischen Functionen mit $g_2 = 0$

---

*) Setzen wir speciell $m = 2$, so ist die Verzweigung von p in Bezug auf $\bar{p}^3$ *regulär*, dargestellt durch eine 12-blättrige Fläche, deren Blätter an zwei Stellen zu dreien, an einer zu zweien verzweigt sind. Es ist die in den wiederholt citirten Arbeiten als *Tetraedertypus* bezeichnete Fläche. Indem wir p' statt p als Unbekannte einführen, erscheint diese Fläche verdoppelt und es werden dabei an vier homologen Punkten (etwa den Tetraeder-Eckpunkten) diese *beiden* Flächen untereinander verzweigt. So kommt die Gesammtfläche [2, 3, 6] $N = 24$. Fig. 9 der Tafel II stellt die Eintheilung einer Kugel nach dem Tetraedertypus in stereographischer Projection dar. Denken wir sie doppelt überdeckt und die beiden Blätter an den markirten Stellen verzweigt, so folgt die letztgenannte Fläche. Man sehe hiezu Schwarz in der Eingangs citirten Preisschrift, sowie Klein, Ann. XIV, p. 154.

**) Etwas anders ausgesprochen: Wir gelangen von der soeben in I. betrachteten Eintheilung eines Ringes in Dreiecke mit den Winkeln 90°, 60°, 30° zu der neuen Eintheilung in gleichseitige Dreiecke durch Zusammenziehen je zweier Nachbardreiecke. Algebraisch haben wir an Stelle der früheren unabhängigen Variabeln $\bar{p}^3$ eine solche Function von $\bar{p}^3$ als neue Variabele einzuführen, die über das gleichseitige Dreieck läuft, wenn $\bar{p}^3$ sich über ein rechtwinkliges Dreieck bewegt und das ergiebt die obige Formulirung.

eine Transformation *dritter* Ordnung giebt, für welche $\overline{g}_2$ ebenfalls gleich Null ist. Dieselbe ist gegeben durch die Gleichung

$$\overline{p} = \frac{p^3 - g_3}{p^2}$$

und dabei ist $\qquad \overline{g}_3 = -27 g_3 \quad$ und $\quad \overline{g}_2 = g_2 = 0.$

Indem wir eben jene Transformation anwenden, drückt sich die Beziehung zwischen p' und $\overline{p}^3$ geometrisch durch eine 18-blättrige reguläre Fläche [2, 3, 6] aus. Wir haben diese Fläche in Fig. 10 der Tafel II dargestellt, an welcher die Periodenparallelogramme für die Transformation dritter Ordnung deutlich hervortreten.

Wenden wir diese Transformation auf unsere eben behandelten Multiplicationen an, so erhalten wir die sämmtlichen weiteren Fälle unserer Flächen [2, 3, 6] und ebenso [3, 3, 3].

2. Die Flächen [2, 4, 4]; $N = 4m^2$ und $N = 8m^2$.

Ganz analog lassen sich die Flächen der Verzweigung [2, 4, 4] behandeln, wenn man die speciellen doppeltperiodischen Functionen $p(u)$ und $p'(u)$ zu Grunde legt, für welche $g_3 = 0$ ist.

Wir haben nämlich hier die Relationen $p(iu) = -p(u)$; $p'(iu) = ip'(u)$ und bemerken, dass 2ω und $2\omega' = 2i\omega$ ein primitives Periodenpaar ist. Die Beziehung zwischen $p'(u, \omega, \omega')$ zu

$$\left\{p\left(u, \frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right)\right\}^2$$

drückt sich dann geometrisch durch die Fläche [2, 4, 4]; $N = 4m^2$ aus, wie dies analoge Ueberlegungen, wie die soeben in Fall 1. getroffenen, zeigen.

Die Flächen, für welche $N = 8m^2$ ist, werden dann erhalten durch Anwendung noch der *einen* Transformation *zweiter* Ordnung, für welche das transformirte $\overline{g}_3$ ebenfalls wieder gleich Null ist. Diese Transformation ist dargestellt in der Gleichung:

$$\overline{p} = \frac{p^2 - \frac{1}{4} g_2}{p}$$

und dabei ist $\overline{g}_2 = -4 g_2$; $\overline{g}_3 = 0$.

München, Ende October 1880.

Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalcurve" vierter Ordnung.

Von

Walther Dyck in Leipzig.

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, das Princip, dessen sich Herr Klein bei Aufstellung der Irrationalität seiner 168blättrigen regulären Riemann'schen Fläche bedient*), für einen weiteren Fall anzuwenden, der in der voranstehenden Arbeit „Ueber reguläre Riemann'sche Flächen" schon von anderen Gesichtspunkten aus und mit anderen Hülfsmitteln betrachtet worden ist.**)

Es liegt uns in geometrischer Definition eine reguläre Riemann' sche Fläche vor, die sich 96blättrig über der complexen Ebene ausbreitet und deren einzelne Blätter dabei die folgende Verzweigung besitzen: An einer Stelle a der complexen Ebene hängen die Blätter (12 mal) zu je acht, an einer zweiten Stelle b (32 mal) zu je dreien, an einer dritten c endlich (48 mal) zu je zweien zusammen. In unserem speciellen Falle ist durch diese Angaben (wie schon auf pag. 488 erwähnt) die reguläre Riemann'sche Fläche eindeutig bestimmt. Ihr Geschlecht ergiebt sich als $p = 3$.

Wir verlangen, diejenige Gleichungsform für unsere Fläche aufzustellen, welche der von Herrn Klein für sein Problem 168*ten Grades gegebenen analog ist.*

Die Frage nach derjenigen *Normalcurve niedrigster Ordnung*, auf welche sich unsere Gleichung 96ten Grades eindeutig beziehen lässt, ergiebt vor Allem [vergl. die analogen Schlüsse Ann. XIV, p. 437]:

Unsere Normalcurve kann nicht hyperelliptisch sein.

---

*) Man sehe die Abhandlung Herrn Klein's „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen", Math. Ann. Bd. XIV, und hier speciell die §§ 2.—6. der Arbeit, die wir im Folgenden nur durch Annalenband und Seitenzahl citiren.

**) Angaben in blossen Seitenzahlen betreffen diese Abhandlung.

Denn es müsste dann eine Gruppe von 96 bez. 48 linearen Transformationen einer Veränderlichen geben, welche mit unserer Gruppe bez. einer Hälfte derselben isomorph ist, und das ist nicht der Fall, wie ein Vergleich unserer auf pag. 489 ff. näher charakterisirten Gruppe mit jenen Gruppen*) zeigt. Also:

Unsere Normalcurve ist von der vierten Ordnung.

Wir fragen nach ihrer speciellen Gleichungsform. Dann ergeben analoge Schlüsse, wie die Annalen XIV, pag. 438 gezogenen, für unseren Fall die Sätze:

Unsere Curve vierter Ordnung geht durch 96 Collineationen der Ebene, welche unsere Gruppe repräsentiren, in sich über.

Dabei werden die Punkte unserer Curve vierter Ordnung zu je 96 zusammengeordnet; nur einmal sind es blos 12 (die Punkte a), einmal nur 32 (die Punkte b) und einmal nur 48 (die Punkte c) zusammengehörige Punkte, entsprechend den Verzweigungspunkten unserer Fläche.

In *Gruppen zusammengehöriger Punkte* müssen sich nun alle „*speciellen*“ Punktgruppen auf unserer Curve vierter Ordnung einordnen, d. h. alle Gruppen solcher Punkte, deren individuelle Eigenschaften bei unseren Collineationen erhalten bleiben. Solche Punktgruppen ziehen wir heran, um specielle Eigenschaften unserer Curve vierter Ordnung kennen zu lernen, und benützen dabei die auch von Herrn Klein verwandten Punktgruppen der 24 Wendepunkte, der 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten und endlich der 84 sextactischen Punkte, für deren Anordnung wir folgende Sätze erhalten:

Die 24 Wendepunkte vertheilen sich nothwendig zu $2 . 12$ auf die Punkte a. Es sind dies also Punkte, in denen eine Tangente hyperosculirt, wesshalb sie auch bei den folgenden Punktgruppen mehrfach zählend auftreten. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten vertheilen sich zu $2 \cdot 12 + 32$ auf die Punkte a und b; endlich die 84 sextactischen Punkte zu $3 \cdot 12 + 48$ auf die Punkte a und c**).

Beachten wir jetzt die auf pag. 489 gegebene Aufzählung der Transformationen unserer Riemann'schen Fläche in sich, so sehen wir, dass unsere 12 Punkte a sich in drei Quadrupel spalten. Es giebt nämlich drei Collineationen von der Periode 2 (Ziffer α, γ jener

*) Vergl. etwa Ann. XIV, p. 149, 150.

**) Man könnte zunächst noch an die Möglichkeit denken, dass unsere Punkte a als sextactische Punkte siebenfach zählen und so vollständig die 84 sextactischen Punkte absorbiren. Von geometrischen Ueberlegungen abgesehen, zeigt jedoch die spätere algebraische Formulirung die Unzulässigkeit dieser Annahme und ergiebt vielmehr, dass Punkte, in denen eine Tangente hyperosculirt, dreifach als sextactische Punkte zählen.

Aufzählung), wobei (1.) die vier Punkte je *eines* dieser Quadrupel individuell fest bleiben, während (2.) die acht übrigen Punkte a je *innerhalb* ihrer Quadrupel sich vertauschen. Beachten wir noch, dass jede Collineation von der Periode 2 eine *Perspective* ist, so ergiebt unsere Gruppirung sofort die folgenden Schlüsse: Unsere 12 Punkte a vertheilen sich (wegen (1.)) zu je vieren auf drei Perspectivitätsaxen. Die (vierpunktig berührenden) Tangenten dieser Punkte gehen je durch das entsprechende Perspectivitätscentrum. Diese Centra fallen (wegen (2.)) mit den Schnittpunkten der Perspectivitätsaxen zusammen.

Legen wir das Dreieck dieser Perspectivitätsaxen als Coordinatendreieck zu Grunde, *so folgt mit Nothwendigkeit, wenn man in λ, μ, ν geeignete constante Factoren mit aufnimmt:*

$$(1) \qquad f = \lambda^4 + \mu^4 + \nu^4 = 0$$

als die Gleichungsform unserer Curve vierter Ordnung; und in der That geht diese Curve durch 96 Collineationen der Ebene in sich über, denn wir können die λ, μ, ν untereinander vertauschen und noch 2 derselben mit beliebigen vierten Einheitswurzeln multipliciren.

Um jetzt auf die Gleichung 96. Grades zu kommen, welche unsere reguläre Riemann'sche Fläche algebraisch darstellt, bedürfen wir (Ann. XIV, p. 446):

1. *als abhängig Variable* η dieser Gleichung — irgend einer auf unserer Curve eindeutigen Function der Coordinaten, welche in den 96 zusammengehörigen Punkten der Curve allgemein *verschiedene* Werthe besitzt. Dazu wählen wir die Coordinaten unserer Curvenpunkte selbst, und führen also gleichzeitig λ, μ, ν ein, zwischen denen dann noch unsere Relation (1) besteht.*)

2. *als unabhängige Variable* J — einer Function der Coordinaten, welche dadurch definirt ist, dass sie für alle zusammengehörigen Punkte der Curve und nur für zusammengehörige Punkte *denselben* Werth aufweist.

Es bleibt also J ungeändert für die 96 Collineationen, die unsere Curve in sich überführen, und lässt sich dabei darstellen als Parameter eines Büschels von Curven, welche auf unserer Curve vierter Ordnung 96 bewegliche Punkte ausschneiden. Zu diesem Zwecke lässt sich in unserem Falle, wie der Erfolg zeigt, ein Büschel von Curven benutzen, das mit der Curve 4ter Ordnung *keine* festen Grundpunkte gemein hat, also ein Büschel von Curven 24ter Ordnung.

---

*) Wir *müssen* in unserem Falle die Verhältnisse $\frac{\lambda}{\nu}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ *gleichzeitig* betrachten, oder irgend eine rationale Function derselben als Unbekannte einführen; $\frac{\lambda}{\mu}$ allein etwa würde nur 24 verschiedene Werthe bei unseren Transformationen annehmen.

Wir benützen für die Aufstellung eines solchen Büschels die speciellen Punktgruppen unserer Curve. Im Allgemeinen werden solche besondere Punktgruppen von Berührungscurven des Büschels auf der Grundcurve ausgeschnitten werden. Hier aber gelingt es uns (analog wie in dem von Herrn Klein behandelten Falle), Curven von *niedrigerer* als der Büschelordnung zu finden, welche unsere besonderen Punkte einfach ausschneiden und welche dann mehrfach zählend in unser Büschel eingehen.

In complicirteren Fällen wird man zweckmässiger Weise zur Herstellung dieser Curven die Bildungsprocesse der Invariantentheorie benützen*). Hier findet man ohne besondere Rechnung ganze Functionen 3ten, 8ten und 12ten Grades, $\varphi_{(3)}$, $\chi_{(8)}$ und $\psi_{(12)}$, welche gleich Null gesetzt unsere C_4 in den gemeinten Punktgruppen von 12, 32 und 48 Punkten treffen müssen.

Bilden wir nämlich:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi_{(3)} = \lambda\mu\nu, \\ \chi_{(8)} = \mu^4\nu^4 + \nu^4\lambda^4 + \lambda^4\mu^4, \\ \psi_{(12)} = \lambda^8\mu^4 - \mu^4\nu^8 + \nu^8\lambda^4 - \lambda^4\mu^8 + \mu^8\nu^4 - \nu^4\lambda^8, \end{cases}$$

so sehen wir nach dem Früheren zunächst unmittelbar, dass $\varphi_{(3)} = 0$ die Wendepunkte unserer Curve ausschneidet.

Die Curve $\chi_{(8)} = 0$ schneidet eine Gruppe von 32 Punkten aus unserer C_4 aus, die in ihrer Gesammtheit bei unseren Transformationen ungeändert bleiben und dabei nicht mit den Wendepunkten zusammenfallen. Es sind dies also *nothwendig* die 32 Berührungspunkte der Doppeltangenten.

Ebenso ist $\psi_{(12)}$ eine Function, die bis auf das Vorzeichen bei unseren Transformationen ungeändert bleibt; $\psi_{(12)} = 0$ schneidet eine Punktgruppe von 48 getrennten, von den Wendepunkten verschiedenen Punkten aus, die wieder in ihrer Totalität ungeändert bleiben und

*) Bildet man in unserem Falle jene Covarianten, die auch Herr Klein Ann. XIV, p. 446 ff. verwendet, so kommt, mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnung, von Zahlenfactoren abgesehen:

$$\nabla = \lambda^2\mu^2\nu^2.$$
$$C = \lambda^2\mu^2\nu^2\{\mu^4\nu^4 + \nu^4\lambda^4 + \lambda^4\mu^4\}.$$
$$K = \lambda^3\mu^3\nu^3\{\lambda^8\mu^4 - \mu^4\nu^8 + \nu^8\lambda^4 - \lambda^4\mu^8 + \mu^8\nu^4 - \nu^4\lambda^8\}.$$

Die Curven $\nabla = 0$, $C = 0$, $K = 0$ schneiden dabei hier bez. die 24 Wendepunkte, die 56 Berührungspunkte der Doppeltangenten und die 84 sextactischen Punkte aus. Das letztere [vgl. die Anmerkung auf pag. 511.] folgt, weil $K = 0$ mit der Curve übereinstimmt, die Cayley allgemein zur Bestimmung der sextactischen Punkte einer Curve aufgestellt hat. Vgl. Salmon, Higher plane curves, pag. 359 der 2. Aufl. Wir sehen somit die oben getroffene Vertheilung dieser Punktgruppen auf die Punkte a, b, c algebraisch bestätigt.

also nothwendig mit den oben aufgestellten Punkten c zusammenfallen müssen.

Bilden wir jetzt z. B.

(3a) $$J = \frac{\varphi_{(3)}^8}{\chi_{(8)}^3}$$

oder

(3b) $$J' = \frac{\varphi_{(3)}^8}{\psi_{(12)}^2},$$

so sind dies zwei Büschel von C_{24}, welche unsere Punktgruppen in der verlangten Weise ausschneiden.

Für das Curvenbüschel (3a) kommt dabei die Punktgruppe der 48 Punkte c durch eine allgemeine Berührungscurve zu Stande, denn die Curve $\psi_{(12)}^2 = 0$ ist in diesem Büschel nicht enthalten. Das Analoge gilt für das Büschel (3b) bezüglich der Curve $\chi_{(8)}^3 = 0$.

Da aber das *Schnittpunktsystem* auf unserer C_4 $f = 0$ für beide Curvenbüschel *das nämliche* ist, so muss (man vergl. die analogen Betrachtungen Ann. XIV, p. 448), *unter Zuziehung der Gleichung* $f = 0$, zwischen $\varphi_{(3)}$, $\chi_{(8)}$ und ψ_{12} eine Relation statthaben von der Form:

$$\varphi_{(3)}^8 = k \cdot \chi_{(8)}^3 + l \cdot \psi_{(12)}^2.$$

Bestimmt man durch Einsetzung specieller Werthe die Constanten k und l, so kommt

$$k = -\frac{4}{27} \quad \text{und} \quad l = -\frac{1}{27}.$$

Mit Zuziehung dieser Relation lassen sich jetzt unsere, in den Gleichungen (3) gegebenen Curvenbüschel ersetzen durch die Verhältnissgleichung:

(4) $$J : J - 1 : 1 = -4\,\chi_{(8)}^3 : \psi_{(12)}^2 : 27\,\varphi_{(3)}^8.$$

Und diese Gleichung, in Verbindung mit Gleichung (1), $f = 0$, *stellt jetzt unsere* 96*blättrige Fläche dar.*

In dieser Gleichungsform sehen wir unmittelbar, dass bei $J = 0$ die Blätter der Fläche zu je drei, bei $J = 1$ zu je zwei und bei $J = \infty$ zu je acht zusammenhängen; wie es sein soll. Dass aber die hiermit dargestellte Fläche nicht noch *andere* Verzweigungen aufweist, folgt (unter anderem) unmittelbar, wenn wir die Functionaldeterminante T aus f und zweien der obigen Functionen bilden. Diese wird z. B. für f, χ^3, φ^8, von constanten Factoren abgesehen,

$$T = \varphi^7 \cdot \chi^2 \cdot \psi,$$

und also sind die singulären Punktgruppen auf $f = 0$ durch die obigen drei Curven erschöpfend ausgeschnitten.

Die Gruppe unserer Fläche enthält, wie pag. 489, 1. gezeigt ist, eine ausgezeichnete Untergruppe, welche durch eine 48-blättrig über der complexen Ebene ausgebreitete, reguläre Riemann'sche Fläche definirt ist, deren Blätter an einer Stelle α zu je vier, an zwei weiteren Stellen β und γ zu je dreien verzweigt sind. Wollen wir diese Fläche mit den analogen Hülfsmitteln darstellen, wie die eben behandelte, so beachten wir lediglich, dass in Bezug auf diese Untergruppe die 32 Berührungspunkte von Doppeltangenten (die obigen Punkte b) unserer Curve 4ter Ordnung $f = 0$ sich in zwei Gruppen theilen, deren eine, wie man findet, aus $f = 0$ ausgeschnitten wird durch die Curve:

$$\varepsilon\lambda^4 + \varepsilon^2\mu^4 + \nu^4 = 0,$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}};$$

die andere Gruppe durch:

$$\varepsilon^2\lambda^4 + \varepsilon\mu^4 + \nu^4 = 0.$$

Berücksichtigen wir noch die Relation:

$$27(\lambda\mu\nu)^4 = (\varepsilon\lambda^4 + \varepsilon^2\mu^4 + \nu^4)^3 + (\varepsilon^2\lambda^4 + \varepsilon\mu^4 + \nu^4)^3,$$

welche wieder allgemein unter der Bedingung $f = 0$ statthat, so formulirt sich die Gleichung unserer Fläche, wenn wir zu $f = 0$ die Beziehung:

$$z : z - 1 : 1 = (\varepsilon\lambda^4 + \varepsilon^2\mu^4 + \nu^4)^3 : 27\lambda^4\mu^4\nu^4 : -(\varepsilon^2\lambda^4 + \varepsilon\mu^4 + \nu^4)^3$$

fügen, von der irgend zwei Glieder, z als den Parameter betrachtet, ein Büschel von Curven 12ter Ordnung darstellen, welches unsere C_4 in je 48 zusammengehörigen Punkten schneidet, von denen zweimal je drei, einmal je vier zusammenfallen.

Wir gehen noch kurz zur Darstellung einer weiteren Untergruppe, welche in den Gruppen der beiden eben behandelten Flächen ausgezeichnet enthalten ist. Sie ist (vergl. pag. 489, 2.) gegeben durch eine 16-blättrig über der complexen Ebene ausgebreitete reguläre Riemann'sche Fläche, deren Blätter an drei Stellen zu je vieren verzweigt sind. Hier ergiebt sich einfach ein Büschel von Geraden, welches auf unserer C_4 jedesmal 16 zusammengehörige Punkte ausschneidet, indem jedem Werthe des Parameters t unseres Büschels vier Gerade entsprechen. Das Büschel ist einfach dargestellt durch irgend zwei Glieder der Verhältnissgleichung:

$$t : t - 1 : 1 = \lambda^4 : -\mu^4 : -\nu^4.$$

Die Relation zwischen den drei hier gegebenen speciellen Curven der Büschel ist dabei unmittelbar

$$\lambda^4 + \mu^4 + \nu^4 = 0$$

selbst.

Eine weitere analoge Discussion aller in der ursprünglichen Gruppe enthaltenen Untergruppen ergiebt dann vollständig die gegenseitige Anordnung der Punktgruppen auf unserer C_4, welche uns andererseits in den jedesmal entsprechenden Riemann'schen Flächen vorliegt.

Zum Schlusse sei noch in Kürze der Zusammenhang des hier behandelten Problems mit folgender bekannten Aufgabe aus der Theorie der elliptischen Functionen erwähnt: *Man soll aus der absoluten Invariante des elliptischen Integrals**) *die Grössen* $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ (in der Legendre'schen Bezeichnung) *berechnen.*

Beachtet man nämlich die Identität:

$$(\sqrt{\varkappa})^4 + (\sqrt{\varkappa'})^4 + (\varrho)^4 = 0, \tag{1a}$$

wo ϱ eine primitive 8^{te} Einheitswurzel bedeutet, und setzt hier

$$\sqrt{\varkappa} = \lambda, \quad \sqrt{\varkappa'} = \mu, \quad \varrho = \nu$$

so wird die Gleichung (1a) unmittelbar mit Gleichung (1) identisch und die obige Gleichung (4) (pag. 514) geht über in:

$$\begin{aligned} J : J-1 : 1 = {} & 4(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^3 : \\ & : (1+\varkappa^2)^2 \cdot (2-\varkappa^2)^2 \cdot (1-2\varkappa^2)^2 \\ & : 27\varkappa^4 \cdot (1-\varkappa^2)^2. \end{aligned} \tag{4a}$$

Das ist aber genau die Relation, die zwischen der absoluten Invariante J und dem Legendre'schen Modul $\varkappa^2 = \sigma$ besteht, wie sie z. B. Klein im XIV. Annalenband pag. 114 Anm. giebt.

Die einfachste Methode zur Berechnung von $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ aus J bietet sich unmittelbar: Zunächst bestimme man $\varkappa^2$, und also $\varkappa'^2$, aus Gleichung (4a); dann hat man, um auf $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ zu kommen, noch zwei 4^{te} Wurzeln zu ziehen. Dem geht aber die Zerlegung der Gruppe unserer 96-blättrigen Fläche, wie wir sie auf pag. 489 u. 490, 2. u. 3. gegeben haben, unmittelbar parallel: Wir adjungiren die Gruppe eines Doppelpyramidentypus (3, 2, 2), $N = 6$ [vgl. pag. 115 der erwähnten Klein'schen Abhandlung, sowie die vorstehende Formel (4a)], dann zerfällt unsere Gruppe in zwei cyklische Gruppen von der Periode 4.

Leipzig, Mitte November 1880.

---

*) Hier ist mit Klein als *absolute Invariante* die Grösse $\frac{g_2^3}{\Delta}$ bezeichnet, wobei g_2 in der Weierstrass'schen Schreibweise die rationale Invariante, Δ die Discriminante der binären biquadratischen Form ist, die unter dem Quadratwurzelzeichen im Nenner des elliptischen Differentials steht. Man vergl. Annalen XIV, pag. 112.

Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten.

(Zweite Note.)

Von

A. Brill in München.

In einer früheren Note (S. 103 dieses Bandes) habe ich gezeigt, wie man zu der Gleichung einer doppelt unendlichen Schaar von Curven vierter Ordnung gelangt, welche die Wendepunkte einer Curve dieser Schaar mit zwei Doppelpunkten zu Basispunkten hat. Das dort angegebene Verfahren wende ich im Vorliegenden auf eine Gleichungsform an, durch welche im Allgemeinen jede Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten dargestellt werden kann, wobei ich beabsichtige, die Rechnung für diese Form durchzuführen und in den Coefficienten derselben die Gleichung der gesuchten Schaar darzustellen.

Zuvor jedoch muss ich auf einen der in jener Note angewandten Schnittpunktsätze zurückkommen. Es werden dort drei Fälle erwähnt, in denen die Identität:

$$\psi \equiv \alpha\varphi + \beta f \tag{1}$$

auch dann noch besteht, wenn die Curve $\varphi = 0$ die Curve $f = 0$ ausser in einfachen auch in Doppelpunkten der letzteren schneidet. Nach II. findet dies statt: „Wenn in jedem Doppelpunkt von f, in welchem auch φ einen solchen mit denselben Tangenten wie f hat, ψ ebenfalls einen Doppelpunkt mit den gleichen Tangenten besitzt.“

Ich bemerke hierzu nachträglich, dass die Erfüllung dieser Bedingung nicht hinreicht, wie dies nach jener Fassung scheinen kann, sondern dass noch eine weitere Bedingung zwischen den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden mit den Tangenten in dem betreffenden Doppelpunkt und den Polarcurven dritter Ordnung von φ, ψ, f — genommen in Bezug auf den Doppelpunkt — hinzutritt. Ich will dieser Bedingung eine algebraische Form geben.

In der Abhandlung: „Ueber einen Satz der Algebra etc.“ (Bd. VI dieser Ann.) hat Herr Nöther — der mich auf den soeben erwähnten

Umstand aufmerksam zu machen die Güte hatte — nachgewiesen, dass die Identität (1) immer und nur dann besteht, wenn dieselbe in der Nähe eines jeden Punktes erfüllt ist, für welchen f und φ gleichzeitig verschwinden.

Sind nun $x = a$, $y = b$ die Coordinaten eines Doppelpunktes von f, in welchem φ und ψ je Doppelpunkte mit denselben Tangenten besitzen, und denkt man sich f, φ und ψ nach Potenzen von $x - a$, $y - b$ angeordnet und z. B. durch $f^{(i)}$ die Summe aller Glieder i^{ter} Dimension von f, u. s. w. bezeichnet, so hat man:

$$f^{(0)} = \varphi^{(0)} = \psi^{(0)} = 0,$$

$$f^{(1)} = \varphi^{(1)} = \psi^{(1)} = 0.$$

Die Uebereinstimmung der Tangenten wird ausgedrückt durch die identischen Gleichungen:

$$\frac{f^{(2)}}{f_0} \equiv \frac{\varphi^{(2)}}{\varphi_0} \equiv \frac{\psi^{(2)}}{\psi_0} \equiv \big((y-b) - \xi(x-a)\big)\big((y-b)-\eta(x-a)\big),$$

wo f_0, φ_0, ψ_0 von Null verschiedene Constante sind. Soll nun in der Nähe des betrachteten Punktes obige Identität (1) erfüllt sein, so muss zwischen den soeben eingeführten Grössen die folgende Beziehung bestehen:

$$\begin{vmatrix} f_0 & f^{(3)}(\xi) & f^{(3)}(\eta) \\ \varphi_0 & \varphi^{(3)}(\xi) & \varphi^{(3)}(\eta) \\ \psi_0 & \psi^{(3)}(\xi) & \psi^{(3)}(\eta) \end{vmatrix} = 0,$$

wo z. B. $f^{(3)}(\xi)$ den Werth von $f^{(3)}$ bedeutet, wenn man darin

$$y - b = \xi(x-a)$$

gesetzt hat.

Die Erfüllung dieser Relation tritt als weitere Forderung zu derjenigen der Uebereinstimmung der Tangenten hinzu. Aber wenn dies auch a. a. O. nicht erwähnt worden ist, so bleiben doch alle Folgerungen richtig, die sich dort an die Anwendungen des Satzes II. knüpfen, weil für dieselben jene Zusatzbedingung von selbst erfüllt ist. Man kann dies daraus schliessen, dass im Nachfolgenden die dort angedeuteten identischen Umformungen wirklich durchgeführt sind. Es lässt sich indess auf folgende Weise auch direct einsehen. Der erwähnte Satz ist zweimal angewendet, wobei jedesmal — in den oben eingeführten Bezeichnungen ausgedrückt — die Glieder höherer Dimension von φ: $\varphi^{(3)}$, $\varphi^{(4)}$, $\cdots$ gleich Null sind. Ferner ist beidemal ψ die Hesse'sche Determinante H von f. Die Gleichung aber:

$$H^{(3)}(\xi) f^{(3)}(\eta) - H^{(3)}(\eta) f^{(3)}(\xi) = 0,$$

auf welche sich die obige Bedingungsgleichung in diesem Fall reducirt, ist in jedem Doppelpunkt von f erfüllt. (Man vergl. Math. Ann. Bd. XIII, p. 177.)

Indem ich mich nun zum eigentlichen Gegenstand dieser Note wende, lege ich meinen Formeln die Gleichung der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten in folgender Gestalt zu Grunde:

$$f \equiv x_2^2 x_3^2 d_{11} + x_3^2 x_1^2 d_{22} + x_1^2 x_2^2 d_{33}$$
$$+ 2x_1^2 x_2 x_3 d_{23} + 2x_2^2 x_3 x_1 d_{13} + 2x_3^2 x_1 x_2 d_{12} + \varepsilon x_3^4 = 0 \text{*)}$$

Diese Gleichungsform erhält man, wenn man zwei Eckpunkte des Coordinatendreiecks in den Doppelpunkten und den dritten, $x_1 = x_2 = 0$, so gelegen annimmt, dass die anstossenden Dreiecksseiten die Curve je in zwei zu den Ecken harmonisch gelegenen Punkten treffen**).

Da f in Bezug auf x_1 und x_2 symmetrisch gebildet ist, so müssen es auch die im Folgenden durch Invariantenprocesse aus f abgeleiteten Formen sein. Ich werde daher von zwei symmetrischen Gliedern immer nur eines angeben und das andere durch Punkte andeuten. In den Bezeichnungen schliesse ich mich an die erste Note an; der Gang der Rechnung wird von dem dort angegebenen etwas abweichen.

Ich beginne mit der Aufstellung des Kegelschnittbüschels, das durch die vier weiteren Schnittpunkte $a_1\, \alpha_1\, a_2\, \alpha_2$ der Tangentenpaare $t_1\tau_1$, $t_2\tau_2$ in den Doppelpunkten bestimmt ist.

Die Gleichung des einen Tangentenpaars ist:

$$t_1\tau_1 = x_2^2 d_{33} + x_3^2 d_{22} + 2x_2 x_3 d_{23} = 0,$$

woraus $t_2\tau_2$ durch Vertauschung der Indices 1 und 2 hervorgeht. Die Verbindungslinie ($\Gamma = 0$) der Doppelpunkte hat die Gleichung:

$$x_3 = 0,$$

und es besteht (a. a. O. p. 105) die Identität:

$$t_1\tau_1 t_2\tau_2 \equiv x_3^2 \cdot \Delta + d_{33} \cdot f,$$

aus der sich:

---

*) d_{ik} und d_{ki} werden in gleicher Bedeutung gebraucht.

**) Diese Anordnung lässt sich im Allgemeinen auf fünf verschiedene Arten treffen. Ist nämlich $f(y_1\, y_2\, y_3) = 0$ eine Gleichungsform, für die jene Bedingung noch nicht erfüllt ist, aber die Doppelpunkte die angegebene Lage haben, so treten ausser den oben aufgeführten nur noch die Potenzen $y_1 y_3^3$, $y_2 y_3^3$ auf. Diesen Gliedern kann man die Form:

$$y_1[f'(y_1)], \qquad y_2[f'(y_2)]$$

geben, wo die eckige Klammer bedeutet: für $y_1 = y_2 = 0$. Bestimmt man also aus den Gleichungen:

$$f'(y_1) = 0, \qquad f'(y_2) = 0$$

die $3 \cdot 3 - 2 - 2 = 5$ Werthepaare $\frac{y_1}{y_3}$, $\frac{y_2}{y_3}$, welche nicht einen Doppelpunkt geben, und setzt, wenn $\varkappa$, λ eines dieser fünf Werthepaare ist:

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1 - \varkappa y_3 : y_2 - \lambda y_3 : y_3,$$

so erhält durch Anwendung dieser Transformationsformeln f die gesuchte Gestalt.

$$\Delta = x_3^2(d_{11}d_{22} - \varepsilon d_{33}) + 2x_1x_3d_{22}d_{13} + \cdots - 2x_1x_2q$$

bestimmt, wo zur Abkürzung:

$$q = d_{12}d_{33} - 2d_{13}d_{23}$$

eingeführt ist, und die Punkte $\cdots$ das aus dem voraufgehenden Glied durch Vertauschung der Indices 1 und 2 hervorgehende Glied andeuten.

$\Delta = 0$ ist die Gleichung eines durch $a_1\,\alpha_1\,a_2\,\alpha_2$ und die Doppelpunkte gehenden Kegelschnitts. Einen andern Kegelschnitt N des Büschels erhält man aus der Identität:

$$x_3^2 \cdot N \equiv \Delta\Delta' + 2q^2 \cdot f,$$

aus welcher sich Δ' und N folgendermassen berechnen:

$$\Delta' = x_1x_2qd_{33} + x_1x_3(2qd_{23} + d_{22}d_{13}d_{33}) + x_2x_3(2qd_{13} + d_{11}d_{23}d_{33});$$

$$\begin{aligned} N = x_3^2 \cdot 2\varepsilon q + x_1x_2 \{4q^2d_{12} + qd_{33}(d_{11}d_{22} - \varepsilon d_{33}) \\ + 2d_{22}d_{13}(2qd_{13} + d_{11}d_{23}d_{33}) + \cdots\} \\ - x_1^2 \cdot 2d_{22}d_{33}(d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13}) - \cdots \\ + x_1x_3(d_{11}d_{22} - \varepsilon d_{33})(2qd_{23} + d_{22}d_{13}d_{33}) + \cdots \end{aligned}$$

wo q die frühere Bedeutung hat, D_{ik} hier wie in der Folge die Unterdeterminante von d_{ik} bedeutet in der Determinante:

$$2R^2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

Da man an Stelle der obigen Identität auch die folgende anschreiben kann:

$$x_3^2(N + \varrho\Delta) \equiv \Delta(\Delta' + \varrho x_3^2) + 2q^2 \cdot f,$$

wo ϱ eine beliebige Constante ist, so schneidet das Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten $a_1\,\alpha_1\,a_2\,\alpha_2$:

$$M = N + \varrho\Delta = 0$$

je dieselben vier mit ϱ veränderlichen Punkte aus, wie das Büschel:

$$D' = \Delta' + \varrho x_3^2 = 0.$$

Setzt man insbesondere:

$$\varrho = -2(d_{13}D_{13} + d_{23}D_{23}),$$

so erhält der Ausdruck M offenbar die Eigenschaft, für $\varepsilon = 0$, d. h. wenn die Curve f einen Doppelpunkt mehr erhält, in Bezug auf die drei Variabeln $x_1\,x_2\,x_3$ symmetrisch zu werden. $M = 0$ muss also dann jenen Kegelschnitt darstellen, der ausser durch die weiteren Schnittpunkte der sechs Tangenten in den *drei* Doppelpunkten durch noch zwei weitere Punkte der Curve geht, die, wie ich gezeigt habe (diese Annalen Band XIII, Seite 182), mit den sechs Wendepunkten der Curve auf einem Kegelschnitt liegen. $D' = 0$ stellt also

in diesem Fall einen Kegelschnitt dar, der durch diese beiden Punkte, die zwei Schnittpunkte des Tangentenpaars $t_3\tau_3$ in dem neu hinzugetretenen Doppelpunkt und die beiden anderen Doppelpunkte hindurchgeht.

Ich wende mich nun zur Gleichung der Curvenschaar vierter Ordnung. Eine Curve F der Schaar ergiebt sich aus der Identität:

$$\frac{1}{3}H + C \cdot f \equiv x_3^2 \cdot F,$$

wo C ein Ausdruck zweiter Dimension ist, H die Hesse'sche Determinante, welche, nach Potenzen von x_1, x_2 geordnet, mit den Gliedern beginnt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}H = \frac{1}{24}\sum \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \\ = -2d_{33}\,q x_1^3 x_2^3 - d_{33} D_{11} x_1^4 x_2^2 - \cdots \\ + 2d_{31}(d_{22}d_{33} - 2d_{23}^2)\,x_1^3 x_2^2 x_3 + \cdots \text{ etc.}\end{aligned}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned}F = x_1^2 x_2^2 \{ d_{33}(d_{11} d_{23}^2 + d_{22}\,d_{31}^2 + d_{33}\,d_{12}^2 + 3d_{11}d_{22}d_{33} - 6d_{12}d_{23}d_{31}) \\ - 4d_{23}^2 D_{22} - 4d_{31}^2 D_{11} \} \\ + 2x_1^3 x_2 D_{11} q + \cdots - 2x_1^3 x_3 d_{13} d_{22} D_{11} - \cdots \\ + 2x_3 x_1^2 x_2 (d_{23}d_{33}D_{33} - d_{22}d_{23}D_{22} - 2d_{12}d_{13}D_{11}) + \cdots \\ + \varepsilon \cdot x_3^2 \{ x_3^2 d_{33} D_{33} + 2x_3 x_1 (d_{23}d_{31} - 2d_{12}d_{33})\,d_{23} + \cdots \\ + 3x_1^2 d_{33} D_{11} + \cdots + 2x_1 x_2 d_{33} q \} \\ + \varepsilon^2 \cdot 2x_3^4 d_{33}^2.\end{aligned}$$

Eine andere Curve Φ der Schaar bestimmt sich aus der Identität:

$$F \cdot D' + C' \cdot f \equiv x_3^2 \Phi,$$

wo D' die oben eingeführte, C' eine noch unbestimmte Form zweiter Dimension ist. Im Falle $\varepsilon = 0$ muss nach dem früher Bemerkten das Schnittpunktsystem von $\Phi = 0$ mit $f = 0$ in das des Wendekegelschnitts und des Tangentenpaars $t_3\tau_3$ in dem neu entstehenden Doppelpunkt übergehen. In der That wird für $\varepsilon = 0$:

$$[\Phi]_{\varepsilon=0} = \Phi_0 = -\frac{1}{2}\,d_{33} \cdot t_3\tau_3 \cdot \Gamma,$$

wo:

$$t_3\tau_3 = d_{22}x_1^2 + d_{11}x_2^2 + 2d_{12}x_1x_2$$

und:

$$\Gamma = \Gamma_{11}x_1^2 + \Gamma_{22}x_2^2 + \Gamma_{33}x_3^2 + 2\Gamma_{23}x_2x_3 + 2\Gamma_{31}x_3x_1 + 2\Gamma_{12}x_1x_2$$

ist. Es genügt, von diesen Coefficienten zwei anzugeben, aus denen die übrigen durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehen:

$$\Gamma_{11} = -4D_{11}(d_{12}D_{12} + d_{13}D_{13});$$
$$\Gamma_{23} = 4R^4(2d_{12}d_{13} + 3d_{11}d_{23}) + 4d_{23}D_{23}^2,$$

wo $4R^4$ das Quadrat der Determinante der d_{ik} bedeutet. Φ ist ein in ε quadratischer Ausdruck. Setzt man:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon d_{33}\Phi_1 + \varepsilon^2 d_{33}^2\Phi_2,$$

so hat Φ_0 den eben angegebenen Werth, Φ_1 und Φ_2 bez. den folgenden:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 = {} & 2x_1^2x_2^2 \cdot q^2 d_{33} + 3x_1^3x_2 \cdot q d_{33} D_{11} + \cdots \\
& + 3x_1^3x_3 \cdot D_{11}(2q d_{23} + d_{22}d_{13}d_{33}) + \cdots \\
& + x_1^2x_2x_3 \{4q d_{13}(2d_{22}d_{33} - 3d_{23}^2) + 3d_{11}d_{23}d_{33}D_{11}\} + \cdots \\
& + 2x_1^2x_3^2 \{12 d_{23}^3 d_{13} d_{12} - 6 d_{23}^2 d_{13}^2 d_{22} - 4 d_{12} d_{23} d_{31} d_{22} d_{33} - d_{22} d_{12}^2 d_{33}^2 \\
& \qquad - 3 d_{23}^2 d_{12}^2 d_{33} + 3 d_{22}^2 d_{13}^2 d_{33} + 3 d_{11} d_{22} d_{33} d_{23}^2 \\
& \qquad - 3 d_{11} d_{23}^4\} + \cdots \\
& + x_1x_2x_3^2 \{-2d_{11}d_{22}d_{33}q - 14 d_{12}^2 d_{23} d_{31} d_{33} + 3 d_{11} d_{23}^2 d_{12} d_{33} \\
& \qquad + 3 d_{22} d_{31}^2 d_{12} d_{33} - 12 d_{23}^3 d_{13} d_{11} - 12 d_{13}^3 d_{23} d_{22} \\
& \qquad + 36 d_{12} d_{23}^2 d_{31}^2\} \\
& + x_1x_3^3 \{3d_{11}d_{22}d_{13}d_{23}^2 - 6d_{11}d_{12}d_{23}^3 - 2d_{11}d_{22}^2 d_{33}d_{13} + 2d_{13}d_{22}d_{33}d_{12}^2 \\
& \qquad + 12 d_{13} d_{12}^2 d_{23}^2 + 3 d_{22}^2 d_{13}^3 - 12 d_{13}^2 d_{23} d_{12} d_{22}\} + \cdots \\
& - 2x_3^4(d_{11}d_{22} - d_{12}^2)(d_{13}D_{13} + d_{23}D_{23}); \\
\Phi_2 = {} & 2x_3^2 \cdot \Delta' - 4x_3^4(d_{13}D_{13} + d_{23}D_{23}).
\end{aligned}$$

Der Ausdruck Δ' und die Grössen D_{ik} und q haben die frühere Bedeutung.

Die Gleichung der gesuchten Schaar ist alsdann:

$$\varkappa F + \lambda\Phi + \mu f = 0,$$

wo F, $\frac{\Phi}{d_{33}}$ die angegebenen ganzen Functionen vierten, bez. fünften Grades in den Coefficienten der zu Grunde gelegten Curvengleichung $f = 0$ sind.

München, im October 1880.

Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems.

Von

A. Mayer in Leipzig.

Der Weg, den Pfaff zur Integration einer Gleichung von der Form:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_m\,dx_m = 0$$

einschlägt, beruht auf der fortgesetzten Anwendung einer und derselben Transformation, die sich als Aufgabe formulirt so aussprechen lässt:

Man soll $x_1, x_2, \cdots, x_m$ als von einander unabhängige Functionen von m neuen Variabeln $t, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ so bestimmen, dass identisch wird:

$$\text{I.} \qquad \sum_{h=1}^{h=m} X_h\,dx_h = \frac{1}{N}\sum_{i=2}^{i=m} \mathsf{A}_i\,d\alpha_i,$$

wo N eine Function von $t, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, die Grössen $\mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_m$ dagegen blosse Functionen von $\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ sind,

und es ist sowohl für die ganze Anlage, wie auch für die allgemeine Anwendbarkeit der Pfaff'schen Methode erforderlich, dass diese Aufgabe stets lösbar sei für ein gerades m, dagegen im Allgemeinen keine Lösung zulasse, wenn m ungerade ist. Weder das Eine, noch das Andere ist aber bisher wirklich bewiesen worden.

Es wird nämlich, soweit ich sehen kann, immer angenommen, dass das sogenannte erste Pfaff'sche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen allein schon hinreiche, um die Aufgabe zu lösen. Das ist aber nur so lange richtig, als die aus den Elementen

$$a_{i\varkappa} = \frac{\partial X_i}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_i}$$

gebildete schiefe Determinante nicht verschwindet, (welcher Fall allerdings in der Regel ausschliesslich betrachtet wird). Dies zu zeigen sowie überhaupt die Grundlage der Pfaff'schen Methode sicher zu stellen, ist der Zweck der vorliegenden Note, in der alles bei Seite gelassen ist, was für diesen Zweck nicht unmittelbar nöthig erschien, während eben der Wunsch, jene Methode vollkommen klar zu begrün-

den, die vielleicht allzugrosse Ausführlichkeit in anderen Punkten, namentlich in solchen, die man gewöhnlich als selbstverständlich betrachtet, wohl entschuldigen dürfte. —

Die Forderung (I) führt zunächst auf die Bedingung:

$$(1)\qquad \mathsf{B} = \sum_{h=1}^{h=m} X_h \frac{\partial x_h}{\partial t} = 0$$

und liefert zugleich für die A_i die Werthe:

$$(2)\qquad \mathsf{A}_i = \sum_{h=1}^{h=m} N X_h \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}.$$

Diese sollen frei von t sein. Daher sind die Gleichung (1) und die m Gleichungen:

$$(3)\qquad \frac{\partial \mathsf{A}_i}{\partial t} = \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial N X_h}{\partial t} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i} + \sum_{h=1}^{h=m} N X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial \alpha_i \partial t} = 0$$

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen des Problems, denen durch unabhängige Functionen $x_1, x_2, \cdots, x_m$ der Variabeln $t, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ zu genügen ist.

Nun ist:

$$(4)\qquad \frac{\partial N}{\partial t}\mathsf{B} = \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial N X_h}{\partial t} \frac{\partial x_h}{\partial t} - N \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial X_h}{\partial t} \frac{\partial x_h}{\partial t},$$

$$\frac{\partial N\mathsf{B}}{\partial \alpha_i} = \mathsf{B}\frac{\partial N}{\partial \alpha_i} + N \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial X_h}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_h}{\partial t} + \sum_{h=1}^{h=m} N X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial t \partial \alpha_i}.$$

Also hat man:

$$(5)\qquad \frac{\partial \mathsf{A}_i}{\partial t} - \frac{\partial N\mathsf{B}}{\partial \alpha_i} = \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial N X_h}{\partial t} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i} - N \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial X_h}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_h}{\partial t} - B \frac{\partial N}{\partial \alpha_i}.$$

In Folge der Bedingungen (1) und (3) muss daher für $\alpha_i = t, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$:

$$(6)\qquad \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial N X_h}{\partial t} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i} - N \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} = 0$$

werden und zugleich ergiebt sich aus den Formeln (4) und (5):

II. *Man kann umgekehrt die ursprünglichen Bedingungen* (1) *und* (3) *ersetzen durch die m Bedingungen* (6), *so oft es möglich ist, den letzteren zu genügen, ohne dass* $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ *wird. Folgt dagegen aus den Gleichungen* (6) $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ (in welchem Falle die erste Gleichung (6) eine Identität wird), *so muss man diesen Gleichungen noch die Bedingung* (1) *selbst hinzufügen.*

Die Bedingungen (6) lassen sich aber selbst wieder auf andere einfachere zurückführen.

Wegen:

$$\frac{\partial X_\varkappa}{\partial \alpha_i} = \sum_{h=1}^{h=m} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}$$

kann man nämlich diese Gleichungen zunächst so schreiben:

$$\sum_{h=1}^{h=m} \left[\frac{\partial N X_h}{\partial t} - N \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_h} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} \right] \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i} = 0.$$

Nun sollen $x_1, \cdots, x_m$ unabhängige Functionen von $t, \alpha_2, \cdots \alpha_m$, also

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m}$$

verschieden von Null sein. Die Bedingungen (6) zerfallen daher in die folgenden:

$$\frac{\partial N X_h}{\partial t} - N \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_h} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} = 0.$$

Durch die Formel:

$$\frac{\partial N X_h}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} X_h + N \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \frac{\partial X_h}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t}$$

verwandeln sich diese aber in:

$$N \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \left(\frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_\varkappa} \right) \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} X_h.$$

Setzt man also:

$$(7) \qquad \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_\varkappa} = \alpha_{\varkappa h},$$

so reduciren sich schliesslich die Bedingungen (6) auf die folgenden m Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \alpha_{\varkappa h} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} = X_h \frac{\partial \log N}{\partial t}.$$

Das vorgelegte Problem wird demnach unter allen Umständen gelöst durch die $m+1$ Gleichungen (1) und (8), vorausgesetzt dass man ihnen durch unabhängige Functionen $x_1, \cdots, x_m$ genügen kann.

Letzteres ist aber immer der Fall, so oft die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \cdots & \alpha_{m1}, & -X_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1m}, & \cdots & \alpha_{mm}, & -X_m \\ X_1, & \cdots & X_m, & 0 \end{vmatrix}$$

der $m+1$ Gleichungen (8) und (1) Null ist.

Denn ist $\Delta = 0$, so kann man diesen Gleichungen immer genügen

durch Werthe der $\frac{\partial x_\varkappa}{\partial t}$, die nicht sämmtlich Null sind. Wird aber (1) und (8) erfüllt durch die Annahmen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} : \frac{\partial x_2}{\partial t} : \cdots : \frac{\partial x_m}{\partial t} : \frac{\partial \log N}{\partial t} = u_1 : u_2 : \cdots : u_m : M,$$

wo $u_1, u_2, \cdots, u_m$ nicht sämmtlich Null sind, so sind, weil t selbst in den Gleichungen (1) und (8) gar nicht vorkommt, $u_1, \cdots, u_m, M$ blosse Functionen von $x_1, x_2, \cdots, x_m$, und wenn etwa u_1 nicht Null ist, so genügen die Werthe:

$$(9) \qquad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{u_2}{u_1}, \cdots, \frac{\partial x_m}{\partial x_1} = \frac{u_m}{u_1},$$

verbunden mit dem Werthe

$$(10) \qquad \frac{\partial \log N}{\partial x_1} = \frac{M}{u_1}$$

identisch den Gleichungen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} X_\varkappa \frac{\partial x_\varkappa}{\partial x_1} = 0,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \alpha_{\varkappa h} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial x_1} = X_h \frac{\partial \log N}{\partial x_1},$$

d. h. den $m+1$ Bedingungen, die aus (1) und (8) hervorgehen, wenn man $t = x_1$ annimmt.

Die Gleichungen (9) bilden aber ein System von $m-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $x_2, \cdots, x_m$ und x_1. Sind daher

$$x_\varkappa = \varphi_\varkappa(x_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

ihre vollständigen Lösungen, so sind die Werthe:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = \varphi_2, \cdots, x_m = \varphi_m,$$

indem sie sämmtliche Bedingungsgleichungen der Transformation erfüllen und zugleich

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m} = \sum \pm \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha_m},$$

also verschieden von Null ergeben, Lösungen des vorgelegten Problems*).

*) Will man auch noch die zugehörigen Werthe der Coefficienten A_i selbst finden, so hat man nur, nach Substitution jener vollständigen Lösungen, aus (10) durch einfache Quadratur

$$N = \gamma e^{\int \frac{M}{u_1} \partial x_1}$$

zu berechnen und diesen Werth von N in die aus (2) entspringenden Formeln:

$$\mathsf{A}_i = N \sum_{h=2}^{h=m} X_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \alpha_i}.$$

Das Problem ist also in der That immer lösbar, so oft die Determinante Δ Null ist und zwar wird seine Lösung dann durch vollständige Integration eines Systems von $m-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten.

Dagegen besitzt es keine Lösung, wenn Δ nicht verschwindet. Denn dann kann man den Gleichungen (1) und (8) nur genügen durch die Werthe:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}=\frac{\partial x_2}{\partial t}=\cdots=\frac{\partial x_m}{\partial t}=\frac{\partial \log N}{\partial t}=0$$

und diese widersprechen der Forderung, dass $x_1, x_2, \cdots, x_m$ unabhängige Functionen von $t, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ sein sollen.

Als schiefe Determinante vom Grade $m+1$ ist aber Δ stets Null, wenn m gerade, und im Allgemeinen verschieden von Null, wenn m ungerade ist. Daher hat man den Satz:

III. *Das vorgelegte Transformationsproblem ist dann und nur dann stets lösbar, wenn m eine gerade Zahl ist, und zwar erfordert in diesem Falle seine Lösung die vollständige Integration eines Systems von $m-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

Wie auf diesen Satz sich die Pfaff'sche Methode zur Integration einer jeden linearen totalen Differentialgleichung einfach und natürlich aufbaut, das hat Gauss in seiner Anzeige der Pfaff'schen Abhandlung*) in so classischer Kürze und Klarheit auseinandergesetzt, dass es ganz überflüssig wäre, darauf hier noch irgendwie einzugehen.

Dagegen geht aus dem Vorhergehenden allein die Richtigkeit der in Betreff des ersten Pfaff'schen Systems, oder der Gleichungen (8) aufgestellten Behauptung noch nicht klar hervor. Fassen wir daher den Fall

$$m=2n$$

jetzt näher ins Auge!

Im Allgemeinen ist hier die Determinante:

$$\mathsf{A}=\sum\pm\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{mm}$$

verschieden von Null. Ist dies aber der Fall, so sind die Gleichungen (8) unabhängig von einander. Daher muss nothwendig die Gleichung (1), indem sie mit den Gleichungen (8) zusammen ein System von

---

einzusetzen, wobei man der willkürlichen Constante γ den Werth 1 geben kann, da sie auf die Forderung, dass die A_i frei von x_1 sein sollen, keinen Einfluss haben kann und sich aus der Transformation I. von selbst weghebt. Diese letzte Rechnung lässt sich aber bekanntlich ganz ersparen, wenn man nach dem Vorgange Jacobi's (Crelle J. 17, p. 156) die Anfangswerthe von $x_2, \cdots, x_m$ als willkürliche Constanten in die Lösungen des Systems (9) eingeführt hat.

*) Gauss, Werke III, p. 231.

verschwindender Determinante Δ bildet, eine blosse Folge dieser m Gleichungen sein.

In der That, wenn A nicht Null ist, so kann auch nicht jede der Summen:

$$\sum_{h=1}^{h=m} \mathsf{A}_{\varkappa h} X_h$$

verschwinden, wo unter $\mathsf{A}_{\varkappa h}$ der Coefficient des Elementes $\alpha_{\varkappa h}$ in der Determinante A verstanden wird. Denn sonst müsste jedes $X_h = 0$ sein. Sei also etwa:

$$\sum_{h=1}^{h=m} \mathsf{A}_{1h} X_h$$

verschieden von Null. Nehmen wir dann $t = x_1$, so werden die Gleichungen (8)

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} \alpha_{\varkappa h} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial x_1} = X_h \frac{\partial \log N}{\partial x_1}$$

und ergeben:

$$\mathsf{A} = \frac{\partial \log N}{\partial x_1} \sum_{h=1}^{h=m} \mathsf{A}_{1h} X_h,$$

also für $\frac{\partial \log N}{\partial x_1}$ einen endlichen und von Null verschiedenen Werth. Nach II. genügen daher in dem betrachteten Falle die Gleichungen (8) allein schon zur Lösung des Problems.

Ist dagegen bei geradem m $\mathsf{A} = 0$, so braucht deshalb doch die schiefe Determinante vom Grade m:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22}, & \cdots & \alpha_{m2}, & -X_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2m}, & \cdots & \alpha_{mm}, & -X_m \\ X_2, & \cdots & X_m, & 0 \end{vmatrix}$$

nicht Null zu sein. Denn sie ist unabhängig von X_1, während bei gegebenem $X_2, \cdots, X_m$ die Geichung $\mathsf{A} = 0$ eine partielle Differentialgleichung 1. O. für X_1 ist. Wenn aber Δ_{11} nicht Null ist, so verschwinden von der Determinante Δ nicht sämmtliche Unterdeterminanten m^{ten} Grades und die $m+1$ Gleichungen (8) und (1) reduciren sich also nur auf m, nicht auf weniger Gleichungen. Sie bestimmen daher eindeutig ihre m Unbekannten, die Verhältnisse:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} : \frac{\partial x_2}{\partial t} : \cdots : \frac{\partial x_m}{\partial t} : \frac{\partial \log N}{\partial t}.$$

Sobald man also Werthe dieser Unbekannten angeben kann, die den Gleichungen (1) und (8) genügen, so sind dies die einzigen Werthe, welche in dem angenommenen Falle diese Gleichungen befriedigen.

Solche Werthe erhält man aber, wenn man $\frac{\partial \log N}{\partial t} = 0$ setzt und die Verhältnisse der $\frac{\partial x_\varkappa}{\partial t}$ aus den $m+1$ Gleichungen bestimmt:

$$(11) \quad \begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} a_{\varkappa h} \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} = 0, \\ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=m} X_\varkappa \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Eine solche Bestimmung ist möglich. Denn weil nach Voraussetzung die schiefe Determinante A vom Grade $m = 2n$ verschwindet, so sind auch alle ihre Unterdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades $= 0$ und die m ersten Gleichungen (11) reduciren sich daher auf $m - 2$ Gleichungen. In dem betrachteten Falle ergeben demnach die Gleichungen (1) und (8) nothwendig $\frac{\partial \log N}{\partial t} = 0$ und daher genügt nach II. das System (8) allein nicht mehr zur Lösung des Problems, sondern diese wird vielmehr erst durch die Gleichungen (11) bewirkt.

Zugleich erhellt, dass das Problem in dem Falle, wo bei geradem m die Determinante $\mathsf{A} = 0$ wird, durchaus nicht nothwendig unbestimmt zu werden braucht.*) Eine solche Unbestimmtheit wird vielmehr erst dann eintreten, wenn mit der Determinante A zugleich auch alle ihre Unterdeterminanten vom $(m-2)^{\text{ten}}$ oder von einem noch niedrigeren Grade verschwinden, und zwar entsteht dann eigenthümlicher Weise stets eine gerade Unbestimmtheit, d. h. man kann in einem solchen Falle von den $m - 1$ Verhältnissen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} : \frac{\partial x_2}{\partial t} : \cdots : \frac{\partial x_m}{\partial t}$$

stets eine *gerade* Anzahl willkürlich wählen, oder, was immer das

---

*) Für die totale Differentialgleichung

$$f_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n - dz = 0$$

z. B., die der von z freien partiellen Differentialgleichung 1. O.

$$p_1 = f_1(x_1 \cdots x_n p_2 \cdots p_n), \quad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

äquivalent ist, reduciren sich die Gleichungen (8) und (1) auf die bekannten $2n - 1$ Gleichungen:

$$\frac{dx_h}{dx_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial p_h}, \quad \frac{dp_h}{dx_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_h},$$

$$\frac{dz}{dx_1} = f_1 - \sum_{h=2}^{h=n} p_h \frac{\partial f_1}{\partial p_h}$$

und das Transformationsproblem bleibt hier vollkommen bestimmt.

Bequemste sein wird, $= 0$ setzen. Denn wenn in einer schiefen Determinante sämmtliche Unterdeterminanten vom Grade $2r$ verschwinden, so sind, wie Herr Frobenius nachgewiesen hat*), auch alle Unterdeterminanten $(2r-1)^{\text{ten}}$ Grades $= 0$. Wegen $m = 2n$ zieht daher das Verschwinden aller Unterdeterminanten vom Grade $m - 2p$ in der Determinante A nothwendig auch das Verschwinden aller Unterdeterminanten vom Grade $m - 2p - 1$ nach sich und es reduciren sich dann also die $m + 1$ Gleichungen (11) auf $m - 2p - 1$ Gleichungen, so dass man ihnen durch Werthe der $\frac{\partial x_\varkappa}{\partial l}$, die nicht sämmtlich Null sind, auch dann noch genügen kann, nachdem man gewisse $2p$ der Variabeln x willkürlichen Constanten gleichgesetzt hat.

Erinnert man sich an die Jacobi'sche Art, durch Einführung der Anfangswerthe die verschiedenen totalen Differentialgleichungen von vornherein aufzustellen, auf welche in der Pfaff'schen Methode successive die Integration der gegebenen Gleichung zurückgeführt wird, so übersieht man leicht, wie sich dieser Vortheil s. z. s. stufenweise je um zwei Einheiten abnehmend durch die $p - 1$ ersten Reductionen forterbt. —

*) Borchardt's J. 82, p. 242.

Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors nach der mittleren Anomalie*).

Von

W. Scheibner in Leipzig.

§ 1.

In Nr. 665 und 709—712 der Astronomischen Nachrichten**) ist ein Aufsatz von C. G. J. Jacobi enthalten, in welchem die Coefficienten der trigonometrischen Functionen sehr grosser Vielfachen der mittleren Anomalie in der Entwickelung des Radiusvectors und der Mittelpunktsgleichung angenähert bestimmt werden. Die Methode, welche dieser Abhandlung zu Grunde liegt, ist bereits im Jahre 1817 von Carlini in einer besonderen Schrift auseinandergesetzt worden; indessen sind die Resultate Carlini's mit verschiedenen Fehlern behaftet, durch welchen Umstand bewogen Jacobi die erwähnte Umarbeitung unternahm. Man kann nicht sagen, dass der daselbst eingeschlagene Weg leicht zum Ziele führt, wie denn auch die angedeutete Aufgabe in Bezug auf die Mittelpunktsgleichung von Jacobi als eine der schwierigsten ihrer Art bezeichnet wird. Die Betrachtung, dass die Coefficienten der Mittelpunktsgleichung mit denen der Entwickelung von $\left(\frac{a}{r}\right)^2$ übereinstimmen, bewog mich zu untersuchen, ob nicht Formeln für die Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors aufgestellt werden könnten, von denen alsdann die von Jacobi behandelten Aufgaben als specielle Fälle erscheinen mussten. Der Versuch gelang, und ich habe mittelst einer eigenthümlichen, sehr allgemeinen Methode, welche sich durch Kürze und Leichtigkeit der Rechnung empfiehlt, ein Resultat abgeleitet, welches die von Jacobi gefundenen Ausdrücke vollkommen bestätigt, und für ganz beliebige,

---

*) In englischer Uebersetzung publicirt in Gould's Astronomical Journal No. 95 (Bd. IV, S. 177) Cambridge Mass. 1856, Aug. 4.

**) Siehe Bd. 28, S. 257—270 u. Bd. 30, S. 197—254.

positive und negative Potenzen des Radiusvectors Gültigkeit behält. Dieses Resultat will ich im Folgenden auseinandersetzen, und die Richtigkeit desselben durch verschiedene Betrachtungen ausser Zweifel zu stellen suchen.

§ 2.

Wenn n einen beliebigen positiven oder negativen Exponenten, g die mittlere Anomalie, φ den Excentricitätswinkel, r den Radiusvector und a die halbe grosse Axe bezeichnet, und man setzt

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = c_0^n + 2\sum_{p=1}^{\infty} c_p^n \cos pg$$

so ergibt sich für den Werth des Coefficienten c_p^n eine nach den absteigenden Potenzen von $\sqrt{p}$ geordnete Reihe, welche zur Classe der sogenannten halbconvergirenden Reihen gehört, und für grosse Werthe von p in ihren Anfangsgliedern zur Berechnung gebraucht werden darf. Ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, und man schreibt nach Legendre's Bezeichnung und Gauss' Definition

$$\Gamma p = \lim \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{p\cdot \overline{p+1}\cdot \overline{p+2}\cdots \overline{p+m-1}}\, m^{p-1} \qquad \text{für } m=\infty$$

so wird

$$c_p^n = p^{\frac{n-2}{2}} (2\cos\varphi)^{-\frac{n}{2}} \operatorname{tg}^p \tfrac{1}{2}\varphi \, e^{p\cos\varphi} \left\{ \frac{A}{\Gamma\frac{n}{2}} + \frac{n}{3\cos\varphi}\sqrt{\frac{2}{p\cos\varphi}}\,\frac{B}{\Gamma\frac{n-1}{2}} \right\}$$

wo sich für A und B die Reihen ergeben

$$A = 1 - \frac{n(n-2)}{8p\cos\varphi}(1) + \frac{n(n-2)(n-4)}{64p^2\cos^2\varphi}(2)\cdots$$

$$B = 1 - \frac{n-3}{8p\cos\varphi}[1] + \frac{(n-3)(n-5)}{320p^2\cos^2\varphi}[2]\cdots$$

In diesen Gleichungen ist zur Abkürzung geschrieben:

$$(1) = 1 - \frac{4n+11}{9\cos^2\varphi}$$

$$[1] = \frac{5n+11}{5} - \frac{4n^2+33n+59}{27\cos^2\varphi}$$

$$(2) = \frac{n+2}{2} - \frac{20n^2+143n+222}{45\cos^2\varphi} + \frac{16n^3+264n^2+1307n+1878}{486\cos^4\varphi}$$

$$[2] = \frac{35n^2+224n+317}{14} - \frac{20n^3+297n^2+1324n+1719}{27\cos^2\varphi} + \frac{16n^4+440n^3+4175n^2+15880n+19809}{486\cos^4\varphi}$$

Der für c_p^n gegebene Ausdruck gilt nicht allein gleichmässig für ganze und gebrochene, rationale und irrationale Werthe von n, sondern auch für beliebige Werthe von φ, wie klein auch die Excentricität genommen werden möge. Die einzigen Ausnahmefälle bilden, wie sich von selbst versteht, die Werthe $p = 0$ und $\cos\varphi = 0$ oder $\varphi = 90^0$, wo die gegebene Entwickelung unstatthaft wird.

Um die beiden von Jacobi behandelten Fälle abzuleiten, setzen wir $n = -1$ und $n = 2$, wodurch die Ausdrücke hervorgehen

$$c_p^{-1} = -\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi}\right)^p \sqrt{\frac{\cos\varphi}{2\pi p^3}}\left\{1 - \frac{3}{8p\cos\varphi}\left(1 - \frac{7}{9\cos^2\varphi}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{15}{64p^2\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{5\cos^2\varphi} + \frac{91}{54\cos^4\varphi}\right)\cdots\right\}$$

$$c_p^2 = \left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi}\right)^p \frac{1}{2\cos\varphi}\left\{1 + \frac{2}{3\cos\varphi}\sqrt{\frac{2}{p\pi\cos\varphi}}\left[1 + \frac{1}{8p\cos\varphi}\left(\frac{21}{5} - \frac{47}{9\cos^2\varphi}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{64p^2\cos^2\varphi}\left(\frac{543}{14} - \frac{127}{\cos^2\varphi} + \frac{1601}{18\cos^4\varphi}\right)\cdots\right]\right\}$$

Wenn man die verschiedene Bezeichnung auf einander reducirt, so findet man, dass die Jacobi'schen Gleichungen

$$Q = 2c_p^{-1} = -(\alpha i^f)^p \frac{2f}{p\sqrt{2\pi p f}}\left\{1 - \left(\frac{3}{8f} - \frac{7}{24f^3}\right)\frac{1}{p}\right\}$$

$$P = \frac{2\cos\varphi}{p}\, c_p^2 = \frac{1}{p}\,(\alpha i^f)^p \left\{1 + \frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi p f^3}}\right\}$$

mit den vorstehenden Werthen übereinstimmen.

Bezeichnet man durch J_λ^p die Function

$$J_\lambda^p = \frac{\lambda^p}{p!} - \frac{\lambda^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{\lambda^{p+4}}{2!(p+2)!} - \frac{\lambda^{p+6}}{3!(p+3)!} \pm \cdots$$

und setzt $\lambda = \frac{1}{2}p\sin\varphi$, so ist bekanntermaassen

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_\lambda^p \cos pg$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi - 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda}{p^2}\,\frac{\partial J}{\partial\lambda}\cos pg$$

Schreibt man folglich in unseren Formeln $n = 1$, so folgt

$$c_p^1 = J_\lambda^p = \operatorname{tg}^p\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{p\cos\varphi}\,\frac{1}{\sqrt{2p\pi\cos\varphi}}\left\{1 + \frac{1}{8p\cos\varphi}\left(1 - \frac{5}{3\cos^2\varphi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{64p^2\cos^2\varphi}\left(\frac{9}{14} - \frac{11}{3\cos^2\varphi} + \frac{55}{18\cos^4\varphi}\right)\cdots\right\}$$

und es lässt sich leicht verificiren, dass hieraus der Werth von

$$c_p^{-1} = -\frac{\lambda}{p^2}\frac{\partial J}{\partial \lambda}$$

durch Differentiation nach λ hervorgeht.

§ 3.

Weit allgemeinere Formeln zur Bestätigung der Richtigkeit unserer Ausdrücke lassen sich auf folgendem Wege ableiten. Setzt man

$$\frac{r}{a} = 1 - \sin\varphi\cos u$$

wo also

$$u = g + \sin\varphi\sin u$$

die excentrische Anomalie bedeutet, so ergibt die Differentiation nach g und φ

$$\frac{\partial\frac{r}{a}}{\partial g} = \frac{a}{r}\sin\varphi\sin u, \qquad \frac{\partial u}{\partial g} = \frac{a}{r}$$

$$\operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial\frac{r}{a}}{\partial\varphi} = 1 - \frac{a}{r}\cos^2\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial\varphi} = \frac{a}{r}\cos\varphi\sin u$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke können wir die Gleichung

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = c_0^n + 2\sum_{p=1}^{\infty} c_p^n \cos pg$$

gleichfalls nach g und φ differentiiren und beginnen mit der Differentiation nach g. Dadurch wird

$$n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\sin\varphi\sin u = 2\sum p c_p^n \sin pg$$

und durch Wiederholung

$$n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+3}\sin\varphi\cos u - n(n+2)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+4}\sin^2\varphi\sin^2 u = 2\sum p^2 c_p^n\cos pg$$

Die Elimination von u ergiebt

$$n(n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} - n(2n+3)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} + n(n+2)\cos^2\varphi\left(\frac{a}{r}\right)^{n+4}$$
$$= 2\sum p^2 c_p^n \cos pg$$

Entwickelt man die linke Seite nach der mittleren Anomalie, und setzt die Coefficienten von $\cos pg$ einander gleich, so wird

$$(1)\quad n(n+1)\,c_p^{n+2} - n(2n+3)\,c_p^{n+3} + n(n+2)\cos^2\varphi\,c_p^{n+4} = p^2 c_p^n$$

eine schon von Bessel abgeleitete Gleichung*). Dieselbe dient zur Verification unserer für c_p^n aufgestellten Ausdrücke, indem sich bei Substitution derselben zeigt, dass die Gleichung identisch erfüllt wird.

Gehen wir jetzt zur Differentiation nach φ, so folgt

$$n \cos^2\varphi \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} - n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = 2 \operatorname{tg}\varphi \sum \frac{\partial c_p^n}{\partial \varphi} \cos pg$$

und wenn man nach der mittleren Anomalie entwickelt

$$n \cos^2\varphi \, c_p^{n+2} - n c_p^{n+1} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial c_p^n}{\partial \varphi} \tag{2}$$

Die Wiederholung der Differentiation ergibt

$$n(n+1-2\sin^2\varphi)\, c_p^{n+2} - n(2n+3)\cos^2\varphi\, c_p^{n+3} + n(n+2)\cos^4\varphi\, c_p^{n+4}$$
$$= \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\operatorname{tg}\varphi \frac{\partial c_p^n}{\partial\varphi}\right)$$

Hier lässt sich die früher gefundene Relation (1) zwischen den Coefficienten c mit verschiedenen oberen Indices zur Vereinfachung benutzen, wodurch

$$p^2\cos^2\varphi\, c_p^n + n(n-1)\sin^2\varphi\, c_p^{n+2} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\operatorname{tg}\varphi \frac{\partial c_p^n}{\partial\varphi}\right)$$

oder

$$p^2 \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} c_p^n + n(n-1)\cos^2\varphi\, c_p^{n+2} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\frac{\partial c_p^n}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 c_p^n}{\partial\varphi^2} \tag{3}$$

Man kann dieser Gleichung (aux différences mêlées) eine etwas andere Form geben, wenn man mittelst der oben aufgestellten Formel (2) c_p^{n+2} eliminirt. Dann wird

$$p^2\frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} c_p^n + n(n-1)\, c_p^{n+1}$$
$$= \left(\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} - (n-1)\operatorname{tg}\varphi\right)\frac{\partial c_p^n}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 c_p^n}{\partial\varphi^2} \tag{4}$$

Um in dieser Gleichung den Factor $\frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi}$ wegzuschaffen, in welchen $p^2 c_p^2$ multiplicirt ist, führen wir zuerst mittelst der Differentialformel

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$$

eine neue Variable x ein und erhalten durch eine leichte Rechnung

$$p^2 c_p^n + n(n-1)\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} c_p^{n+1} = -n\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\frac{\partial c_p^n}{\partial x} + \frac{\partial^2 c_p^n}{\partial x^2} \tag{5}$$

---

*) Abhandl. der Berliner Akademie aus dem Jahre 1824, S. 28.

Durch dieselbe Substitution verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$n\cos^2\varphi\, c_p^{n+2} - n c_p^{n+1} = \cos\varphi \frac{\partial c_p^n}{\partial x} \tag{6}$$

Um jetzt das in den ersten Differentialquotienten $\frac{\partial c_p^n}{\partial x}$ multiplicirte Glied aus (5) wegzuschaffen, setzen wir

$$v_n = \cos^{\frac{n}{2}}\varphi\, c_p^n$$

und erhalten ohne Schwierigkeit die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} &= p^2 v_n + \frac{n\sin^2\varphi}{4\cos^6\varphi}[(n-6)-(n-2)\cos^2\varphi]\, v_n \\ &\quad + \frac{n(n-1)\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}\,\cos^4\varphi} v_{n+1}\end{aligned} \tag{7}$$

nebst

$$n v_{n+2} - n\cos^{-\frac{3}{2}}\varphi\, v_{n+1} = \frac{n}{2}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial x} \tag{8}$$

§ 4.

Bevor wir diese Gleichungen weiter transformiren, betrachten wir die speciellen Fälle, in denen in (7) das in v_{n+1} multiplicirte Glied verschwindet. Diess findet, wegen $v_0 = 0$, statt für $n = 1$ und $n = -1$; dann wird einfach

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = p^2 v_1 + \frac{\sin^2\varphi(\cos^2\varphi - 5)}{4\cos^6\varphi} v_1$$

$$\frac{\partial^2 v_{-1}}{\partial x^2} = p^2 v_{-1} + \frac{\sin^2\varphi(7 - 3\cos^2\varphi)}{4\cos^6\varphi} v_{-1}$$

Um diese Gleichungen für den Fall, wo p eine grosse Zahl bedeutet, zu integriren, wenden wir ein von Hansen benutztes Verfahren*) an und gehen von den Formen aus:

$$v_1 = u_1 e^{px} + u_1' e^{-px}, \qquad v_{-1} = u_{-1} e^{px} + u_{-1}' e^{-px}$$

Hier bedeuten u und u' zwei noch näher zu bestimmende Functionen, welche sich auf willkürliche Constanten reduciren, sobald p über alle Grenzen wächst, weil in diesem Falle auf der rechten Seite der zu integrirenden Gleichungen die nicht in p multiplicirten Glieder wegfallen, und die vollständigen Integrale von

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = p^2 v_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v_{-1}}{\partial x^2} = p^2 v_{-1}$$

unter den aufgestellten Formen enthalten sind. Man erkennt nun

*) Abhandl. der kön. sächs. Gesellschaft, II. Bd. S. 202 flg.

sofort, dass vermöge der in u_1' und u_{-1}' enthaltenen willkürlichen Constanten beide Grössen verschwinden müssen. Denn da

$$x = \int \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \cos\varphi + \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi$$

ist, so würden für $\varphi = 0$ die in e^{-px} multiplicirten Glieder unendlich werden, während der Werth von c_p mit der Excentricität verschwinden muss. Setzen wir desshalb $u' = 0$ und substituiren

$$v_1 = u_1 e^{px}, \qquad v_{-1} = u_{-1} e^{px}$$

in die vollständigen Differentialgleichungen für v_1 und v_{-1}, so folgt

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2p\,\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\sin^2\varphi(\cos^2\varphi - 5)}{4\cos^6\varphi}\, u_1$$

$$\frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial x^2} + 2p\,\frac{\partial u_{-1}}{\partial x} = \frac{\sin^2\varphi(7 - 3\cos^2\varphi)}{4\cos^6\varphi}\, u_{-1}$$

Wenn h_1 und h_{-1} die Constanten bedeuten, auf welche sich u_1 und u_{-1} für $p = \infty$ reduciren, so wird man setzen dürfen

$$u_1 = h_1\left(1 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} \cdots\right), \qquad u_{-1} = h_{-1}\left(1 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} \cdots\right)$$

Zur Ermittelung der Coefficienten a und b als Functionen von x erhält man durch Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von p ohne Schwierigkeit die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 a_m}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial a_{m+1}}{\partial x} = \frac{\sin^2\varphi(\cos^2\varphi - 5)}{4\cos^6\varphi}\, a_m$$

$$\frac{\partial^2 b_m}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial b_{m+1}}{\partial x} = \frac{\sin^2\varphi(7 - 3\cos^2\varphi)}{4\cos^6\varphi}\, b_m$$

welche sich für die aufeinanderfolgenden Werthe von m leicht integriren lassen. Um diess auf die bequemste Weise zu bewerkstelligen, führen wir

$$y = \frac{1}{\cos\varphi}$$

als neue Variable ein, wodurch wegen

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos^7\varphi}(2 - \cos^2\varphi)$$

$$\frac{\partial a_{m+1}}{\partial y} = \frac{1}{8}(1 - 5y^2)a_m + (y - 2y^3)\frac{\partial a_m}{\partial y} + \frac{1}{2}(y^2 - y^4)\frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial b_{m+1}}{\partial y} = -\frac{1}{8}(3 - 7y^2)b_m + (y - 2y^3)\frac{\partial b_m}{\partial y} + \frac{1}{2}(y^2 - y^4)\frac{\partial^2 b_m}{\partial y^2}$$

erhalten wird. Setzt man hier $m = 0$, so wird wegen $a_0 = b_0 = 1$

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{1}{8}(1-5y^2) \qquad \text{folglich} \qquad a_1 = \frac{1}{8}\left(y - \frac{5}{3}y^3\right)$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial y} = -\frac{1}{8}(3-7y^2) \qquad \text{folglich} \qquad b_1 = -\frac{1}{8}\left(3y - \frac{7}{3}y^3\right)$$

Mit Benutzung dieser Werthe erhält man ferner für $m = 1$

$$\frac{\partial a_2}{\partial y} = \frac{9}{64}y - \frac{77}{48}y^3 + \frac{385}{192}y^5$$

folglich

$$a_2 = \frac{1}{64}\left(\frac{9}{2}y^2 - \frac{77}{3}y^4 + \frac{385}{18}y^6\right)$$

sowie

$$\frac{\partial b_2}{\partial y} = -\frac{15}{64}y + \frac{33}{16}y^3 - \frac{455}{192}y^5$$

$$b_2 = -\frac{1}{64}\left(\frac{15}{2}y^2 - 33y^4 + \frac{455}{18}y^6\right)$$

welches Verfahren man beliebig fortsetzen kann. Die schliessliche Substitution der gefundenen Resultate giebt

$$c_p^1 = h_1 \cos^{-\frac{1}{2}}\varphi \, \mathrm{tg}^p \tfrac{1}{2}\varphi \, e^{p\cos\varphi}\left\{1 + \frac{1}{8p\cos\varphi}\left(1 - \frac{5}{3\cos^2\varphi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{7}{64p^2\cos^2\varphi}\left(\frac{9}{14} - \frac{11}{3\cos^2\varphi} + \frac{55}{18\cos^4\varphi}\right)\cdots\right\}$$

$$c_p^{-1} = h_{-1}\cos^{\frac{1}{2}}\varphi \, \mathrm{tg}^p \tfrac{1}{2}\varphi \, e^{p\cos\varphi}\left\{1 - \frac{3}{8p\cos\varphi}\left(1 - \frac{7}{9\cos^2\varphi}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{15}{64p^2\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{5\cos^2\varphi} + \frac{91}{54\cos^4\varphi}\right)\cdots\right\}$$

welche Ausdrücke mit den früher angeführten Werthen vollkommen übereinstimmen, wenn zur Bestimmung der Constanten

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2p\pi}}, \qquad h_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2p^3\pi}}$$

gesetzt wird.

§ 5.

Wir kehren jetzt zum allgemeinen Falle der Gleichungen (7) und (8) zurück, und werden zur Bestimmung von v_n eine linearische Differentialgleichung der vierten Ordnung ableiten, welche man durch Elimination von v_{n+1} aus (7) erhält. Der eben behandelte specielle Fall, bei welchem eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung ausreichte, zeigt, wie man am bequemsten zu verfahren hat. Wir setzen zunächst wiederum

$$v_n = u_n e^{px}$$

und erhalten durch Differentiation, wenn gleichzeitig $y = \frac{1}{\cos\varphi}$ als Variable eingeführt wird

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = e^{px}\left\{p u_n + \sin^2\varphi\; y^4 \frac{\partial u_n}{\partial y}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} = e^{px}\left\{p^2 u_n + 2\sin^2\varphi(2y^3 - y + p)y^4\frac{\partial u_n}{\partial y} + \sin^2\varphi(y^8 - y^6)\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right\}$$

Transformiren wir hiermit die Gleichungen (7) und (8), so folgt

$$(y^4 - y^2)\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + 2(2y^3 - y + p)\frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{n}{4}[(n-6)y^2 - (n-2)]u_n = n(n-1)\sqrt{y}\;u_{n+1} \tag{9}$$

nebst

$$u_{n+2} = y^{\frac{3}{2}}\,u_{n+1} + \frac{1}{2n}[n(y^3 - y) + 2p]u_n + \frac{1}{n}(y^4 - y^2)\frac{\partial u_n}{\partial y} \tag{10}$$

Schreibt man in (9) $n+1$ statt n, so ergibt sich

$$(y^4 - y^2)\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial y^2} + 2(2y^3 - y + p)\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} - \frac{n+1}{4}[(n-5)y^2 - (n-1)]u_{n+1} = n(n+1)\sqrt{y}\,u_{n+2}$$

und wenn man den eben erhaltenen Werth von u_{n+2} substituirt

$$\begin{aligned}(y^4 - y^2)\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial y^2} + 2(2y^3 - y + p)\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} - \frac{n^2-1}{4}(5y^2 - 1)\,u_{n+1}\\ = (n+1)(y^4 - y^2)\sqrt{y}\,\frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{n+1}{2}[n(y^3 - y) + 2p]\sqrt{y}\,u_n\end{aligned} \tag{11}$$

Hier ist blos noch auf der linken Seite die Elimination von u_{n+1} und seinen Differentialquotienten auszuführen, welche keine Schwierigkeit darbietet, da wir bereits durch Gleichung (9) u_{n+1} mittelst u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$ ausgedrückt haben. Die Rechnung führt auf eine linearische Differentialgleichung der vierten Ordnung, von der Form

$$\begin{aligned}0 = (ay + a_1 p)u_n + (by^2 + b_1 yp + b_2 p^2)\frac{\partial u_n}{\partial y}\\ + (cy^3 + c_1 y^2 p + c_2 yp^2)\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + (dy^4 + d_1 y^3 p)\frac{\partial^3 u_n}{\partial y^3} + ey^5\frac{\partial^4 u_n}{\partial y^4}\end{aligned} \tag{12}$$

wo die Coefficienten a, b, c, d, e, a_1, b_1, c_1, d_1, b_2, c_2 durch die Gleichungen

$$a = \frac{n(n-2)}{32}\left\{3(n^2+12n+32)y^4-2(n^2+10n+24)y^2-n^2\right\}$$

$$b = \frac{1}{8}\left\{(4n^3+27n^2-46n-240)y^4-2(2n^3+11n^2-20n-84)y^2+\right.$$
$$\left.+(3n^2-2n-8)\right\}$$

$$c = \frac{1}{4}\left\{3(n^2-n-40)y^4-4(n^2-n-31)y^2+(n^2-n-20)\right\}$$

$$d = -\frac{1}{2}(15y^4-22y^2+7)$$

$$e = -\frac{1}{2}(y^4-2y^2+1)$$

$$a_1 = \frac{n(n-2)}{8}\left\{(4n+11)y^2+1\right\}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left\{3n^2-3n-20)y^2-(n^2-n-2)\right\}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}(7y^2-3)$$

$$d_1 = -2(y^2-1)$$

$$b_2 = 1$$

$$c_2 = -2$$

gegeben sind. Setzt man jetzt

$$u_n = w_0 + \frac{w_1}{p} + \frac{w_2}{p^2} + \frac{w_3}{p^3} + \cdots$$

und ordnet nach den absteigenden Potenzen von p, so folgt mittelst (12) für einen beliebigen Index m die Differentialgleichung

$$2y\frac{\partial^2 w_{m+2}}{\partial y^2} - \frac{\partial w_{m+2}}{\partial y} = a w_m + b\frac{\partial w_m}{\partial y} + c\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} + d\frac{\partial^3 w_m}{\partial y^3} + e\frac{\partial^4 w_m}{\partial y^4}$$
$$+ a_1 w_{m+1} + b_1\frac{\partial w_{m+1}}{\partial y} + c_1\frac{\partial^2 w_{m+1}}{\partial y^2} + d_1\frac{\partial^3 w_{m+1}}{\partial y^3}$$

Hieraus müssen für die successiven Werthe von m die Functionen w_m abgeleitet werden. Zur Bestimmung von w_0 folgt

$$2y\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

folglich durch Integration mit zwei willkürlichen Constanten

$$w_0 = h_n + k_n y^{\frac{3}{2}}$$

Geht man weiter zu w_1, so ist zu integriren

$$2y\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = a_1 w_0 + b_1\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_1\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + d_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}$$

Die rechte Seite enthält nach der Substitution von w_0 nur Glieder von der Form λy^μ; man findet aber leicht, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$2y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial y} = \lambda y^\mu$$

durch

$$w = h + k y^{\frac{3}{2}} + \frac{\lambda}{(\mu+1)(2\mu-1)} y^{\mu+1}$$

dargestellt wird. Da sich folglich die Constanten h und k mit den bereits in w_0 enthaltenen verschmelzen würden, so brauchen wir keine neuen Constanten hinzuzufügen, und erhalten

$$w_1 = h_n\frac{n(n-2)}{8}\left\{\frac{4n+11}{9}y^3 - y\right\}$$

$$+ k_n y^{\frac{3}{2}}\frac{n-3}{8}\left\{\frac{4n^2+33n+59}{27}y^3 - \frac{5n+11}{5}y\right\}$$

Es lässt sich dieses Integrationsverfahren beliebig fortsetzen, und zwar folgt, von der Länge der Rechnung abgesehen, ohne Schwierigkeit

$$w_2 = h_n\frac{n(n-2)(n-4)}{64}y^2(2) + k_n y^{\frac{3}{2}}\frac{(n-3)(n-5)}{320}y^2[2]$$

wo für (2) und [2] dieselben Werthe hervorgehen, welche zu Anfang dieser Abhandlung aufgeführt worden sind.

§ 6.

Da der Werth von u_n durch die Integration einer Differentialgleichung der vierten Ordnung gefunden worden ist, so müssen vier willkürliche Constanten auftreten, wenn die Integration vollständig sein soll. Dem Anscheine nach sind deren blos zwei, h_n und k_n, vorhanden. Allein es ist zu bemerken, dass gerade wie in dem früher betrachteten speciellen Falle für $n = \pm 1$, eigentlich

$$v_n = u_n e^{px} + u_n' e^{-px}$$

hätte gesetzt werden müssen, wo man zur Bestimmung von u_n' dieselben Gleichungen wie für u_n erhalten haben würde, mit dem einzigen Unterschiede, dass p überall das entgegengesetzte Vorzeichen angenommen hätte. Diess folgt sofort aus dem Umstande, dass die Gleichungen (7) und (8) nur gerade Potenzen von p enthalten. Damit wird

$$u_n' = w_0' - \frac{w_1'}{p} + \frac{w_2'}{p^2} - \frac{w_3'}{p^3} \pm \cdots$$

wo die Functionen w' sich von den Coefficienten w nur durch zwei verschiedene willkürliche Constanten h_n' und k_n' unterscheiden können. Der Grund nun, wesshalb die in diese beiden Constanten multiplicirten Glieder ganz übergangen worden sind, liegt wie früher darin, dass dieselben den Factor e^{-px} enthalten, welcher mit verschwindender Excentricität über alle Grenzen wächst. Da dieser Fall nicht eintreten kann, muss $h_n' = k_n' = 0$ sein.

Es bleibt also nur die Bestimmung der Constante h_n und k_n übrig. Diese ist in der That eigenthümlichen Schwierigkeiten unterworfen, was aus folgender Betrachtung erhellt. Wie bereits erwähnt, hätten wir, ohne einen Fehler in der Integration zu begehen, bei der Bestimmung der Functionen $w_1, w_2, \cdots$ Glieder von der Form $h + ky^{\frac{3}{2}}$ hinzufügen können, welche zugleich auf die Werthe der sämmtlichen folgenden Coefficienten w Einfluss haben, so dass daraus ganz verschiedene Bestimmungen dieser Functionen hervorgehen. Allerdings ist nothwendig, dass solche neu hinzutretende Constanten sich mit den beiden wesentlichen h_n und k_n vereinigen lassen müssen: allein es erhellt zugleich, dass durch jede solche veränderte Integrationsweise die Werthe dieser beiden Constanten sich ändern. Dieselben hängen also wesentlich von der Form ab, unter der man die successiven Integrationen ausführt, und man kann nur behaupten, dass, wenn bei der Bestimmung der Coefficienten $w_1, w_2, \cdots$ keine Glieder von der Form $h + ky^{\frac{3}{2}}$ zugelassen worden sind, die Werthe der Constanten h_n und k_n durch die Gleichungen

$$h_n = p^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\frac{n}{2}}$$

$$k_n = p^{\frac{n-3}{2}}\, 2^{-\frac{n-1}{2}} \frac{n}{3\,\Gamma\frac{n-1}{2}}$$

definirt werden. Eine Methode, durch welche der Nachweis dieser Behauptung geführt werden soll, muss daher die erwähnte Form der Functionen w *direct* zu erzeugen suchen: es wird mit anderen Worten erforderlich sein, die ganze Ableitung noch einmal auf einem directeren Wege zu machen. Wie im Eingange dieser Abhandlung erwähnt worden, lässt sich eine solche Methode angeben, welche nicht allein völlig streng, sondern auch zu weit allgemeineren Resultaten zu führen geeignet ist, als im Vorstehenden enthalten sind. Die Mittheilung der

bezüglichen Sätze werde ich übrigens zu geben nicht ermangeln, um so mehr, als dieselben auch auf die Entwickelung der Störungsfunction nach der mittleren Anomalie anwendbar zu sein scheinen.

§ 7.

Zum Schlusse mag eine numerische Anwendung der gegebenen Formeln Platz finden. Wir wählen dazu die Berechnung desselben der Mittelpunktsgleichung angehörenden Coefficienten, dessen Werth Bessel in seiner bereits erwähnten Abhandlung über die planetarischen Störungen*) abgeleitet hat. Bessel findet nämlich für $\sin\varphi = 0{,}35$ den Coefficienten von $2\sin 4g$ gleich

$$0\cdot 0072260 = 24'\,50''47$$

wofür wir nach unseren Formeln zu berechnen haben

$$\frac{1}{4}\cos\varphi\, c_4^2 = \frac{1}{8}(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi})^4 \Big\{1 + \frac{\alpha}{\cos\varphi\sqrt{4\cos\varphi}}\Big[1 + \frac{1}{4\cos\varphi}\Big(\beta - \frac{\gamma}{\cos^2\varphi}\Big) + \\ + \frac{1}{16\cos^2\varphi}\Big(\delta - \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi} + \frac{\zeta}{\cos^4\varphi}\Big)\cdots\Big]\Big\}$$

wo die Logarithmen der von p unabhängigen Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ ein für alle Mal berechnet werden:

$$\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad \lg\alpha = 9.72584880$$

$$\beta = \frac{21}{40}, \qquad \lg\beta = 9.72015930$$

$$\gamma = \frac{47}{72}, \qquad \lg\gamma = 9.81476536$$

$$\delta = \frac{543}{896}, \qquad \lg\delta = 9.78249182$$

$$\varepsilon = \frac{127}{64}, \qquad \lg\varepsilon = 0.29762374 7$$

$$\zeta = \frac{1601}{1152}, \qquad \lg\zeta = 0.14293885 3$$

Man begreift leicht, dass für einen so kleinen Werth wie $p = 4$ und bei der Vernachlässigung der durch $(p\cos\varphi)^{\frac{7}{2}} = 102$ dividirten Glieder keine sehr grosse Genauigkeit erwartet werden kann. Indessen zeigt unser Beispiel, dass selbst in solch' ungünstigem Falle unsere Formeln keine geringe Annäherung an den wahren Werth gewähren. Die Rechnung selbst, mit fünf Decimalen geführt, steht wie folgt:

---

*) Abhandl. der Berliner Akademie aus dem Jahre 1824, S. 45.

$\sin\varphi$	9.54407	ε	0.29762	ζ	0.14294	α	9.72585
$\varphi =$	$20^0 29' 14''$	$-\cos^2\varphi$	9.94324n	$\cos^4\varphi$	9.88648	$\cos\varphi$	9.97162
$\cos\varphi$	9.97162	γ	9.81477		0.25646	4	0.60206
$\log e$	9.63778		9.87153n		+0.12573		0.57368
	9.60940		−0.53123	δ	9.78249		0.28684
$e^{\cos\varphi}$	0.40682	β	9.72016		0.47397		9.75423
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$	9.25699		0.15137		0.38219		9.46739
	9.66381		9.34030n		−1.20748		
	8.65524	$\frac{1}{4\cos\varphi}$	9.42632	$\frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi}$	0.35438		+ 1.
$\frac{1}{8}$	9.09691		9.46739		0.02781		+ 0.29335
u	0.10698		8.23401n		9.17471		− 0.01714
	7.85913			$\frac{1}{16\cos^2\varphi}$	8.85264		+ 0.00312
	5.31443				9.46739		+ 1.27933 = u
	3.17356				7.49474		
	1491"3						

Resultat 0.007229 = 24′51″

Gotha, März 1856.

Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwickelungen*.)

Von

W. Scheibner in Leipzig.

§ 1.

Franz Carlini hat im Jahre 1817 eine Abhandlung unter dem Titel: „*Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero*, *Milano* 1817." veröffentlicht, in welcher er sich hauptsächlich mit der Aufgabe beschäftigt, den Coefficienten des Sinus eines grossen Vielfachen der mittleren Anomalie in der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung annähernd zu bestimmen. Diese Abhandlung ist in Nr. 709—712 der *Astronomischen Nachrichten***) von C. G. J. Jacobi mit Zusätzen und Verbesserungen reproducirt worden, nachdem derselbe bereits in einem früheren Aufsatze in Nr. 665***) auf verschiedene Fehler aufmerksam gemacht hatte, welche die Arbeit Carlini's entstellen und die Richtigkeit seiner Resultate beeinträchtigen. Trotzdem bezeichnet Jacobi die erwähnte Schrift, wegen der darin angewandten Methode und der Kühnheit ihrer Composition, als eine der wichtigsten und bedeutendsten Arbeiten über die Bestimmung der Werthe der Functionen grosser Zahlen, und sagt von der oben genannten Aufgabe, dass sie zu den schwierigsten ihrer Art gehöre, während die Auflösung des ähnlichen Problems in Bezug auf die Entwickelung des Radiusvectors, welche Carlini gleichfalls gibt, viel leichter sei. Die letztere Aufgabe hat auch Laplace (Supplement zum 5. Bande der *Mécanique céleste*, 1827†)) behandelt; jedoch entbehrt die von ihm eingeschlagene Methode — ebenfalls nach Jacobi's Urtheile — einer strengen Begründung und hat einen mehr divinatorischen Charakter. Wenn endlich Jacobi hinzufügt, dass er die Umarbeitung der Carlini'schen Abhandlung aus dem Grunde unternommen habe, um für die von ihm selbst über denselben Gegenstand

*) Aus den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 31. Mai 1856.

**) Bd. 30, S. 197—254.

***) Bd. 28, S. 257—270.

†) Siehe auch *Connaissance des Temps pour* 1828, p. 311.

gefundenen Resultate eine anderweitige Bestätigung zu erhalten, welche die Eigenthümlichkeit der von ihm angewandten Methoden wünschenswerth mache: so scheint daraus hervorzugehen, als sei Jacobi im Besitze einer auf anderen Principien beruhenden Lösung des in Rede stehenden Problems gewesen; jedoch ist ausser der erwähnten Reproduction des Carlini'schen Aufsatzes Nichts darüber bekannt geworden.

§ 2.

Ich werde im Folgenden eine allgemeine Methode angeben, mittelst deren man die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen der mittleren Anomalie fortschreitenden Entwickelungen finden kann. Dieselbe führt mit überraschender Kürze und Leichtigkeit zum Ziele, und erlaubt von den nach den absteigenden Potenzen des Index geordneten halbconvergirenden Reihen, durch welche jene asymptotischen Werthe dargestellt werden, beliebig viele Glieder zu berechnen. Die Entwickelung der Mittelpunktsgleichung und des Radiusvectors erscheinen beide als specielle Fälle viel allgemeinerer Functionen, welche sich nach der mittleren Anomalie entwickeln lassen. Die Richtigkeit der von Jacobi abgeleiteten Ausdrücke hat dabei ihre volle Bestätigung gefunden, wie ich bereits in Gould's *Astronomical Journal* bemerkt habe*), wo die auf die Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors bezüglichen Formeln, jedoch ohne ihre vollständige Herleitung, angeführt sind.

Die Methode, von welcher im Folgenden Gebrauch gemacht werden soll, beruht auf einer an sich höchst einfachen Transformation der bestimmten Integrale, durch welche man die zu betrachtenden Coefficienten darstellen kann. Da aber die Variabeln, durch deren Substitution jene Transformation erreicht wird, complexe Werthe durchlaufen, um von der untern zur oberen Integrationsgrenze zu gelangen, so erscheint es nicht unzweckmässig, um dem Verfahren die ganze wünschenswerthe Strenge zu verleihen, deren dasselbe fähig ist, einige Betrachtungen allgemeinerer Art über derartige imaginäre Substitutionen vorauszuschicken. . . .**)

§§ 3—8.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Integrals

$$u_p = \int_{-T}^{T} t^p e^{-t^2} dt$$

---

*) Siehe den vorhergehenden Aufsatz, S. 531—544 dieses Bandes.

**) In den verflossenen Decennien ist die Theorie der Integrale mit complexem Integrationswege den Mathematikern so geläufig geworden, dass hier beim Wiederabdruck meiner im Jahre 1856 verfassten Abhandlung ein grosser Theil der erwähnten, in den §§ 3—8 enthaltenen Betrachtungen unterdrückt werden konnte.

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, p einen beliebigen positiven oder negativen Exponenten, und T eine reelle positive Grösse bezeichnen sollen. Den Integrationsweg führen wir dergestalt am Nullpunkte vorüber, dass t einen positiven imaginären Werth erhält, (die Ordinatenaxe auf der positiven Seite schneidet), weil beim Durchgange durch den Nullpunkt $t^p = e^{p \log t}$ unendlich resp. unbestimmt werden, das Integral also seinen Sinn verlieren würde.

Man findet nun leicht

$$u_p = \int_{-\infty}^{\infty} t^p e^{-t^2} dt - (1 + e^{p\pi i}) \int_T^{\infty} t^p e^{-t^2} dt$$

weil vermöge der gemachten Voraussetzung beim Durchgang durch die Ordinatenaxe $\log t$ den imaginären Theil $+\frac{\pi i}{2}$ erhält, folglich nach der Stetigkeit $\lg(-t) = \lg t + \pi i$ gesetzt werden muss. Führt man die Bezeichnung

$$v_p = \int_{-\infty}^{\infty} t^p e^{-t^2} dt, \qquad w_p = \int_T^{\infty} t^p e^{-t^2} dt$$

ein, so folgt

$$u_p = v_p - 2 e^{\frac{p\pi i}{2}} \cos \frac{p\pi}{2} w_p$$

Den Werth des Integrals v_p erhält man sogleich, für $p + 1 > 0$, bei unendlicher Annäherung an den reellen Integrationsweg

$$v_p = 2 e^{\frac{p\pi i}{2}} \cos \frac{p\pi}{2} \int_0^{\infty} t^p e^{-t^2} dt$$

$$= e^{\frac{p\pi i}{2}} \cos \frac{p\pi}{2} \Gamma \frac{1+p}{2}$$

wenn

$$\Gamma p = \lim_{m=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{p \cdot \overline{p+1} \cdots \overline{p+m-1}} m^{p-1}$$

und da vermöge der Definitionsgleichung der Gammafunction

$$\Gamma \frac{1+p}{2} \Gamma \frac{1-p}{2} = \frac{\pi}{\cos \frac{p\pi}{2}}$$

so ergibt sich

$$v_p = \frac{\pi}{\Gamma \frac{1-p}{2}} e^{\frac{p\pi i}{2}}$$

mithin

$$u_p = e^{\frac{p\pi i}{2}} \left\{ \frac{\pi}{\Gamma \frac{1-p}{2}} - 2 w_p \cos \frac{p\pi}{2} \right\}.$$

Nach bekannten Sätzen bleibt diese Gleichung auch für $p \leqq -1$ richtig, wenn der Integrationsweg, wie oben verlangt, an der positiven Seite des Nullpunktes vorübergeführt wird. Es liegt also der allgemeinen Geltung des für $\int\limits_{-T}^{T} t^p e^{-t^2} dt$ gefundenen Ausdruckes die Voraussetzung zu Grunde, dass t zwischen $-T$ und T solche Werthe durchlaufe, welche einen positiven imaginären Theil haben.

§ 9.

Wir benutzen die Gelegenheit, um über die Berechnung der Transscendente w_p Einiges zu sagen, obgleich dieselbe für einigermaassen grosse Werthe von T in der Regel vernachlässigt werden kann. Wir wollen für das Integral

$$w_p = \int\limits_T^\infty t^p e^{-t^2} dt$$

zuerst eine Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von T ableiten. Hierzu setzen wir $t = T\sqrt{1+s}$, wodurch

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} T^{p+1} \int\limits_0^\infty (1+s)^{-\frac{1-p}{2}} e^{-T^2 s} ds$$

erhalten wird. Die Entwickelung nach dem binomischen Satze gibt

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} T^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}+n\right)}{\Gamma\frac{1-p}{2}\,\Gamma(n+1)} \int\limits_0^\infty s^n e^{-T^2 s} ds$$

und nach Ausführung der Integration

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} \sum (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}+n\right)}{\Gamma\frac{1-p}{2}} \cdot \frac{1}{T^{2n-p+1}}$$

oder

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} T^{p-1} \left\{1 - \frac{1-p}{2T^2} + \frac{1-p\cdot 3-p}{4T^4} - \frac{1-p\cdot 3-p\cdot 5-p}{8T^6}, \pm \cdots\right\}$$

Die Function innerhalb der Parenthese lässt sich als die Grenze darstellen, welcher sich die hypergeometrische Reihe

$$F\left(1, \frac{1-p}{2}, \omega, -\frac{\omega}{T^2}\right) =$$

$$1 - \frac{1-p}{2\omega}\frac{\omega}{T^2} + \frac{1-p\cdot 3-p}{4\omega\cdot\omega+1}\frac{\omega^2}{T^4} - \frac{1-p\cdot 3-p\cdot 5-p}{8\omega\cdot\omega+1\cdot\omega+2}\frac{\omega^3}{T^6} \pm \cdots$$

nähert, wenn ω über alle Grenzen wächst. Diese Reihe kann aber nach bekannten Formeln in einen Kettenbruch transformirt werden. Gauss hat in seiner berühmten Abhandlung über die hypergeometrische Reihe*) die Gleichung

$$F(1,\alpha,\gamma,x)=\frac{1}{1}\,\dot{-}\,\frac{ax}{1}\,\dot{-}\,\frac{bx}{1}\,\dot{-}\,\frac{cx}{1}\,\dot{-}\,\frac{dx}{1}\,\dot{-}\,\frac{ex}{1}\,\dot{-}\cdots$$

abgeleitet, wo

$$a=\frac{\alpha}{\gamma},\quad b=\frac{1\cdot\gamma-\alpha}{\gamma\cdot\gamma+1},\quad c=\frac{\alpha+1\cdot\gamma}{\gamma+1\cdot\gamma+2},\quad d=\frac{2\cdot\gamma-\alpha+1}{\gamma+2\cdot\gamma+3},\quad e=\frac{\alpha+2\cdot\gamma+1}{\gamma+3\cdot\gamma+4}\cdots$$

gesetzt ist. Wendet man diese Formel auf $\lim F\left(1,\frac{1-p}{2},\ \omega,\ -\frac{\omega}{T^2}\right)$ an, so wird ohne Schwierigkeit die Kettenbruchsentwickelung erhalten:

$$w_p=\frac{1}{2}e^{-T^2}T^{p-1}\left\{\frac{1}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{1-p}{2T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{1}{T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{3-p}{2T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{2}{T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{5-p}{2T^2}}{1}\,\dot{+}\cdots\right\}$$

Für $p=0$ geht daraus der bekannte Laplace'sche Kettenbruch hervor

$$\int_T^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-T^2}}{T}\left\{\frac{1}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{1}{2T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{1}{T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{3}{2T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{2}{T^2}}{1}\,\dot{+}\,\frac{\frac{5}{2T^2}}{1}\,\dot{+}\cdots\right\}$$

von welchem demnach im Vorstehenden eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung gegeben worden ist.**)

§ 10.

Ich wende mich nach diesen Präliminarien zur Behandlung des eigentlichen Gegenstandes dieses Aufsatzes, nämlich zur Entwickelung gewisser sehr allgemeiner, von der wahren Anomalie abhängenden Ausdrücke nach der mittleren Anomalie.

Im Folgenden werde durch f die wahre, ε die excentrische, g die mittlere Anomalie bezeichnet; φ sei der Excentricitätswinkel, r der Radiusvector; nimmt man dann die halbe grosse Axe der Kürze halber als Einheit, so geben die bekannten Fundamentalgleichungen

$$\begin{aligned} r &= 1-\sin\varphi\cos\varepsilon \\ r\cos f &= \cos\varepsilon-\sin\varphi \\ r\sin f &= \cos\varphi\sin\varepsilon \\ g &= \varepsilon-\sin\varphi\sin\varepsilon \\ dg &= r\,d\varepsilon \end{aligned}$$

---

*) *Disquisitiones generales circa seriem . . . p.* 15.

**) Vergl. Leipziger Berichte, Jahrg. 1864, S. 60.

Die Functionen, welche hier zunächst nach der mittleren Anomalie entwickelt werden sollen, sind, wenn k einen beliebigen reellen Exponenten, l und m beliebige ganze, positive oder negative Zahlen bedeuten

$$r^k \cos(lf + m\varepsilon) \quad \text{und} \quad r^k \sin(lf + m\varepsilon)$$

oder wenn wir die imaginären Exponentialgrössen einführen, die Function

$$u = r^k e^{(lf+m\varepsilon)i}$$

Die Entwickelung nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen der mittleren Anomalie lässt sich gleichfalls, da u die Periode 2π besitzt, auf eine nach den positiven und negativen Potenzen der Exponentialgrösse e^{gi} fortschreitende Reihe reduciren, so dass man allgemein setzen darf

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ngi}$$

Die Coefficienten c_n lassen sich bekanntermaassen als bestimmte Integrale darstellen, und es ist nicht schwer, augenblicklich den betreffenden in der Gleichung

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u e^{-ngi} dg$$

enthaltenen Ausdruck zu verificiren.

Wenn wir im Folgenden unter n eine ganze positive Zahl von einer gewissen Grösse verstehen wollen, so haben wir die beiden Integrale

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^k e^{(lf+m\varepsilon-ng)i} dg \quad \text{und} \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^k e^{(lf+m\varepsilon+ng)i} dg$$

zu betrachten. Führt man unter dem Integralzeichen $-g$ statt g ein, so kehrt sich in beiden Ausdrücken das Zeichen von i um, woraus hervorgeht, dass die Coefficienten c sämmtlich reelle Werthe haben. Ferner ergiebt sich, dass die Werthe von c_n und c_{-n} durch Vertauschung der Vorzeichen von l und m in einander übergehen, wesshalb wir bloss die Entwickelung des einen der beiden Ausdrücke zu untersuchen brauchen.

§ 11.

Wir legen unserer Untersuchung den Ausdruck

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^k\, e^{(lf+m\varepsilon-ng)i}\, dg$$

zu Grunde, und setzen voraus, dass die positive Zahl n grösser sei, als der numerische Werth der Summe $l+m$, also $n > \pm (l+m)$. Das Integral ist so zu verstehen, dass die Variable g von der untern zur oberen Grenze alle reellen Werthe zwischen $-\pi$ und π durchläuft. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke, welcher durch die Transformation des obigen Integrals erhalten wird, wenn man statt der mittleren die excentrische Anomalie als Integrationsvariable einführt. Dann wird vermöge der zwischen r, f, g und ε bestehenden Relationen

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{k+l+1}(r\cos f - i r\sin f)^{-l} e^{-(n-m)\varepsilon i + n(\varepsilon - g)i}\, d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\sin\varphi\cos\varepsilon)^{k+l+1}\,(\cos\varepsilon - \sin\varphi - i\cos\varphi\sin\varepsilon)^{-l} \times$$

$$e^{-(n-m)\varepsilon i + n i \sin\varphi \sin\varepsilon}\, d\varepsilon$$

Auf dieses Integral wenden wir die imaginäre Substitution

$$e^{\vartheta i} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\varepsilon i}$$

an, statt deren wir auch schreiben können

$$\vartheta = \varepsilon + \omega i,$$

wenn zur Abkürzung $\omega = \log\cot\frac{1}{2}\varphi$ gesetzt wird. Damit erhalten wir $d\varepsilon = d\vartheta$, nebst den Integrationsgrenzen $-\pi + \omega i$ und $\pi + \omega i$; der Weg zwischen diesen beiden complexen Werthen ist so beschaffen, dass die Variable ϑ nicht verschwinden kann, sondern stets den positiven imaginären Theil ωi behält. Aus den Gleichungen

$$e^{\varepsilon i} + e^{-\varepsilon i} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\vartheta i} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{-\vartheta i}$$

$$e^{\varepsilon i} - e^{-\varepsilon i} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\vartheta i} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{-\vartheta}$$

folgt

$$2\cos\varepsilon = (\cot\tfrac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\cos\vartheta + i(\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\sin\vartheta$$

$$2i\sin\varepsilon = (\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\cos\vartheta + i(\cot\tfrac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\sin\vartheta$$

und durch Multiplication mit $\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$

$$\sin\varphi\cos\varepsilon = \cos\vartheta + i\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$i\sin\varphi\sin\varepsilon = \cos\varphi\cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Hiermit entsteht die neue Integralformel

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\omega i}^{\pi+\omega i}(1-\cos\vartheta - i\cos\varphi\sin\vartheta)^{k+l+1}(\sin\varphi\cos\vartheta-\sin\varphi)^{-l}\times$$

$$e^{-(n-m)(\omega+\vartheta i)+ni\sin\vartheta+n\cos\varphi\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

$$=\sin^{-l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\omega i}^{\pi+\omega i}(1-\cos\vartheta-i\cos\varphi\sin\vartheta)^{k+l+1}(\cos\vartheta-1)^{-l}\times$$

$$e^{m\vartheta i-n(\vartheta-\sin\vartheta)i+n\cos\varphi\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

§ 12.

Um diesen Ausdruck nach den absteigenden Potenzen von n zu entwickeln, führen wir

$$s=\sin\tfrac{1}{2}\vartheta$$

als neue Variable ein, die sich auf imaginärem Wege zwischen den reellen Grenzen $\sin(-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\omega i)=-S$ und $\sin(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\omega i)=S$ bewegt, und zwar ohne durch Null hindurchzugehen, weil ϑ nicht verschwinden kann. Der Werth von S wird leicht aus der Gleichung

$$S=\cos\tfrac{1}{2}\omega i=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}+\sqrt{\cot\tfrac{1}{2}\varphi}\right)=\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{2\sin\varphi}}$$

gefunden; berücksichtigt man ferner die Relationen

$$\cos\vartheta=1-2s^2,\qquad \sin\vartheta=2s\sqrt{1-s^2}$$

$$e^{\pm\frac{1}{2}\vartheta i}=\sqrt{1-s^2}\pm is,\quad d\vartheta=\frac{2\,ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$\vartheta-\sin\vartheta=\int\limits_0^{\vartheta}(1-\cos\vartheta)\,d\vartheta=4\int\limits_0^{s}\frac{s^2\,ds}{\sqrt{1-s^2}}=4\sigma$$

wo

$$\sigma=\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{10}s^5+\frac{3}{56}s^7+\frac{5}{144}s^9+\frac{35}{1408}s^{11}+\cdots$$

zur Abkürzung geschrieben ist, so folgt

$$c_n = \sin^{-l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int\limits_{-S}^{S}\left(2s^2 - 2is\cos\varphi\sqrt{1-s^2}\right)^{k+l+1}(-2s^2)^{-l}\left(\sqrt{1-s^2}\pm is\right)^{\pm 2m}\times$$

$$e^{-4n\sigma i - 2ns^2\cos\varphi}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$= (2\cos\varphi)^{k+1}\,\mathrm{tg}^{-l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int\limits_{-S}^{S}\left(1+\frac{i}{\cos\varphi}\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^{k+l+1}\left(1+i\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^{2m}(1-s^2)^{\frac{k+l+2m}{2}}\times$$

$$e^{-4n\sigma i - 2ns^2\cos\varphi}\left(\frac{s}{i}\right)^{k-l+1}ds$$

Setzt man $N^2 = 2n\cos\varphi$, so ist hier endlich $t = Ns$ zu substituiren, wo t gleichfalls ohne durch Null hindurchzugehen, auf imaginärem Wege von $-T$ bis

$$+T = NS = \sqrt{n(\cos\varphi + \cot\varphi)}$$

variirt. Damit wird schliesslich der Ausdruck erhalten:

$$c_n = n^{-\frac{k-l+2}{2}}(2\cos\varphi)^{\frac{k+l}{2}}\,\mathrm{tg}^{-l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int\limits_{-T}^{T}\left(1-\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{k+l+1}\left(1-\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{2m}\times$$

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l+2m}{2}} e^{-4n\sigma i - t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^{k-l+1}dt$$

und durch Umkehr der Vorzeichen von l und m

$$c_{-n} = n^{-\frac{k+l+2}{2}}(2\cos\varphi)^{\frac{k-l}{2}}\,\mathrm{tg}^{l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n+m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int\limits_{-T}^{T}\left(1-\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{k-l+1}\left(1+\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{2m}\times$$

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k-l+2m}{2}} e^{-4n\sigma i - t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^{k+l+1}dt$$

Man sieht aus den gefundenen Formeln, wesshalb die Annahme $n > \pm(l+m)$ gemacht worden ist: damit nämlich die Factoren vor dem Integralzeichen bei beiden Coefficienten c_n und c_{-n} von derjenigen Ordnung in Bezug auf die Excentricität oder den Winkel φ werden,

welche diesen Coefficienten in der That zukommt. Das im Vorhergehenden auseinandergesetzte Verfahren bleibt zwar richtig, auch wenn die angegebene Ungleichung nicht erfüllt ist; schreitet man jedoch zu der Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von n, so zeigt sich, dass wenn n die Exponenten m und l an Grösse nicht wesentlich übersteigt, die Convergenz selbst in den ersten Gliedern der Entwickelung für die numerische Berechnung zu gering wird.

Es ist nun nichts leichter, als mit Hülfe der abgeleiteten Formeln für das Integral $u_p = \int\limits_{-T}^{T} t^p e^{-t^2} dt$ die Entwickelung von c_n und c_{-n} nach den absteigenden Potenzen von n oder N zu bewirken. Denn die Functionen unter dem Integralzeichen lassen sich nach bekannten Sätzen in lauter Glieder auflösen, welche von der Form $\alpha_\lambda t^p e^{-t^2} n^{-\lambda}$ sind, durch deren Integration das Erforderliche geleistet wird. Die imaginären Glieder müssen dabei, wegen der früher bewiesenen Realität von c_n und c_{-n}, verschwinden; auch ist die Bedingung erfüllt, dass t auf imaginärem Wege von $-T$ nach T gelangt, während sein imaginärer Theil beständig positiv bleibt. Diess folgt aus der Gleichung

$$t = \sqrt{2n\cos\varphi}\,\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\omega i)$$

$$= \sqrt{\tfrac{n}{2}\cos\varphi}\left\{\left(e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon + i\left(e^{\frac{1}{2}\omega}-e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

wo ε zwischen $-\pi$ und π enthalten ist.

§ 13.

Die Ausführung der weiteren Entwickelung ist lediglich Sache der Rechnung. Man leitet leicht die Reihenentwickelungen ab:

$$e^{-4n\sigma i} = 1 - \frac{2i}{\cos\varphi} N^2\sigma - \frac{2}{\cos^2\varphi} N^4\sigma^2 + \frac{4i}{3\cos^3\varphi} N^6\sigma^3 + $$
$$+ \frac{2}{3\cos^4\varphi} N^8\sigma^4 - \frac{4i}{15\cos^5\varphi} N^{10}\sigma^5 \ldots$$

$$N^2\sigma = \frac{t^3}{3N} + \frac{t^5}{10N^3} + \frac{3t^7}{56N^5}\cdots$$

folglich

$$e^{-4n\sigma i} = 1 + \frac{2t^3}{3\cos\varphi}\frac{1}{Ni} + \frac{2t^6}{9\cos^2\varphi}\frac{1}{(Ni)^2} - \left(\frac{t^5}{5\cos\varphi} - \frac{4t^9}{81\cos^3\varphi}\right)\frac{1}{(Ni)^3}$$
$$-\left(\frac{2t^8}{15\cos^2\varphi} - \frac{2t^{12}}{243\cos^4\varphi}\right)\frac{1}{(Ni)^4} + \left(\frac{3t^7}{28\cos\varphi} - \frac{2t^{11}}{45\cos^3\varphi} + \frac{4t^{15}}{3645\cos^5\varphi}\right)\frac{1}{(Ni)^5}\cdots$$

Ferner giebt der binomische Lehrsatz

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l}{2}}\left[1-\frac{1}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{k+l+1}=\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l}{2}}$$

$$-\frac{k+l+1}{1}\,\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-1}{2}}+\frac{\overline{k+l+1}\cdot\overline{k+l}}{1\cdot 2}\,\frac{t^2}{(Ni)^2\cos^2\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-2}{2}}$$

$$-\frac{\overline{k+l+1}\cdot\overline{k+l}\cdot\overline{k+l-1}}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{t^3}{(Ni)^3\cos^3\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-3}{2}}$$

$$+\frac{\overline{k+l+1}\cdot\overline{k+l}\cdot\overline{k+l-1}\cdot\overline{k+l-2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{t^2}{(Ni)^4\cos^4\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-4}{2}}$$

$$-\frac{\overline{k+l+1}\cdot\overline{k+l}\cdot\overline{k+l-1}\cdot\overline{k+l-2}\cdot\overline{k+l-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{t^5}{(Ni)^5\cos^5\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-5}{2}}\cdots$$

folglich

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l}{2}}\left[1-\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{k+l+1}=1-\frac{k+l+1}{\cos\varphi}\,\frac{t}{Ni}$$

$$+\frac{k+l}{2}\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)\frac{t^2}{(Ni)^2}-\frac{\overline{k+l-1}\cdot\overline{k+l+1}}{2\cos\varphi}\left(1+\frac{k+l}{3\cos^2\varphi}\right)\frac{t^3}{(Ni)^3}$$

$$+\frac{\overline{k+l-2}\cdot\overline{k+l}}{8}\left(1+2\,\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}+\frac{\overline{k+l-1}\cdot\overline{k+l+1}}{3\cos^4\varphi}\right)\frac{t^4}{(Ni)^4}$$

$$-\frac{\overline{k+l-3}\cdot\overline{k+l-1}\cdot\overline{k+l+1}}{8\cos\varphi}\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{k+l}{\cos^2\varphi}+\frac{\overline{k+l-2}\cdot\overline{k+l}}{15\cos^4\varphi}\right)\frac{t^5}{(Ni)^5}\cdots$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\pm m}\left[1\mp\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\pm 2m}=\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m}$$

$$-\frac{2m}{1}\,\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-\frac{1}{2}}+\frac{2m\cdot\overline{2m-1}}{1\cdot 2}\,\frac{t^2}{(Ni)^2}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-1}$$

$$-\frac{2m\cdot\overline{2m-1}\cdot\overline{2m-2}}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{t^3}{(Ni)^3}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{2m\cdot\overline{2m-1}\cdot\overline{2m-2}\cdot\overline{2m-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{t^4}{(Ni)^4}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-2}$$

$$-\frac{2m\cdot\overline{2m-1}\cdot\overline{2m-2}\cdot\overline{2m-3}\cdot\overline{2m-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{t^5}{(Ni)^5}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-\frac{5}{2}}\cdots$$

womit sich ergibt

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\pm m}\left[1\mp\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\pm 2m}=1-2m\frac{t}{Ni}+2m^2\frac{t^2}{(Ni)^2}$$

$$-\frac{2m-1\cdot 2m\cdot 2m+1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{t^3}{(Ni)^3}+\frac{2m-2\cdot 2m\cdot 2m\cdot 2m+2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{t^4}{(Ni)^4}$$

$$-\frac{2m-3\cdot 2m-1\cdot 2m\cdot 2m+1\cdot 2m+3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{t^5}{(Ni)^5}\cdots$$

Durch Multiplication dieser Ausdrücke folgt das Product

$$1-\frac{1}{Ni}\left\{\left[2m+\frac{k+l+1}{\cos\varphi}\right]t-\frac{2}{3\cos\varphi}t^3\right\}$$

$$+\frac{1}{(Ni)^2}\left\{\left[2m^2+2m\frac{k+l+1}{\cos\varphi}+\frac{k+l}{2}\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)\right]t^2-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{4}{3}\frac{m}{\cos\varphi}+\frac{2}{3}\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right]t^4+\frac{2}{9\cos^2\varphi}t^6\right\}$$

$$-\frac{1}{(Ni)^3}\left\{\left[\frac{m(4m^2-1)}{3}+2m^2\frac{k+l+1}{\cos\varphi}+m(k+l)\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{k+l-1\cdot k+l+1}{2\cos\varphi}\left(1+\frac{k+l}{3\cos^2\varphi}\right)\right]t^3-$$

$$-\left[\frac{4}{3}\frac{m^2}{\cos\varphi}+\frac{4}{3}m\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{5\cos\varphi}+\frac{k+l}{3\cos\varphi}\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)\right]t^5+$$

$$\left.+\left[\frac{4}{9}\frac{m}{\cos^2\varphi}+\frac{2}{9}\frac{k+l+1}{\cos^3\varphi}\right]t^7-\frac{4}{81\cos^3\varphi}t^9\right\}\cdots$$

Damit erhält der Ausdruck für c_n die Form

$$c_n=n^{-\frac{k-l+2}{2}}(2\cos\varphi)^{\frac{k+l}{2}}\operatorname{tg}^{-l}\varphi\operatorname{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int_{-T}^{T}e^{-t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^{k-l+1}\left\{1-\frac{1}{Ni}(\alpha t-\beta t^3)+\frac{1}{(Ni)^2}(\gamma t^2-\delta t^4+\varepsilon t^6)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(Ni)^3}(\zeta t^3-\eta t^5+\vartheta t^7-\iota t^9)\cdots\right\}dt$$

wo die Werthe der Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, ι aus der voranstehenden Gleichung zu entnehmen sind. Hier hat die Integration nicht die mindeste Schwierigkeit, da früher allgemein

$$\int_{-T}^{T}e^{-t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^p dt=\frac{\pi}{\Gamma\frac{1-p}{2}}-2w_p\cos\frac{p\pi}{2}$$

gefunden worden ist. Wir wollen, mit Vernachlässigung der Transscendente w_p, die ersten Glieder hinschreiben, und erhalten:

$$c_n = n^{-\frac{k-l+2}{2}} (2\cos\varphi)^{\frac{k+l}{2}} \operatorname{tg}^{-l}\varphi \operatorname{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi} H$$

$$H = \frac{1}{\Gamma\frac{l-k}{2}} - \frac{1}{N}\left\{\left(2m + \frac{k+l+1}{\cos\varphi}\right)\frac{1}{\Gamma\frac{l-k-1}{2}} + \frac{2}{3\cos\varphi}\frac{1}{\Gamma\frac{l-k-3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma\frac{l-k}{2}} - \sqrt{\frac{2}{n\cos\varphi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\frac{l-k-1}{2}}\left(m + \frac{k+2l}{2\cos\varphi}\right)\cdots$$

Der entsprechende Werth für c_{-n} geht durch Umkehr der Vorzeichen von l und m hervor. Die vernachlässigten Glieder in H sind durch $n\cos\varphi$ dividirt, welches Product also gross genug sein muss, wenn eine hinreichende Annäherung erzielt werden soll.

Wir können jetzt bereits den von Jacobi für die Coefficienten der Mittelpunktsgleichung gegebenen Ausdruck verificiren. Um dazu zu gelangen, erinnern wir uns an die Differentialformel

$$df = \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dg$$

Setzt man hier

$$\frac{1}{r^2} = c_0 + 2\sum_1^\infty c_n \cos ng$$

und integrirt, so folgt wegen $c_0 = \frac{1}{\cos\varphi}$ sogleich

$$f = g + \sum_1^\infty \frac{2\cos\varphi}{n} c_n \sin ng$$

Jacobi schreibt $f - g = \Sigma P \sin pg$, folglich

$$P = \frac{2\cos\varphi}{p} c_p$$

wenn $k = -2$, $l = m = 0$ gesetzt werden. Damit folgt aber

$$P = \frac{1}{p}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi})^p \left\{1 + \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2p\pi\cos^3\varphi}}\right\}$$

identisch mit dem in Nr. 712 der *Astron. Nachrichten*, S. 245 gefundenen Werthe. Zugleich geht aus unserer Ableitung hervor, dass die aufgestellten Formeln für beliebige Werthe der Excentricität richtig bleiben, während Jacobi den Fall kleiner Excentricitäten am Schlusse seiner Abhandlung in einem besonderen Zusatze erörtert.

§ 14.

Wir wollen zum Schlusse noch den speciellen Fall ins Auge fassen, wo $c_n = c_{-n}$, d. h. wo $l = m = 0$ ist, und die Coefficienten in der Entwickelung von r^k zu bestimmen sind. Schreibt man der Bequemlichkeit halber $-k$ statt k, so wird für

$$\left(\frac{a}{r}\right)^k = c_0^{(k)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \cos ng$$

$$c_n^{(k)} = n^{\frac{k-2}{2}} (2\cos\varphi)^{-\frac{k}{2}} \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}\varphi \, e^{n\cos\varphi} \left\{ \frac{A}{\Gamma\frac{k}{2}} + \frac{k}{3\cos\varphi} \sqrt{\frac{2}{n\cos\varphi}} \frac{B}{\Gamma\frac{k-1}{2}} - \frac{2}{\pi} C \right\}$$

erhalten, wo sich für A, B und C ohne weitere Schwierigkeit, als die Länge der Rechnung, folgende Werthe ergeben:

$$A = 1 - \frac{k(k-2)}{8n\cos\varphi}(1) + \frac{k(k-2)(k-4)}{64n^2\cos^2\varphi}(2)\cdots$$

$$B = 1 - \frac{k-3}{8n\cos\varphi}[1] + \frac{(k-3)(k-5)}{320n^2\cos^2\varphi}[2]\cdots$$

$$C = w_{1-k}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{\cos\varphi\sqrt{2n\cos\varphi}}\left[(k-1)w_{2-k} + \frac{2}{3}w_{4-k}\right]\cos\frac{k\pi}{2}\cdots$$

In diesen Gleichungen ist zur Abkürzung geschrieben

$$(1) = 1 - \frac{4k+11}{9\cos^2\varphi}$$

$$[1] = \frac{5k+11}{5} - \frac{4k^2+33k+59}{27\cos^2\varphi}$$

$$(2) = \frac{k+2}{2} - \frac{20k^3+143k+222}{45\cos^2\varphi} + \frac{16k^3+264k^2+1307k+1878}{486\cos^4\varphi}$$

$$[2] = \frac{35k^2+224k+317}{14} - \frac{20k^3+297k^2+1324k+1719}{27\cos^2\varphi}$$
$$+ \frac{16k^4+440k^3+4175k^2+15880k+19809}{486\cos^4\varphi}$$

Diess sind die Formeln, welche ich bereits in dem *Astronomical Journal*, zugleich mit einem indirecten Nachweise für ihre Richtigkeit, mitgetheilt habe. Für $k = -1$ geht daraus die Entwickelung des Radiusvectors, übereinstimmend mit Jacobi a. a. O. hervor. Man erhält leicht, da die in B multiplicirten Glieder wegen des Nenners $\Gamma\frac{k-1}{2}$ verschwinden:

$$c_n^{(-1)} = -\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi}\right)^n \sqrt{\frac{\cos\varphi}{2n^3\pi}}\left\{1 - \frac{3}{8n\cos\varphi}\left(1 - \frac{7}{9\cos^2\varphi}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{15}{64n^2\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{5\cos^2\varphi} + \frac{91}{54\cos^4\varphi}\right)\cdots\right\}.$$

Auch die Coefficienten der Mittelpunktsgleichung können wir jetzt genauer erhalten, wenn wir den Werth von $\frac{2\cos\varphi}{n}\, c_n^{(2)}$ aufsuchen

$$\frac{2\cos\varphi}{n} c_n^{(2)} = \frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi}\right)^n \left\{1 + \frac{2}{3\cos\varphi}\sqrt{\frac{2}{n\pi\cos\varphi}}\left[1 + \frac{1}{8n\cos\varphi}\left(\frac{21}{5} - \frac{47}{9\cos^2\varphi}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{64n^2\cos^2\varphi}\left(\frac{543}{14} - \frac{127}{\cos^2\varphi} + \frac{1601}{18\cos^4\varphi}\right)\cdots\right]\right\}$$

Es ist nicht uninteressant, von diesem Ausdrucke eine numerische Anwendung zu machen. Da die aufgestellten Formeln gelten, wie klein auch die Excentricität genommen werden möge, wollen wir der Einfachheit halber den numerischen Werth der Grenze für $\varphi = 0$ suchen. Allerdings verschwinden dabei die Ausdrücke unserer Coefficienten wegen des Factors $\operatorname{tg}^n \frac{1}{2}\varphi$, durch den wir desshalb zuvor beide Seiten der Gleichung dividiren. Dann wird

$$\lim \frac{2}{n}\,\frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}^n\frac{1}{2}\varphi}\, c_n^{(2)} = \frac{e^n}{n}\left\{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\left(1 - \frac{23}{180n} + \frac{23}{2016n^2}\cdots\right)\right\}$$

Vergleichen wir damit die von Hansen zuerst gegebene Entwickelung der Mittelpunktsgleichung*)

$$f - g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i}\operatorname{tg}^i \tfrac{1}{2}\varphi \left\{\mathfrak{M}_i - \mathfrak{N}_1 \mathfrak{M}_{i+1}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{M}_{i+2}\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\varphi \cdots\right\} \sin ig$$

so folgt für $i = n$ und $\varphi = 0$

$$\lim \frac{2}{n}\,\frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}^n\frac{1}{2}\varphi}\, c_n^{(2)} = \frac{2}{n}\mathfrak{M}_n = \frac{2}{n}\left\{1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!}\cdots + \frac{n^n}{n!}\right\}$$

oder

$$1 + n + \frac{n^2}{2!}\cdots + \frac{n^n}{n!} = e^n\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\left(1 - \frac{23}{180n} + \frac{23}{2016n^2}\cdots\right)\right\}$$

---

*) Abhandlungen der k. sächs. Gesellschaft, II. Band, S. 276 fg.

Berechnet man beide Seiten dieser Gleichung für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so erhält man folgende Werthe der Logarithmen:

$n = 1$,	$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$	approximativ	$= 0{\cdot}3005888$	diff.	4412
$n = 2$,	$\lg 5 = 0{\cdot}6989700$	„	$= 0{\cdot}6989110$	„	590
$n = 3$,	$\lg 13 = 1{\cdot}1139434$	„	$= 1{\cdot}1139289$	„	145
$n = 4$,	$\lg \frac{103}{3} = 1{\cdot}5357159$	„	$= 1{\cdot}5357095$	„	64
$n = 5$,	$\lg \frac{1097}{12} = 1{\cdot}9610254$	„	$= 1{\cdot}9610223$	„	31
$n = 6$,	$\lg \frac{1223}{5} = 2{\cdot}3884565$	„	$= 2{\cdot}3884548$	„	17

woraus die Genauigkeit der Formel beurtheilt werden kann.

Gotha, März 1856.

Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen.

Von

Leo Königsberger in Wien.

Im 3ten Hefte des 90ten Bandes von Crelle's Journal habe ich den Satz bewiesen, dass, wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y_1,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1$ algebraische Functionen von x sind, ein algebraisches Integral z_1 besitzt, und die reducirte lineare Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = 0$$

besitzt entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche, welche als rationale Functionen von x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m darstellbar sind, so wird sich das Integral z_1 stets rational durch x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 ausdrücken lassen — und ähnliche Sätze für logarithmische und algebraisch-logarithmische Integrale. Ich beabsichtige in der vorliegenden Notiz einige Bemerkungen hinzuzufügen, welche den Zusammenhang dieser Sätze mit dem von Abel aufgestellten Satze über die Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen $\int y\,dx$ erläutern sollen.

Nehmen wir an, dass die Gleichung (1) ein algebraisches Integral z_1 besitze, und sei dieses die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(3) \qquad F(z, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ sind; da die einzelnen Glieder der linken Seite der Differentialgleichung (1) als Ableitungen der z_1-Function sich mit Hinzuziehung der die Grössen $Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ definirenden irreductibeln algebraischen Gleichungen als rationale Functionen von z_1 darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ zusammengesetzt sind, so wird — wie in der oben citirten Arbeit nachgewiesen worden — nachdem y_1 in eine ganze rationale Function von z_1 mit rational aus den Grössen $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ zusammengesetzten Coefficienten verwandelt ist, jedenfalls, wenn nicht umgekehrt auch z_1 als rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 sich darstellen lässt, z_1 die Lösung einer irreductibeln Gleichung sein, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, \cdots Y_m$ und y_1 zusammengesetzt sind, nämlich des grössten gemeinsamen Theilers zwischen der Gleichung (1) und der in der angegebenen Weise transformirten Differentialgleichung

$$\varphi(z, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1) = 0 \tag{4}$$

oder eines irreductibeln Factors desselben. Sei der Grad der irreductibeln Gleichung (4) $\varkappa$ und ihre Lösungen $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa$, so wird man in der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z_1 = y_1,$$

in welcher die Ableitungen von z_1 durch die oben bezeichneten rationalen Ausdrücke in $z_1, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ ersetzt sind, durch geschlossene Umläufe des x, welche $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1$ unverändert lassen, z_1 in $z_2, z_3, \cdots z_\varkappa$ überführen können, und es werden daher auch $z_2, z_3, \cdots z_\varkappa$, wie unmittelbar ersichtlich, particuläre algebraische Integrale der Differentialgleichung (1) sein und somit auch die Summe

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_\varkappa}{\varkappa}.$$

Da diese Summe nun eine rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 ist — nämlich der $\varkappa^{\text{te}}$ Theil des negativen Coefficienten von $z^{\varkappa-1}$ in Gleichung (4) — so wird sich, wenn wir den Fall, dass dieser Coefficient eine Constante also $Y_m = Cy_1$ ist, ausschliessen, indem dann die Substitution $z - \frac{1}{C} = Z$ die Differentialgleichung (1) in eine lineare homogene verwandeln würde, der folgende Satz ergeben:

Wenn eine lineare Differentialgleichung (1) *ein algebraisches Integral besitzt und dieses ist nicht schon selbst so beschaffen, dass es rational in $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 ausdrückbar ist, so besitzt die Differen-*

tialgleichung jedenfalls noch ein anderes algebraisches particuläres Integral von dieser Beschaffenheit.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = \frac{3}{2}$$

das algebraische Integral $z_1 = x + x^{-\frac{1}{2}}$, also auch $z_2 = x - x^{-\frac{1}{2}}$ und somit das rationale Integral $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2} = x$ haben.

Betrachten wir jetzt logarithmische Integrale der Differentialgleichung (1) von der Form

$$z = A \log v,$$

worin A eine Constante, v eine algebraische Function von x sein soll, so ist unmittelbar klar, dass $Y_m = 0$ sein muss, und dass wiederum y_1 sich als rationale Function von x, $Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und v darstellen lässt. Ist v selbst nicht rational durch $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 ausdrückbar, so werden geschlossene Umläufe des x, welche $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1$ unverändert lassen, sämmtliche Wurzeln $v_1, v_2, \cdots v_\varkappa$ einer irreductibeln v-Gleichung mit in $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 rationalen Coefficienten liefern, und die entsprechenden Functionen $A \log v_\varrho$ werden wiederum particuläre Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sein. Da aber dann auch

$$\frac{A}{\varkappa}\{\log v_1 + \log v_2 + \cdots + \log v_\varkappa\} = \frac{A}{\varkappa} \log v_1 v_2 \cdots v_\varkappa$$

ebenfalls ein Integral und $v_1 v_2 \cdots v_\varkappa$ eine in $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 rational ausdrückbare Function ist, welche offenbar nicht constant sein kann, so folgt:

Wenn eine lineare Differentialgleichung (1) *ein logarithmisches Integral von der Form* $A \log v$ *hat, worin* A *eine Constante und* v *eine algebraische Function bedeutet, so besitzt dieselbe auch ein Integral von der Form* $\frac{A}{\varkappa} \log V$, *worin* $\varkappa$ *eine positive ganze Zahl und* V *rational in* $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ *und* y_1 *ausdrückbar ist.*

Es bedarf keiner weiteren Ausführung, dass, wenn die Differentialgleichung (1) durch ein elliptisches Integral befriedigt wird, deren obere Grenze eine algebraische Function von x ist, vermöge des Additionstheorems der elliptischen Integrale sich ebenso erweisen lässt, dass dann immer noch ein particuläres Integral existirt, dessen obere Grenze sowie die zugehörige Irrationalität rational aus $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 zusammengesetzt sind und ähnlich, wenn Abel'sche Integrale der Differentialgleichung genügen, wobei nur die Coefficienten der durch das Geschlecht des Integrales bestimmten algebraischen Gleichung an die Stelle der früheren oberen Integralgrenzen treten.

Diese Sätze verbunden mit den in der oben citirten Arbeit aufgestellten Bedingungen dafür, dass, wenn die Differentialgleichung (1) überhaupt ein algebraisches oder logarithmisches Integral hat, diese algebraische Function oder der Logarithmand stets rationale Functionen von x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 sein müssen, geben die Erweiterung der von Abel gegebenen Sätze über die Form des auf niedere Functionsgattungen reducirbaren Integrales $\int y\,dx$.

Wien, den 12. December 1880.

Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function.

Von

Felix Klein in Leipzig.

Bei meinen Untersuchungen über Transformation fünfter, siebenter und elfter Ordnung der elliptischen Functionen, die ich im XIV. und XV. Bande dieser Annalen publicirt habe, bediente ich mich als geeigneter Moduln gewisser Systeme von Verhältnissgrössen, deren Existenz und Eigenart ich durch geometrisch-functionentheoretische Methoden erschloss. Beim jetzigen Stande unserer Kenntnisse liegt es in der Natur dieser Methoden, nur auf die allerniedersten Fälle anwendbar zu sein. Wollte ich also meine Resultate auf den Fall eines beliebigen Transformationsgrades n ausdehnen, so musste ich dieselben mit der gewöhnlichen Theorie der ϑ-Functionen in möglichst unmittelbaren Zusammenhang zu bringen suchen. Dies gelingt in der That, wie ich zeigen werde, in äusserst einfacher Weise. *Die von mir benutzten Verhältnissgrössen sind geradezu gewissen Theilwerthen der Function $\vartheta_1(x, q)$ proportional*), und man kann aus den gewöhnlichen Reihenentwickelungen der ϑ-Functionen mit leichter Mühe für beliebiges ungerades n Resultate ableiten, welche die früher von mir gefundenen als besondere Fälle einschliessen.*

Ich erachte die früheren Betrachtungen darum nicht für überflüssig. Denn abgesehen von dem Interesse, das solchen directen Ueberlegungen in allen Fällen innewohnt, haben sie erst auf den Weg gewiesen, der meiner Meinung nach allgemein zweckmässiger Weise einzuschlagen ist. Indem dieser Weg Schwierigkeiten trennt, die man früher vereinigt glaubte**), führt er, wenn ich nicht irre, zu einer

*) Ich gebrauche im Folgenden, weil es so am einfachsten wird, durchweg die gewöhnliche Jacobi'sche Bezeichnungsweise, von der ich nur in dem einen Punkte abweiche, dass ich, im Anschlusse an meine früheren Arbeiten, die Perioden mit ω_1, ω_2, ihren Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ mit ω benenne (so dass also $q=e^{i\pi\omega}$ wird).

**) Ich möchte z. B. auf Herrn Göring's Arbeit: „Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen etc." im VII. Bande dieser

einfachsten Behandlungsweise des Transformationsproblems der elliptischen Functionen.

Die im Folgenden eingehaltene Anordnung des Stoffes ergab sich aus dem Wunsche, die früher von mir benutzten Grössen möglichst unmittelbar mit den Werthen gewisser Theil-Theta's zu identificiren. Erst in den folgenden Paragraphen stelle ich die allgemeinen Relationen auf, welche die alten Resultate als specielle Fälle umfassen.

---

§ 1.

Recapitulation der früheren Ergebnisse.

Ich beginne mit einer kurzen Uebersicht der früher von mir erhaltenen Resultate, soweit dieselben zum Verständnisse des Folgenden bekannt sein müssen.

1. In sämmtlichen von mir betrachteten Fällen ($n = 5, 7, 11$) bediente ich mich gewisser Systeme von $\frac{n-1}{2}$ Verhältnissgrössen, die bei solchen linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2, welche modulo n zur Identität congruent sind, ungeändert bleiben und sich bei beliebiger linearer Transformation selber linear mit constanten Coefficienten in charakteristischer Weise transformiren.*)

2. Bei $n = 5$ nannte ich die zwei sonach in Betracht kommenden Grössen η_1, η_2; ihren Quotienten bezeichnete ich als *Ikosaederirrationalität***).

3. Die drei bei $n = 7$ vorkommenden Grössen benannte ich λ, μ, ν. Sie waren an die Gleichung vierter Ordnung

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0 \tag{1}$$

gebunden und werden von mir dementsprechend als Coordinaten des Punktes einer Curve vierter Ordnung gedeutet***).

4. Um die fünf Grössen bei $n = 11$ zweckmässig zu bezeichnen, wählte ich die quadratischen Reste modulo 11 als Indices und unterschied also:

$$y_1,\ y_4,\ y_5,\ y_9,\ y_3.$$

Annalen verweisen. Indem dort die Theilwerthe von ϑ_1 immer gleichzeitig mit denen von ϑ, ϑ_2, ϑ_3 betrachtet werden, beschäftigt sich die Untersuchung vielmehr mit der $2n$-Theilung als der n-Theilung. — Meiner Auffassungsweise sehr benachbart sind die im Texte noch wiederholt zu citirenden Kiepert'schen Arbeiten (Borchardt's Journal Bd. 76, 87, 88), die von der Weierstrass'schen σ-Function ausgehen; doch hat Herr Kiepert gerade die Fragestellungen, welche ich im Nachfolgenden behandele, unberührt gelassen.

*) Vergl. die auf ein beliebiges primzahliges n bezügliche Darstellung im XV. Bande dieser Annalen, pag. 275—278.

**) Vergl. etwa Annalen XII, pag. 505—508, XIV, pag. 151.

***) Siehe Annalen XIV, pag. 428 ff.

Zwischen ihnen bestanden im Ganzen 15 biquadratische Identitäten, von denen drei die folgenden sind:

$$(2)\qquad 0 = y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1,$$

$$(3)\qquad 0 = y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9,$$

$$(4)\qquad 0 = y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1.$$

Die übrigen ergeben sich aus diesen durch Multiplication der Indices resp. mit 4, 5, 9, 3. Deutete man die y als Punktcoordinaten eines mehrdimensionalen Raumes, so durchlief der Punkt y bei wechselndem Periodenverhältnisse ω eine Curve der 20. Ordnung*).

5. In sämmtlichen drei Fällen ergab sich eine enge Beziehung der vorgenannten Grössen zu den Wurzeln der neuen *Multiplicatorgleichungen***). Nennt man diese Wurzeln in bekannter Weise $z_\infty, z_0, \cdots, z_{n-1}$, und setzt, da man es mit einer Jacobi'schen Gleichung zu thun hat:

$$\sqrt{z_\infty} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n \cdot A_0},$$

$$\sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^{36\nu} A_1 + \varepsilon^{4.36\nu} A_2 + \cdots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 36\nu} A_{\frac{n-1}{2}},$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}\right),$$

so findet man bis auf einen hier nicht weiter in Betracht kommenden Factor ϱ:

$$(5)\qquad \begin{cases} \varrho A_0 = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \cdot q^{\frac{(6\lambda+1)^2 n}{12}}, \\ \varrho A_\alpha = (-1)^\alpha \cdot \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} (-1)^\lambda \left\{ q^{\frac{((6\lambda+1)n+6\alpha)^2}{12n}} + q^{\frac{((6\lambda+1)n-6\alpha)^2}{12n}} \right\}. \end{cases}$$

Unter Festhaltung der hiermit eingeführten Bezeichnungsweise lautet mein Resultat bei $n = 5$:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = +q^{-\frac{2}{5}} \cdots = \frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} = -q^{+\frac{2}{5}} \cdots = -\frac{A_2}{A_0},$$

(vergl. Annalen XIV, p. 158),

bei $n = 7$:

$$\frac{\mu}{\lambda} = -q^{-\frac{4}{7}} \cdots = \frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{\nu}{\mu} = +q^{-\frac{2}{7}} \cdots = \frac{A_2}{A_0},$$

$$\frac{\lambda}{\nu} = -q^{+\frac{6}{7}} \cdots = \frac{A_3}{A_0},$$

(cf. Annalen XIV, p. 455, 456),

*) Siehe Annalen XV, p. 533 ff.

**) Vergl. Annalen XV, p. 86—88, sowie Kiepert in Borchardt's Journal Bd. 87, p. 199 ff.

und bei $n = 11$:

$$\frac{y_5}{y_4} = +\, q^{-\frac{8}{11}} \cdots = -\,\frac{A_1}{A_0}, \qquad \frac{y_9}{y_5} = +\, q^{-\frac{10}{11}} \cdots = +\,\frac{A_2}{A_0},$$

$$\frac{y_3}{y_9} = -\, q^{+\frac{4}{11}} \cdots = -\,\frac{A_4}{A_0}, \qquad \frac{y_1}{y_3} = -\, q^{-\frac{6}{11}} \cdots = +\,\frac{A_3}{A_0},$$

$$\frac{y_4}{y_1} = +\, q^{+\frac{20}{11}} \cdots = -\,\frac{A_5}{A_0},$$

(Annalen XV, p. 550 — 555).

Ich habe dabei der besseren Orientirung wegen die niedrigsten Glieder angegeben, die in den Reihenentwickelungen der betreffenden Quotienten nach Potenzen von q auftreten.

§ 2.

Die von mir benutzten Grössen sind Theilwerthe von ϑ_1.

Man hat bekanntlich*):

$$\frac{\vartheta(x, q^n)\cdot\vartheta_2(x, q^n)\cdot\vartheta_3(x, q^n)}{2q^{\frac{n}{6}}\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1-q^{2\nu n})^2} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty}(-1)^\lambda q^{\frac{(6\lambda+1)^2 n}{12}}\cdot\cos(6\lambda+1)\,x.$$

Daher folgt für $q = e^{i\pi\omega}$:

$$\frac{A_\alpha}{A_0} = (-1)^\alpha\cdot 2\cdot q^{\frac{3\;{}^2}{n}}\cdot\frac{\vartheta(\alpha\omega\pi, q^n)\cdot\vartheta_2(\alpha\omega\pi, q^n)\cdot\vartheta_3(\alpha\omega\pi, q^n)}{\vartheta(0, q^n)\cdot\vartheta_2(0, q^n)\cdot\vartheta_3(0, q^n)}.$$

Nun aber ist allgemein:

$$2\cdot\frac{\vartheta(x, q)\cdot\vartheta_2(x, q)\cdot\vartheta_3(x, q)}{\vartheta(0, q)\cdot\vartheta_2(0, q\cdot\vartheta_3(0, q)} = \frac{\vartheta_1(2x, q)}{\vartheta_1(x, q)}.$$

Somit ergiebt sich:

$$(6) \qquad \frac{A_\alpha}{A_0} = (-1)^\alpha\cdot q^{\frac{3\alpha^2}{n}}\cdot\frac{\vartheta_1(2\alpha\omega\pi, q^n)}{\vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n)}.\,^{**})$$

---

*) Cf. Kiepert in Borchardt's Journal Bd. 87, p. 213, Formel (31) daselbst, wo indessen der Exponent im Vorzeichen zu ändern ist.

**) Aus dieser Formel folgt ein interessantes Resultat. Einmal kommt in Uebereinstimmung mit dem, was bei 5, 7, 11 bekannt ist, durch Ausmultiplication sämmtlicher Gleichungen für $\alpha = 1, 2, \cdots \left(\frac{n-1}{2}\right)$:

$$A_0^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{2}} A_1 A_2 \cdots A_{\frac{n-1}{2}}.$$

Aber das Bemerkenswerthe ist, dass sich diese Relation in d Relationen spaltet, wenn d die grösste Zahl ist, für welche $4^{\frac{n-1}{2d}} \equiv 1 (\text{mod. } n)$ ist; man hat zu dem

Ich will der Kürze halber schreiben:

$$\sigma z_\alpha = (-1)^\alpha \cdot q^{\frac{\alpha^2}{n}} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n), \tag{7}$$

wo σ einen erst später zu bestimmenden Factor bedeuten mag und α von 1 bis $(n-1)$ laufen soll, wobei übrigens nur $\frac{n-1}{2}$ wesentlich verschiedene Grössen z_α entstehen, indem (für ungerades n)

$$z_{n-\alpha} = -z_\alpha \tag{8}$$

wird. *Dann hat man:*

$$\frac{A_\alpha}{A_0} = \frac{z_{2\alpha}}{z_\alpha} \text{*)}; \tag{9}$$

Und hieraus folgt unmittelbar, *dass die von mir bei $n = 5, 7, 11$ benutzten Verhältnissgrössen im Wesentlichen mit den z_α übereinstimmen.* In der That ergiebt ein Vergleich der soeben angeführten Formeln:

1) *bei* $n = 5$:

$$\eta_1 : \eta_2 = z_2 : z_1 \text{**)}, \tag{10}$$

2) *bei* $n = 7$:

$$\lambda : \mu : \nu = z_1 : z_2 : z_4, \tag{11}$$

3) *bei* $n = 11$:

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3 = z_5 : z_1 : z_9 : -z_4 : -z_3. \tag{12}$$

§ 3.

Verhalten der z bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2.

Ich wünsche nun zu zeigen, dass die z_α allgemein, bei beliebigem ungeraden n, sich ähnlich verhalten, wie bei 5, 7, 11. Hierzu ist vor allen Dingen erforderlich, die Aenderungen anzugeben, welche die z_α bei linearer Transformation der Perioden erleiden. Ich werde

---

Zwecke nur immer diejenigen Gleichungen (6) mit einander zu multipliciren, welche, unter α einen beliebigen Anfangswerth verstanden, $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{\left(\frac{n-1}{2d}-1\right)} \cdot \alpha$ entsprechen.

*) Mit dieser Formel und den weiteren Betrachtungen über das Verhalten der z_α ist die Bemerkung erledigt, die ich im XV. Bande dieser Annalen p. 552 unter der Seite zufügte.

**) Diese Formel stimmt materiell mit derjenigen überein, die Herr Bianchi p. 252 des XVII. Annalenbandes gegeben hat. In der That ist es diese Bianchi'sche Formel gewesen, die mich zu den hier im Texte entwickelten Resultaten hingeleitet hat; vergl. die Bemerkung unter der Seite, Annalen XVII, p. 138. — Die Formeln (10), (11), (12) theilte ich im October 1880 der London Mathematical Society mit.

zu dem Zwecke dem in (7) vorkommenden, noch unbestimmten Factor σ einen solchen Werth ertheilen, dass möglichst einfache Formeln resultiren.

Vor allen Dingen versehe man das Product

$$(-1)^\alpha \cdot q^{\frac{\alpha^2}{n}} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n)$$

mit dem Factor $\sqrt{\frac{\pi}{\omega_2}}$; es würde sonst bei Vertauschung von ω_1 und ω_2 das neue z_α einen Factor $\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$ bekommen, der bei dem ursprünglichen z_α kein Analogon hätte. Dann aber benutze man einen Kunstgriff, um die achten Einheitswurzeln zu entfernen, die bei Transformation der ϑ-Functionen so störend dazwischen zu treten pflegen: *man behafte nämlich unsere Grössen mit dem gemeinsamen Nenner:*

$$\left\{\left(\sqrt{\frac{\pi}{\omega_2}}\right)^3 \cdot \vartheta_1'(0, q)\right\}^n.$$

Ich setze also definitiv:

$$z_\alpha = (-1)^\alpha \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{n}} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n)}{\vartheta_1'(0, q)^n}. \tag{13}$$

Für die so normirten z ergiebt sich nun folgendes Verhalten bei linearer Transformation von ω_1, ω_2:

1) Sei $\omega_1' = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$, so kommt unmittelbar:

$$z_\alpha(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \varepsilon^{\frac{\alpha(\alpha-n)}{2}} \cdot z_\alpha(\omega_1, \omega_2), \tag{14}$$

wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ gesetzt ist.

2) Sei $\omega_1' = -\omega_2$, $\omega_2' = +\omega_1$, so ergiebt sich zunächst:

$$z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = (-1)^\alpha \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\alpha^2 i\pi}{n\omega}} \cdot \vartheta_1\left(-\frac{\alpha\pi}{\omega}, e^{-\frac{ni\pi}{\omega}}\right)}{\vartheta_1'\left(0, e^{-\frac{i\pi}{\omega}}\right)^n}.$$

Dies setzt sich vermöge bekannter Formeln in nachstehende Gleichung um:

$$z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}} \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha\pi}{n}, q^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1'(0, q)^n}.$$

Andererseits constatirt man mit Leichtigkeit das Vorhandensein folgender, bisher, wie es scheint, noch nicht bemerkter ϑ-Relation:

(15) $$(-1)^{\alpha}\vartheta_1\left(\frac{\alpha\pi}{n},\, q^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\beta=1}^{\beta=\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta}-\varepsilon^{-\alpha\beta})\left((-1)^{\beta}\cdot q^{\frac{\beta^2}{n}}\cdot \vartheta_1(\beta\omega\pi,\, q^n)\right).$$

Daher folgt:

(16) $$\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cdot z_\alpha(-\omega_2,\omega_1)}=(-1)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{\beta=1}^{\beta=\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta}-\varepsilon^{-\alpha\beta})\cdot z_\beta(\omega_1,\omega_2).$$

Dies ist aber im Wesentlichen dasjenige Verhalten, welches ich bei $n = 5, 7, 11$ benutzt habe.

§ 4.

Die Curve der z.

Indem ich jetzt n als ungerade Primzahl voraussetze, sollen die Verhältnisse der $\frac{n-1}{2}$ Grössen z_α als homogene Coordinaten eines Raumes von $\frac{n-3}{2}$ Dimensionen betrachtet werden. Bewegt sich die absolute Invariante J, und also ω, in der complexen Ebene, so durchläuft der „Punkt" z eine Curve. Zuvörderst beachte man, dass die Verhältnisse zweier beliebiger z_α nach ganzen Potenzen von $t = q^{\frac{2}{n}}$ entwickelt werden können, wobei höchstens eine endliche Anzahl von negativen Exponenten auftritt. Daher folgt, mit Rücksicht auf bekannte Eigenschaften der ϑ-Functionen:

Die Curve der z ist eine algebraische Curve.

Nun folgt aus (14), (16), dass die Quotienten $\frac{z_\alpha}{z_\beta}$ sämmtlich bei solchen linearen Substitutionen von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ungeändert bleiben, die modulo n zur Identität congruent sind, dass aber Analoges bei keiner anderen linearen Substitution eintritt. Die Curve ist also auf diejenige über der J-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche eindeutig bezogen, welche das Bild der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Transformation n. Ordnung ist. Ich gab bereits Annalen XIV, p. 151 an, dass die $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Blätter dieser Fläche bei $J = 0$ zu je 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ zu je n, und sonst nirgends, zusammenhängen. Dementsprechend können wir sagen:

Das Geschlecht unserer Curve ist $p = \frac{n+2\cdot n-3\cdot n-5}{24}$.

Die Curve geht durch $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Collineationen in sich über. Vermöge derselben werden ihre Punkte zu je $\frac{n(n^2-1)}{2}$ zusammengruppirt. Die zusammengehörigen Punkte sind im Allgemeinen verschieden; nur

für $J = 0$ fallen sie zu je 3, für $J = 1$ zu je 2, für $J = \infty$ zu je n zusammen. Hierdurch ist J als rationale Function der Coordinaten charakterisirt.

Um jetzt die Ordnung unserer Curve zu bestimmen, zählen wir die Verschwindungsstellen irgend einer hinlänglich allgemeinen lineargebrochenen Function der z ab, z. B. von $\frac{z_1}{\Sigma u_i z_i}$, wo keiner der Coefficienten u_i gleich Null sein soll. Aus der Productzerlegung der ϑ-Function folgt der Satz, dass ein solcher Quotient nur in den Punkten $J = \infty$ verschwinden kann. Diese $\frac{n^2-1}{2}$ Punkte müssen wir jetzt genauer betrachten. Ihre Unterscheidung kommt darauf zurück, dass alle reellen, rationalen Werthe von ω, jeweils auf ihre kleinste Benennung gebracht, modulo n zu einer und nur einer der $\frac{n^2-1}{2}$ Zahlen $\frac{\pm \varkappa}{\pm \lambda}$ congruent sind, wo $\varkappa$, λ unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \cdots (n-1)$ durchlaufen sollen und nur die eine Combination $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$ ausgeschlossen bleibt. Ich will nun insbesondere die $\frac{n-1}{2}$ Punkte herausgreifen, in denen $\lambda = 0$ ist; sie sollen dem Werthe von $\varkappa$ entsprechend mit I, II, $\cdots \left(\frac{N-1}{2}\right)$ bezeichnet sein. Der Punkt I wird derjenige sein, in welchem q gleich Null wird, auf den sich also unsere Reihenentwickelungen beziehen.

Nun wurde bereits erwähnt, dass diese Reihenentwicklungen nach ganzen Potenzen fortschreiten, wenn man statt q

$$t = q^{\frac{2}{n}} \tag{17}$$

einführt. Das niedrigste Glied, welches sich dann bei z_α einstellt, enthält die Potenz $t^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}$. Daher folgt:

Im Punkte I wird z_α $\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}$-fach unendlich.

Insbesondere $z_{\frac{n-1}{2}}$ wird am stärksten unendlich, nämlich $\frac{n^2-1}{8}$-fach. Ebenso stark wird $\Sigma u_i z_i$ unendlich, da wir voraussetzten, dass keiner der Coefficienten u_i verschwinde. Somit kommt:

Die Function $\frac{z_\alpha}{\Sigma u_i z_i}$ wird im Punkte I $\left(\frac{n^2-1}{8} - \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}\right)$-fach gleich Null.

Nun wird, wie man sofort sieht, $\frac{z_1}{\Sigma u_i z_i}$ in den Punkten I, II, $\cdots$ $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ zusammengenommen ebenso oft zu Null, wie die verschiedenen $\frac{z_\alpha}{\Sigma u_i z_i}$ zusammengenommen im Punkte I.

Die Gesammtheit der uns sonach bekannten Nullstellen unserer Function beträgt:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n^2-1}{8}-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}\right)=\frac{(n-3)(n^2-1)}{48}.$$

Dass es nun keine andere Nullstellen mehr giebt, dass also $\frac{z_1}{\Sigma u_i z_i}$ in den übrigen Punkten $J=\infty$ jedenfalls nicht verschwindet, folgt aus (14), (16). Denn diesen Formeln zufolge erfährt z_1, wenn man den Punkt I in einen der noch in Frage stehenden Punkte $J=\infty$ überführen will, eine lineare Substitution, in der das Glied mit $z_{\frac{n-1}{2}}$ nicht verschwindet*); z_1 selbst wird also in allen diesen Punkten $\frac{n^2-1}{2}$-fach unendlich, d. h. es wird mindestens ebenso stark unendlich, als $\Sigma u_i z_i$. Mithin:

Die Curve der z ist von der Ordnung $\frac{(n-3)(n^2-1)}{48}$.

Auch dies wieder stimmt mit den früheren Resultaten bei 5, 7, 11, wo wir 1, 4, 20 als betr. Ordnung fanden**).

§ 5.

Biquadratische Relationen zwischen den z.

Ich wünsche nun noch von der allgemeinen Definition der z_α aus das Vorhandensein der biquadratischen Relationen zu erklären, von denen in § 1. für $n=7$, 11 die Rede war. Dies gelingt sofort vermöge der bekannten Formel:

$$\begin{aligned}&\vartheta_1(v+w)\,\vartheta_1(v-w)\,\vartheta_1(t+u)\,\vartheta_1(t-u)\\+\;&\vartheta_1(w+u)\,\vartheta_1(w-u)\,\vartheta_1(t+v)\,\vartheta_1(t-v)\\+\;&\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)\,\vartheta_1(t+w)\,\vartheta_1(t-w)=0.\end{aligned}$$

Aus ihr deriviren nämlich, wie man sofort sieht, unter i, k, l, m irgend vier von einander verschiedene Zahlen verstanden, die folgenden Relationen zwischen den z:

$$(18)\qquad z_{l+m}z_{l-m}z_{i+k}z_{i-k}+z_{m+k}z_{m-k}z_{i+l}z_{i-l}+z_{k+l}z_{k-l}z_{i+m}z_{i-m}=0.$$

Nimmt man hier $n=7$, so hat man die eine Relation:

---

*) Man vergleiche, was über Combination solcher Substitutionen Annalen XV, p. 537 gesagt ist.

**) Man kann genau ebenso die Ordnung der Curve der A des § 1. bestimmen und findet

$$\frac{(n-1)(n^2-1)}{48},$$

also 2, 6, 25 für $n=5$, 7, 11, wie es sein muss. Die Curve der A ist durch die Formeln (9) eindeutig auf die Curve der z bezogen.

$$z_1^3 z_2 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1 = 0,$$

die mit der oben angegebenen (1) zusammenfällt. Nimmt man $n = 11$, so erhält man von den 15 Beziehungen (2), (3), (4) zunächst nur diejenigen 10, die aus drei Gliedern bestehen. Aus diesen kann man aber die fünf viergliedrigen als algebraische Folge ableiten. Denn es ist:

$$y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1$$

$$= \frac{1}{y_9}\left\{-y_3(y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9) - y_4(y_3^2 y_4 y_5 - y_1^2 y_4 y_9 - y_9^2 y_3 y_5)\right\}.$$

Also auch bei $n = 11$ ergeben sich sämmtliche Gleichungen aus bekannten Eigenschaften der ϑ-Function.

Leipzig, den 3. Januar 1881.

Bemerkung zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche.

Von

H. Schubert in Hamburg.

Auf jeder Erzeugenden einer Regelfläche wird durch die Punkte und die zugehörigen Tangentialebenen eine projective Beziehung zwischen einer geraden Punktreihe und einem Ebenenbüschel festgestellt, also auf den sämmtlichen ∞^1 Erzeugenden der Regelfläche ein einstufiges System solcher Beziehungen. In jedem einstufigen Systeme von Paaren projectiver Grundgebilde existirt aber im allgemeinen eine endliche Anzahl von solchen Paaren, bei welchen die sämmtlichen Elemente jedes der beiden Grundgebilde einem constanten Elemente im andern Grundgebilde entsprechen. Die Zahl solcher ausgearteten Paare in einem einstufigen Systeme ist in meinem Kalkül der abzähl. Geom. (cf. § 28 bis § 30, speciell pag. 196, F. 1) berechnet. Es liegt daher nahe, die dort gegebene Ableitung dieser Zahl auch auf den Fall der Regelfläche anzuwenden, und so die Zahl derjenigen Erzeugenden zu bestimmen, welche Cayley „Torsallinien" genannt hat. Man erhält dann eine Relation, welche auf anderem Wege Herr Sturm in den Math. Ann. Bd. VI, p. 255 bewiesen hat.

Der Grad der Regelfläche sei M, T sei die Zahl ihrer Torsallinien, und R ihr Rang, das heisst die Zahl derjenigen durch einen gegebenen Punkt gehenden Tangentialebenen, deren Berührungspunkte auf einer gegebenen Ebene liegen. Man nehme zwei Punkte P und Q an, bestimme auf jeder Erzeugenden die beiden Berührungspunkte p und q der beiden durch diese Erzeugende sowie durch P und Q gehenden Tangentialebenen, und wende auf das so durch alle Erzeugenden definirte, einstufige System von Punktepaaren p, q die Punktepaarformel $\varepsilon = p + q - g$ an. Dann hat man für p und q den Rang R der Regelfläche einzusetzen. Das Symbol g bedeutet die Zahl der eine gegebene Gerade schneidenden Verbindungslinien von p und q, ist also gleich dem Grade M. Die Coincidenzbedingung ε kann auf zweierlei Weise erfüllt werden, erstens durch diejenigen M Erzeugenden, welche

die Verbindungsgerade PQ schneiden, zweitens durch jede Erzeugende, bei welcher die durch die beiden beliebigen Punkte P und Q gehenden Tangentialebenen einen und denselben Berührungspunkt haben, also durch jede von den T Torsallinien. Also liefert die Punktepaarformel:

$$M + T = R + R - M \quad \text{oder} \quad T = 2 \cdot (R - M),$$

womit die fragliche Relation bewiesen ist.

Uebrigens ergiebt sich diese Formel auch unmittelbar aus meiner Strahlenpaarformel (22) pag. 60 meines „Kalküls", wenn man dieselbe auf das durch je zwei consecutive Erzeugende definirte einstufige System von Paaren unendlich naher Strahlen anwendet. Dann hat man nämlich $\varepsilon\sigma$ gleich der Zahl der Torsallinien, $\varepsilon\beta$ gleich dem Range, εg gleich dem Grade der Regelfläche zu setzen.

Hamburg, December 1880.

Formensystem der ternären b

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	i				f		Δ	
1		u_x						
2					Θ		$(\Theta\varphi x)^2$	
3				f_φ		f_H	K	
4	φ		H			$(\Theta\varphi x)$		$(\Theta H x)$
5				Θ_φ	(fHu)	Θ_H	f_L	
6	j		$(fHu)^2$	L		K_φ		K_H
7					$(\Theta H u)$		Θ_L	
8		$(\varphi j x)$	$(\Theta H u)^2$	$(fLu)^2$				
9		$(fLu)^3$			$(KHu)^2$			
10				$(\Theta L u)^2$				
11		$(\Theta L u)^3$	$(fH^2, u)^3$					
12				$(KLu)^3$				
13			$(\Theta H^2 u)^3$					
14	$(\Theta, H^2, u)^4$							
15			$(KH^3 u)^4$					
16		$(\Theta, LH, u)^4$						
18		$(K, LH, u)^5$						
21	$(K, H^3, u)^6$							

Die Zahlen der obersten Horizontalreihe bezeichnen de

r ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Δ								$(\Theta^2, Hx)^4$	
		$(f\Delta u)$	$(K\varphi x)^3$		$(KHx)^3$				
$\varphi x)^2$		$(\Theta Hx)^2$			$(\Theta^2 \varphi x)^3$		$(\Theta^2 Hx)^3$		(
K		$(K\varphi x)^2$		$(KHx)^2$		$(KLx)^3$			
	(ΘHx)		$(\Theta Lx)^2$						
f_L									
	K_H								
Θ_L									

bezeichnen den Grad in den x, die Zahlen der ersten Verticalreihe den Gr

${}^3x_1$.

	14	15	16	18	21
	$(\Theta^2, \mathsf{H}x)^4$				$(\Theta^3, L, x)^6$
			$(\mathsf{K}\Theta, \mathsf{H}, x)^4$	$(\mathsf{K}\Theta, L, x)^5$	
$x)^3$		$(\Theta^2 Lx)^4$			

lreihe den Grad in den *u*.

Fig. 3.

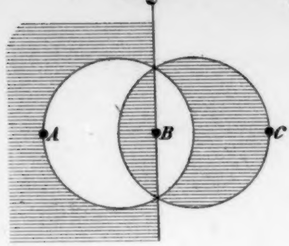


Fig. 2.

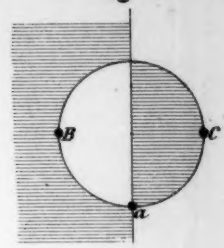
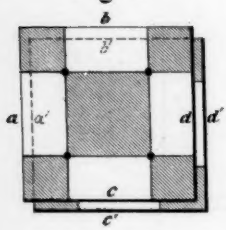
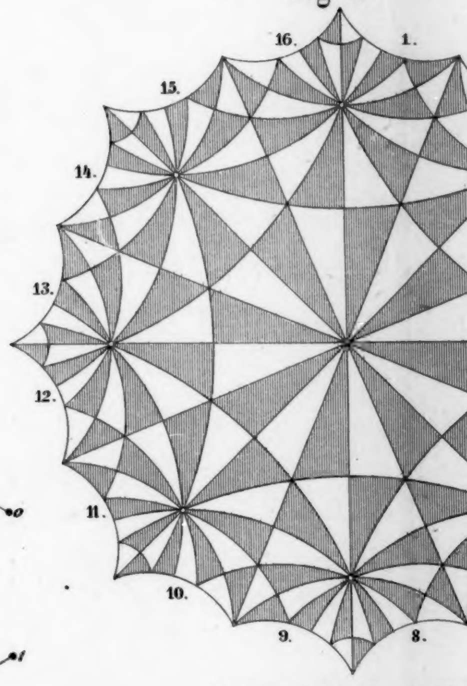


Fig. 5.



a - d'. b - c'.
a' - d. b' - c.

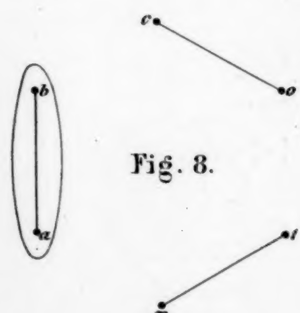
Fig. 1.



Zusammengehörigkeit der Kan

1 – 6. 5 – 10. 9 – 14.
3 – 8. 7 – 12. 11 – 16.

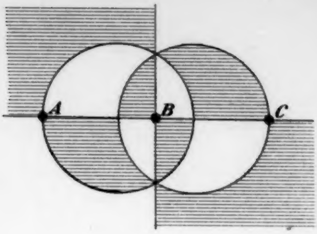
Fig. 8.



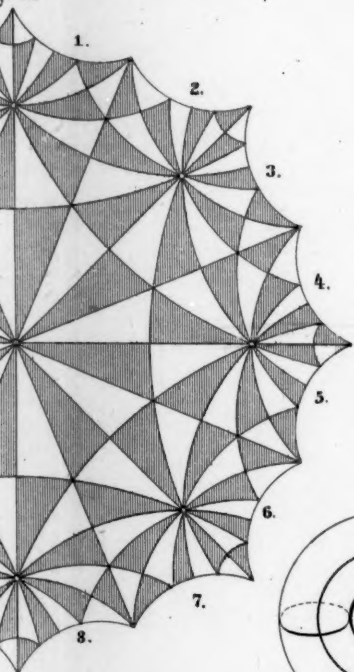
Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig

g. 2.

Fig. 4.



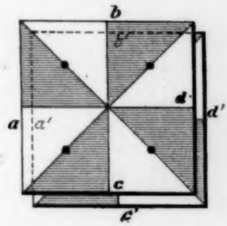
g. 1.



rigkeit der Kanten:

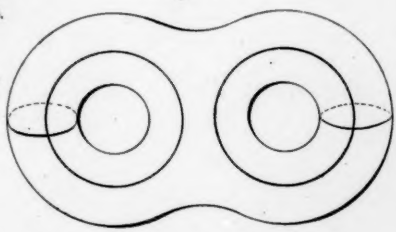
9 – 14.	13 – 2.
11 – 16.	15 – 4.

Fig. 6.



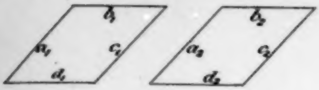
a - d'. b - c'.
a' - d. b' - c.

Fig. 7.



h. & Schaefer, Leipzig.

Fig. 1.



1.	$a_1 - c_2$,	$b_1 - d_1$,
	$a_2 - c_1$,	$b_2 - d_2$.
2.	$a_1 - c_2$,	$b_1 - d_2$,
	$a_2 - c_1$,	$b_2 - d_1$.
3.	$a_1 - c_1$,	$b_1 - d_2$,
	$a_2 - c_2$,	$b_2 - d_1$.

Fig. 4.

$b_1 - d_1$
$b_2 - d_2$
$b_3 - d_3$

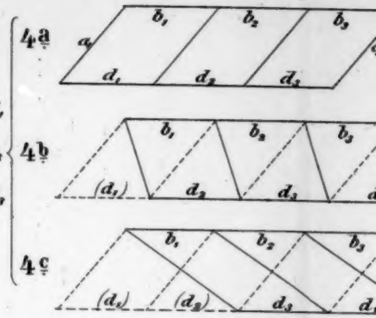
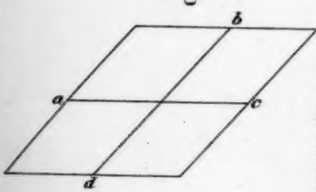


Fig. 5.



$a - c$; $b - d$.

Fig. 6.

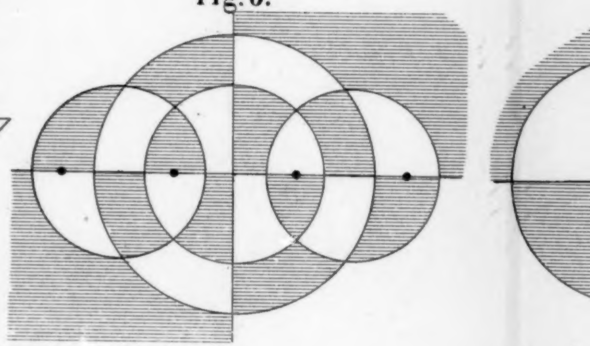


Fig. 7.

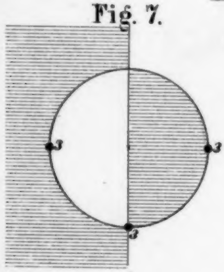
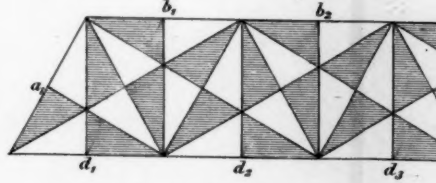


Fig. 10.



$b_1 - d_3$; $b_2 - d_1$; $b_3 - d_2$; $a_1 - c_3$.

W. Dyck, Reguläre Riemann'sche Flächen.

Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

g. 4.

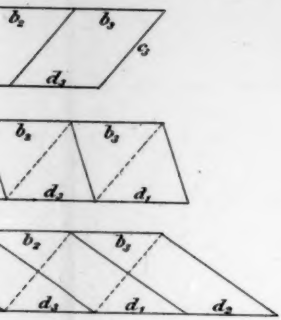
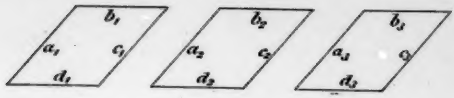


Fig. 3.



1. $a_1 - c_3$, $b_1 - d_1$,
$a_2 - c_1$, $b_2 - d_2$,
$a_3 - c_2$, $b_3 - d_3$.

2. $a_1 - c_3$, $b_1 - d_2$,
$a_2 - c_1$, $b_2 - d_3$,
$a_3 - c_2$, $b_3 - d_1$.

3. $a_1 - c_3$, $b_1 - d_3$,
$a_2 - c_1$, $b_2 - d_1$,
$a_3 - c_2$, $b_3 - d_2$.

4. $a_1 - c_1$, $b_1 - d_2$,
$a_2 - c_2$, $b_2 - d_3$,
$a_3 - c_3$, $b_3 - d_1$.

Fig. 9.

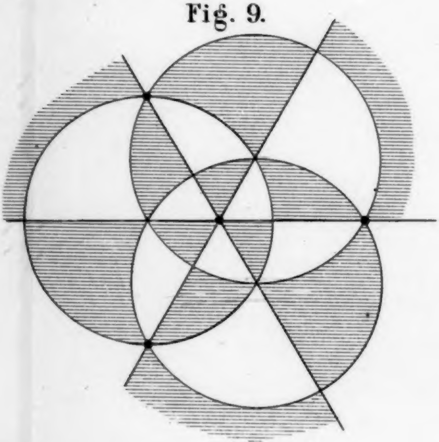


Fig. 2.

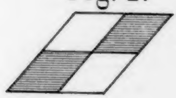
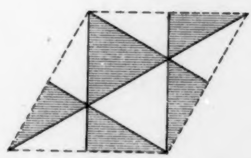
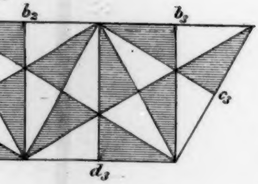


Fig. 8.



g. 10.



d_2; $a_1 - c_3$.